TD - Feuille 4

Corrigé ex. 1 Une petite mise en garde : la notation $\mathrm{Div}(X)$ désigne le groupe des diviseurs de Weil dans Hartshorne, et le groupe des diviseurs de Cartier dans Liu...

Passons à (1). Dans la courbe singulière d'équation $y^2 = x^3$, le point singulier est un diviseur de Weil, mais pas un diviseur de Cartier puisqu'il ne peut pas être défini localement par une seule équation (en effet, l'idéal maximal (x, y) de l'anneau local en la singularité n'est manifestement pas monogène).

(2) Notons $f = (y - x)/x$ et soit P le point singulier. En tout point $Q \neq P$, f est bien définie et non nulle. Il en découle que la restriction de D à $U := C \setminus \{P\}$ est le diviseur nul, donc le diviseur de Weil associé $[D_U]$ est nul. Il nous reste à calculer la multiplicité de D en P. Notons $A = k[x, y]_{(x,y)}$. On a $\mathcal{O}_{C,P}/(x) \simeq A/(y^2 - x^3, x) \simeq k[y]/(y^2)$ qui est de longueur 2. De même

$$\mathcal{O}_{C,P}/(y - x) \simeq A/(y^2 - x^3, y - x) \simeq k[y]_{(y)}/(y^2 - y^3) \simeq k[y]/(y^2)$$

de longueur 2 également. Finalement $\mathrm{mult}_P(D) = \mathrm{mult}_P(y - x) - \mathrm{mult}_P(x) = 0$. Donc $D = 0$.

(3) (i) Ensemblistement (pas schématiquement !) Z est défini par $x = 0$. Il s'ensuit que $U = D(x)$. Notons $A = k[x, y, z]/(z^2 - xy)$, on a $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = A[1/x]$. Dans cet anneau $y = z^2/x$ d'où $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \simeq k[x, z, 1/x]$. C'est un anneau factoriel, donc $\mathrm{Cl}(X) = 0$.
(ii) On a la suite exacte $\mathbb{Z} \to \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(U) \to 0$ où la première flèche est définie par $1 \mapsto Z$. Comme $\mathrm{Cl}(U) = 0$, cette flèche est surjective. Montrons maintenant que $2Z$ est le diviseur associé à la fonction $f = x \in A$. Cette fonction n'a pas de pôles ; elle ne peut avoir de zéro que le long d'un diviseur W défini par un idéal premier p_W contenant x. Le seul tel idéal premier est $p_W = (x, z)$, i.e. $W = Z$. Or

$$\mathcal{O}_{X,Z} \simeq \left(\frac{k[x, y, z]}{z^2 - xy}\right)_{(x,z)} \simeq k[y, z]_{(z)}$$

Cet anneau est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal engendré par z. On voit que la fonction $f = x = z^2/y$ a pour multiplicité 2. Ceci montre bien que $\mathrm{div}(f) = 2Z$, donc la classe de $2Z$ est nulle dans $\mathrm{Cl}(X)$.
(iii) Le fait que X est normal est l'objet (si k est de caractéristique différente de 2) d'un exercice assez facile de Hartshorne, cf chapitre II, paragraphe 6, exercice 6.4. (Ici, on l'admet.) Soit K le corps des fractions de $A = k[x, y, z]/(z^2 - xy)$. Supposons que Z est principal, i.e. est le diviseur associé à une fonction méromorphe $f \in K$. Comme $\mathrm{div}(f) = Z \geq 0$, pour tout diviseur de Weil Z', la fonction f n'a pas de pôle le long de Z'. En termes plus algébriques, pour tout idéal premier $p' \subset A$ de hauteur 1, on a $f \in A_{p'}$. Comme $A = \cap_{ht(p)=1} A_p$ il en résulte que $f \in A$. Montrons maintenant que f engendre l'idéal premier $p = (x, z)$ de Z. En fait, si $g \in p$, on a $\mathrm{div}(g) \geq Z$, donc $\mathrm{div}(g/f) \geq 0$, et par le même raisonnement que précédemment on trouve $g/f \in A$. Donc $g \in (f)$, i.e. en fait $p = (f)$. Or il est facile de voir que l'idéal (x, z)

ne peut pas être engendré par un élément, par exemple en localisant au point singulier puis en regardant dans l'espace tangent m/m^2. En conclusion $Z \neq 0$ dans $Z^1(X)$.
(iv) Comme X est normal, le morphisme $\mathrm{Div}(X) \to Z^1(X)$ est injectif, de sorte que $\mathrm{Div}(X) \hookrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il ne reste qu'à montrer que Z n'est pas un diviseur de Cartier, ce qui est clair, en regardant encore au voisinage du point singulier.

Corrigé ex. 2 D'abord, quelques commentaires. Il existe des conditions suffisantes d'existence de $\mathrm{Pic}_{X/k}$ (on dit, de *représentabilité* du foncteur F) plus générales que celle de l'exercice. Un exemple : si X est une courbe projective et lisse de genre g, alors $\mathrm{Pic}^0_{X/k}$ est sa *jacobienne*, qui est une variété abélienne de dimension g. On sait qu'une telle variété est propre (en fait, projective).

Passons à l'exercice proprement dit. Comme $\mathrm{Pic}^0_{X/k}$ est de type fini, on peut vérifier la propreté à l'aide du critère valuatif de propreté. Il s'agit de montrer que si R est une k-algèbre qui est un anneau de valuation discrète, de corps de fractions K, alors tout k-morphisme u_K : $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Pic}^0_{X/k}$ se prolonge de manière unique en un morphisme $u_R : \mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Pic}^0_{X/k}$. Utilisant la définition de $\mathrm{Pic}^0_{X/k}$, la donnée de u_K équivaut à la donnée d'un faisceau inversible $\mathcal{L}_K$ sur $X_K = X \times_k K$ (noter que $\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(K)) = 0$). Comme X_K est un schéma régulier, en particulier localement factoriel, il existe un diviseur de Weil $D_K \subset X_K$ tel que $\mathcal{L}_K = \mathcal{O}_{X_K}(D_K)$. Notons D_R l'adhérence de D_K dans X. C'est un diviseur de Weil de X_R (ou un diviseur de Cartier, ici c'est la même chose) : en effet, il est irréductible comme adhérence d'une partie irréductible, et de dimension 1 car la codimension est la dimension de Krull de l'anneau local du point générique $\eta \in D_R$, qui se trouve dans D_K. On note ensuite $\mathcal{L} := \mathcal{O}_{X_R}(D_R)$. C'est un faisceau inversible sur X_R, qui étend $\mathcal{L}_K$. Par la définition de $\mathrm{Pic}^0_{X/k}$, on a donc un morphisme $u_R : \mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Pic}_{X/k}$ qui en restriction à $\mathrm{Spec}(K)$ n'est autre que u_K. Comme $\mathrm{Spec}(R)$ est connexe, l'image de u_R tombe dans une composante connexe de $\mathrm{Pic}_{X/k}$, donc dans $\mathrm{Pic}^0_{X/k}$ puisque u_K tombe dedans. On a donc bien un morphisme $u_R : \mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Pic}^0_{X/k}$ qui étend u_K.

Corrigé ex. 3 (1) $U_i \simeq \mathbb{A}^n_k$, et comme le groupe de Picard de l'espace affine est nul (car l'anneau de polynômes $k[x_0, \dots, x_n]$ est factoriel), il existe un isomorphisme $c_i : \mathcal{L}_{|U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}$.
(2) L'anneau de fonctions de $U_i \cap U_j$ est $k\left[x_0, \dots, x_n, \frac{1}{x_i}, \frac{1}{x_j}\right]_{(0)}$, anneau des éléments de degré 0 dans $k[x_0, \dots, x_n, \frac{1}{x_i}, \frac{1}{x_j}]$. Ses unités sont donc les fractions rationnelles de degré 0 dont le numérateur et le dénominateur ont pour seuls facteurs x_i et x_j. D'où le résultat.
(3) Posons $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$. On reprend les trivialisations $c_i : \mathcal{L}_{|U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}$ et on note les changements de cartes

$$\varphi_{ij} = (c_{j|U_{ij}}) \circ (c_{i|U_{ij}})^{-1} : \mathcal{O}_{U_i|U_{ij}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_j|U_{ij}} .$$

On note qu'un tel isomorphisme est simplement donné par une section inversible de $\mathcal{O}_{U_{ij}}$, donc d'après la question (2) on a $\varphi_{ij} = \alpha_{ij}(x_i/x_j)^{l_{ij}}$. La condition de cocycle est la compatibilité $\varphi_{ik} = \varphi_{jk}\varphi_{ij}$ sur les intersections triples U_{ijk}, ce qui donne

$$\alpha_{ik}(x_i/x_k)^{l_{ik}} = \alpha_{jk}(x_j/x_k)^{l_{jk}}\alpha_{ij}(x_i/x_j)^{l_{ij}} = \alpha_{jk}\alpha_{ij}(x_j/x_k)^{l_{jk}}(x_i/x_j)^{l_{ij}} .$$

L'égalité des degrés en x_i impose $l_{ik} = l_{ij}$ donc l_{ij} est indépendant de j. L'égalité des degrés en x_k impose $l_{ik} = l_{jk}$ donc l_{ij} est indépendant de i. Finalement $l_{ij} = l$ indépendant de i et j. Enfin, comme $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n_k, k^*) = 0$, il existe des constantes $\beta_i \in k^*$ telles que $\alpha_{ij} = \beta_i/\beta_j$. Alors on voit que si on pose $c'_i = c_i/\beta_i$ on a des changements de cartes $\varphi'_{ij} = \alpha_{ij}^{-1}\varphi_{ij} = (x_i/x_j)^{l_{ij}}$.
(4) Le faisceau inversible $\mathcal{O}(l)$ est celui qui est déterminé par les fonctions de transition $(x_i/x_j)^l$ sur $U_i \cap U_j$. L'application $\mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_k)$ donnée par $l \mapsto \mathcal{O}(l)$ envoie 0 sur $\mathcal{O}(0) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$, et c'est un morphisme de groupes car il est facile de voir que quand on prend le produit tensoriel de faisceaux inversibles, les fonctions de transition se multiplient. On a montré dans les questions précédentes que ce morphisme est surjectif. Calculons son noyau. Si $l > 0$ le faisceau $\mathcal{O}(l)$ possède une section non constante définie par $s_{|U_i} = (x_0/x_i)^l$, donc $\mathcal{O}(l)$ n'est pas trivial (car les seules sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$ sont les constantes). Si $l < 0$ le faisceau $\mathcal{O}(-l)$ possède une section non constante, donc $\mathcal{O}(-l)$ n'est pas trivial. Donc $\mathcal{O}(l)$ trivial implique $l = 0$. En conséquence le morphisme $\mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_k)$ est injectif, donc un isomorphisme.