

TD - Feuille 4

Exercice 1 Soit k un corps.

(1) Donnez un exemple de schéma dans lequel diviseurs de Weil et diviseurs de Cartier ne coïncident pas.

(2) Soit C la courbe plane cuspidale d'équation $y^2 = x^3$. Soit D le diviseur de Cartier principal associé à la fonction méromorphe $(y - x)/x$. Calculez son diviseur de Weil associé.

Pour la question suivante, on rappelle que si X est un schéma intègre normal, Z un diviseur de Weil de X et $U = X \setminus Z$, on a une suite exacte $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U) \rightarrow 0$.

(3) Soit X le schéma affine normal défini par l'équation $z^2 = xy$ dans l'espace $\mathbb{A}_k^3$. On souhaite montrer que $\text{Cl}(X) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et que ce groupe est engendré par la génératrice $Z = \{x = z = 0\}$.

(i) On pose $U = X \setminus Z$. Montrez que $\text{Cl}(U) = 0$.

(ii) Montrez que la classe de Z engendre $\text{Cl}(X)$ et que $2Z = 0$.

(iii) Montrez que $Z \neq 0$. (Si Z est le diviseur d'une fonction méromorphe f , montrez que f est en fait régulière et engendre l'idéal premier de Z . Aboutissez à une contradiction. On rappelle que si A est intègre normal, on a $A = \bigcap_{\text{ht}(p)=1} A_p$.)

(iv) Montrez que le groupe des classes de diviseurs de Cartier de X est nul.

Exercice 2 Schéma de Picard.

Soit k un corps algébriquement clos et X un k -schéma projectif. On définit le *foncteur de Picard relatif de X/k* comme étant le foncteur F défini sur la catégorie des k -schémas par :

$$F(S) = \text{Pic}(X \times S) / \text{Pic}(S) .$$

On admet qu'il existe un schéma noté $\text{Pic}_{X/k}$ et une bijection fonctorielle en S :

$$F(S) = \text{Hom}_k(S, \text{Pic}_{X/k}) ,$$

et que la composante connexe $\text{Pic}_{X/k}^0$ du point correspondant au faisceau inversible trivial $[\mathcal{O}_X] \in F(k)$ est de type fini. Montrez que si X est lisse sur k , alors $\text{Pic}_{X/k}^0$ est propre.

Exercice 3 Groupe de Picard de l'espace projectif.

Soit k un corps et soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur $\mathbb{P}_k^n = \text{Proj}(k[x_0, \dots, x_n])$.

(1) Justifiez que $\mathcal{L}$ est trivial sur les ouverts standard U_i de $\mathbb{P}_k^n$.

(2) Montrez que les fonctions inversibles sur $U_i \cap U_j$ sont de la forme $\alpha_{ij}(x_i/x_j)^{l_{ij}}$ avec $\alpha_{ij} \in k^*$ et $l_{ij} \in \mathbb{Z}$.

(3) À partir de trivialisations de $\mathcal{L}$ sur U_i , utilisez la condition de cocycle pour montrer que la puissance l_{ij} dans le changement de carte est indépendante de (i, j) . Admettant que $H^1(\mathbb{P}_k^n, k^*) = 0$, où $k^\times$ est le faisceau constant sur $\mathbb{P}_k^n$, montrer qu'on peut changer les trivialisations initiales pour se ramener à $\alpha_{ij} = 1$.

(4) En déduire que $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}(l)$ pour un $l \in \mathbb{Z}$ puis que $\text{Pic}(\mathbb{P}_k^n) \simeq \mathbb{Z}$.