TD - Feuille 3

Corrigé ex. 1 (1) Non, ce n'est pas possible, cf théorème 1.4.12 du cours.
(2) Oui, car par exemple si Y est affine d'anneau A et si X est défini par *une* équation f qui est non diviseur de 0 dans A, l'immersion i est régulière. Il suffit de choisir f pour que X soit singulier. On prend par exemple pour S le spectre d'un corps k, $Y = \mathbb{A}_k^2 = \mathrm{Spec}(k[x,y])$ et X une courbe singulière de Y (équation $y^2 = x^3$, ou $y^2 = x^2(x+1)$, ou...).
(3) Oui, c'est possible. Là encore on peut prendre pour S le spectre d'un corps k. Le plus simple est de prendre pour $X = \{x\}$ un point (réduit), on est sûr qu'il est lisse. Il faut ensuite choisir Y non lisse tel que X soit immergé dedans par une immersion i non régulière. Par le théorème 1.4.12 du cours, qui est une équivalence, si Y est non lisse en x, l'immersion i ne sera pas régulière. On peut donc prendre pour Y une k-courbe singulière et $X = \{x\}$ l'un des points singuliers.
(4) Oui, c'est possible. On prend encore $S = \mathrm{Spec}(k)$. Voici d'abord un exemple avec X non réduit : prenons $Y = \mathbb{A}_k^2 = \mathrm{Spec}(k[x,y])$ et posons $A = k[x,y]$. Soit X le *point double* i.e. le point non réduit défini par l'idéal $I = (x^2, xy, y^2)$. Si $i : X \hookrightarrow Y$ était régulière, alors I/I^2 serait un A/I-module localement libre de rang égal à la codimension de X dans Y c'est-à-dire 2. Comme ici X est un schéma local, c'est-à-dire A/I est local, en fait I/I^2 serait A/I-module libre de rang 2. Or il est visible que I/I^2 ne peut pas être engendré par 2 éléments, donc c'est impossible.

Voici maintenant un exemple avec X réduit. On va prendre un X qui n'est pas intersection complète (cf exercice à suivre), c'est-à-dire qui ne peut être défini dans Y par $r = \mathrm{codim}(X,Y)$ équations (c'est donc le même phénomène que dans l'exemple précédent. On prend $Y = \mathbb{A}_k^2 = \mathrm{Spec}(k[x,y,z])$ et on pose $A = k[x,y,z]$. On prendra pour X l'image du morphisme $\mathbb{A}_k^1 \to Y$ donné par $t \mapsto (t^2, t^3, t^5)$. En d'autres termes, $x = t^2$, $y = t^3$ et $z = t^5$. L'image est le sous-schéma fermé $X \subset Y$ d'équations $x^3 = y^2$, $x^5 = z^2$ et $y^5 = z^3$. Soit I l'idéal de $k[x,y,z]$ engendré par ces trois éléments. Si $i : X \hookrightarrow Y$ était régulière, alors I/I^2 serait un A/I-module localement libre de rang 2. En particulier, en localisant en l'origine $P = (0,0,0)$ correspondant dans A à l'idéal maximal (x,y,z), le module $I_P/I_P 2$ devrait être A_P/I_P-module libre de rang 2. Ici encore, un calcul assez facile montre que ce module ne peut pas être engendré par 2 éléments, donc i n'est pas régulière. (Il suit du théorème 1.4.12 du cours que $X = \mathrm{Spec}(A/I)$ n'est pas lisse, sans vérification.)

Corrigé ex. 2 (1) On a $\mathcal{O}_U(U) = \mathcal{O}_X(U) = \mathrm{Hom}_{A-Alg}(A[T], \mathcal{O}_X(U))$, d'après la propriété universelle de l'anneau des polynômes. D'après la description que l'on a vue des morphismes vers un schéma affine, ceci n'est autre que $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{Sch}}(U, \mathrm{Spec}(A[T]))$ i.e. $\mathrm{Hom}_{A-\mathrm{Sch}}(U, \mathbb{A}_A^1)$.
(2) Se donner un éément $z \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ revient à se donner un morphisme de A-algèbres $A[T] \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, tel que l'image de T est z. Donc se donner un éément $z \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tel que $z^n = 1$ revient à se donner un morphisme de A-algèbres $A[T]/(T^n - 1) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Posons $\mu_{n,A} = \mathrm{Spec}(A[T]/(T^n - 1))$, on voit donc qu'on a la bijection attendue.

Voici les propriétés de $\mu_{n,A}$. C'est un A-schéma fini car son algèbre de fonctions est A-module fini. Ainsi, il est de type fini, séparé, propre. De plus, cet anneau est A-module libre de base $1, T, \ldots, T^{n-1}$. En particulier, c'est un module plat. Donc $\mu_{n,A}$ est fini et plat, de degré n. Pour tester les propriétés de lissité, on peut calculer $\Omega^1_{\mu_{n,A}/A}$. Posons $B = A[T]/(T^n - 1)$, alors c'est le faisceau associé au B-module $BdT/nT^{n-1}dT$ qui est isomorphe comme B-module à B/nB, puisque T, donc T^{n-1}, est inversible dans B. Si n est inversible dans A, alors $\Omega^1_{\mu_{n,A}/A} = 0$ et $\mu_{n,A}$ est étale, donc non ramifié et lisse. Plus généralement, $\mu_{n,A}$ est étale au-dessus de l'ouvert $U = D(n) \subset \mathrm{Spec}(A)$ (qui peut être vide). Si A est un corps de caractéristique divisant n, on a $\mu_{n,A} \simeq B$ qui est B-module libre de rang 1. Donc $\mu_{n,A}$ n'est pas étale, ou de manière équivalente, n'est pas lisse (puisqu'étant de dimension relative 0 sur $\mathrm{Spec}(A)$, lisse = étale).

Passons à connexe, affine, réduit, normal (en fait, affine est clair).

Commençons par le cas où $A = k$ est un corps, qui est plus facile. Soit p la caractéristique de k. Si p est premier avec n, alors $\mu_{p,k}$ est étale sur $\mathrm{Spec}(k)$ qui est réduit et normal, donc il est lui-même réduit et normal (on peut aussi le voir par calcul direct...). Par ailleurs, le polynôme $T - 1$ est premier avec $T^{n-1} + T^{n-2} + \cdots + T + 1$ d'où un isomorphisme d'anneaux

$$k[T]/(T^n - 1) \ \to \ k[T]/(T - 1) \times k[T]/(T^{n-1} + T^{n-2} + \cdots + T + 1)$$

et sur les spectres

$$\mu_{n,k} = \mathrm{Spec}(k) \amalg \mathrm{Spec}(k[T]/(T^{n-1} + T^{n-2} + \cdots + T + 1)) \ .$$

Donc il n'est pas connexe. Passons au cas où p divise n i.e. $n = pm$. Alors $T^n - 1 = (T^m - 1)^p$ donc $\mu_{n,k}$ n'est pas réduit, a fortiori pas normal. Si $n = p^u$ est une puissance de p, alors $T^n - 1 = (T - 1)^{p^u}$ donc $\mu_{n,k}$ est connexe : topologiquement, il n'a qu'un point. Si n possède un facteur q premier à p, on voit comme ci-dessus (dans l'étude du cas n premier à p) que $\mu_{n,k}$ n'est pas connexe.

Si $A = \mathbb{Z}$, l'anneau $\mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)$ se plonge dans $\mathbb{Q}[T]/(T^n - 1)$ qui est réduit, donc $\mu_{n,\mathbb{Z}}$ est réduit. Pour la normalité, rappelons que souvent, en géométrie algébrique, on utilise la définition *locale* qui est que A (ou un schéma X) est normal ssi tous ses anneaux locaux A_p (resp. les $\mathcal{O}_{X.x}$) sont normaux, i.e. intègres et intégralement clos. Dans notre cas, on peut voir que le localisé de $\mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)$ en un idéal maximal $(p, T - 1)$, pour un premier p divisant n, n'est pas intègre, en particulier pas normal (je laisse les détails...).

(3) Se donner un éément $z \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ inversible revient à se donner un morphisme de A-algèbres $A[T, 1/T] \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, tel que l'image de T est z. Donc $\mathbb{G}_{m,A} = \mathrm{Spec}(A[U, 1/U])$ répond à la question. Le morphisme $A[U, 1/U] \to A[T]/(T^n - 1)$ qui envoie U sur T est bien défini car T est inversible dans l'anneau du but. Ce morphisme est surjectif (c'est le quotient par l'idéal $(U^n - 1)$) et il lui correspond une immersion fermée $i : \mu_{n,A} \hookrightarrow \mathbb{G}_{m,A}$. Cette immersion est régulière, car définie par l'élément $U^n - 1$ non diviseur de 0 dans $A[U, 1/U]$. Elle est différentiellement lisse car toute immersion l'est. Elle n'est pas plate car $A[T]/(T^n - 1)$ n'est pas $A[U, 1/U]$-module plat : par exemple, le morphisme injectif $A[U, 1/U] \to A[U, 1/U]$ défini par la multiplication par $U^n - 1$ devient, après tensorisation $\otimes_{A[U,1/U]} A[T]/(T^n - 1)$, le morphisme nul, non injectif. A fortiori, i n'est pas lisse.

Corrigé ex. 3 (1) Soit $e = e_1, \ldots, e_r$ une base de L et $g = g_1, \ldots, g_t$ une base de N. Le rang de M est donc $s = r + t$. Pour $1 \leq i \leq r$ posons $f_i = e_i$, et pour $r + 1 \leq i \leq s$ choisissons un antécédent $f_i \in M$ de g_{i-r}. Alors la famille des f_i est une base de M. (Ceci peut se justifier par exemple en disant que l'association $g_{i-r} \mapsto f_i$ pour $r+1 \leq i \leq s$ définit une section de $M \to N$, i.e. un isomorphisme $M \simeq L \oplus N$.) On définit un morphisme de $\wedge^r L \otimes \wedge^t N \to \wedge^s M$ en envoyant $(e_1 \wedge \cdots \wedge e_r) \otimes (g_1 \wedge \cdots \wedge g_t)$ sur $f_1 \wedge \cdots \wedge f_s$. Comme $\det(L) \otimes \det(N)$ et $\det(M)$ sont libres de rang 1 et que notre morphisme envoie une base sur une base, c'est un isomorphisme.

Supposons qu'on change les bases e, g pour e', g' et qu'on choisit des antécédents f'_i pour les g'_i avec $r+1 \leq i \leq s$. Alors il existe des matrices inversibles à coefficients dans A telles que $e' = Ue$, $g' = Wg$. La matrice de passage V de la base f à la base f' est triangulaire par blocs avec U et W comme blocs diagonaux. Le calcul du déterminant matriciel donne $\det(V) = \det(U)\det(W)$. Notre morphisme

$$(e_1 \wedge \cdots \wedge e_r) \otimes (g_1 \wedge \cdots \wedge g_t) \mapsto f_1 \wedge \cdots \wedge f_s$$

devient

$$(e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_r) \otimes (g'_1 \wedge \cdots \wedge g'_t) \mapsto f'_1 \wedge \cdots \wedge f'_s .$$

Comme $e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_r = (\det(U))e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$, $g'_1 \wedge \cdots \wedge g'_t = (\det(W))g_1 \wedge \cdots \wedge g_t$ et $f'_1 \wedge \cdots \wedge f'_s = (\det(V))f_1 \wedge \cdots \wedge f_s$, on voit que la définition du morphisme est inchangée. Elle ne dépend donc d'aucun choix, elle est canonique.

En particulier, dans la situation d'une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini sur un schéma X, on peut définir cet isomorphisme localement sur des ouverts sur lesquels les faisceaux sont libres. Comme il est canonique, la définition est cohérente sur les intersections d'ouverts, de sorte que l'isomorphisme se recolle en un isomorphisme global sur X.

(2) On pose $W = Z_1 \times_Y Z_2$ et $h = (i_1, i_2) : X \to W$. Il est facile de voir que comme i_1 et i_2 sont des immersions régulières, alors h l'est aussi. On utilise les suites exactes données par l'énoncé :

$$0 \to \mathcal{C}_{X/Z_1} \to \mathcal{C}_{X/W} \to h^*\Omega^1_{W/Z_1} \to 0$$

et

$$0 \to \mathcal{C}_{X/Z_1} \to \mathcal{C}_{X/W} \to h^*\Omega^1_{W/Z_1} \to 0 .$$

Notons $p_1 : W \to Z_1$ et $p_2 : W \to Z_2$ les projections. Par sa définition même, $W \to Z_1$ est le pullback de $Z_2 \to Y$. Une propriété des faisceaux de différentielles est que $\Omega^1_{W/Z_1} = p_2^*\Omega^1_{Z_2/Y}$. Il s'ensuit que

$$h^*\Omega^1_{W/Z_1} = h^*p_2^*\Omega^1_{Z_2/Y} = i_2^*\Omega^1_{Z_2/Y} .$$

De la même manière, on a $h^*\Omega^1_{W/Z_2} = i_1^*\Omega^1_{Z_1/Y}$. Comme Z_1 et Z_2 sont lisses sur Y, les faisceaux $i_1^*\Omega^1_{Z_1/Y}$ et $i_2^*\Omega^1_{Z_2/Y}$ sont localement libres sur X. Comme i_1 et i_2 sont des immersions régulières, les faisceaux conormaux qui apparaissent dans les suites exactes courtes ci-dessus sont aussi localement libres sur X. On peut donc appliquer la question (1) et prendre le déterminant. On obtient un isomorphisme canonique composé

$$\det(\mathcal{C}_{X/Z_1}) \otimes i_2^*(\det \Omega^1_{Z_2/Y}) \xrightarrow{\sim} \det(\mathcal{C}_{X/W}) \xleftarrow{\sim} \det(\mathcal{C}_{X/Z_2}) \otimes i_1^*(\det \Omega^1_{Z_1/Y}) .$$

En tensorisant par les faisceaux inverses (duaux) de $\det(\mathcal{C}_{X/Z_1})$ et $\det(\mathcal{C}_{X/Z_2})$, on en déduit l'isomorphisme recherché.

(3) Par définition d'un morphisme localement d'intersection complète, on se ramène localement à la situation de (2) qui fournit un faisceau $\det(\mathcal{C}_{X/Z_1})^\vee \otimes i_1^*(\det \Omega^1_{Z_1/Y})$ unique à isomorphisme canonique près. Cette construction canonique se recolle sur les ouverts.

Corrigé ex. 4 On peut prendre pour S le spectre d'un corps non parfait k, et pour X le spectre d'une extension finie purement inséparable ℓ de k. Cela répond aux deux questions. On peut ensuite, si on y tient, faire des variations plus géométriques, en partant de cet exemple (par exemple, tout ℓ-schéma lisse X donne encore un exemple).