TD - Feuille 3

Exercice 1 Soit $i : X \hookrightarrow Y$ une immersion fermée de S-schémas. Peut-on avoir :
(1) i régulière avec X lisse et Y non lisse ?
(2) i régulière avec X non lisse et Y lisse ?
(3) i non régulière avec X lisse et Y non lisse ?
(4) i non régulière avec X non lisse et Y lisse ?

Exercice 2 Soit A un anneau.
(1) Soit X un A-schéma. Montrez que les fonctions de X sur un ouvert U, i.e. les sections $f \in \mathcal{O}_X(U)$, s'interprètent comme des fonctions au sens usuel, i.e. des morphismes $f : U \to \mathbb{A}^1_A$.

(2) Soit $n \geq 1$ un entier. Montrez qu'il existe un A-schéma noté $\mu_{n,A}$ tel que pour tout A-schéma X, on ait une bijection fonctorielle en X :

$$\{ \, z \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \, , \, z^n = 1 \, \} \ \stackrel{\sim}{\to} \ \mathrm{Hom}_A(X, \mu_{n,A}) \ .$$

Comme A-schéma, est-il de type fini, séparé, propre, fini, plat, lisse, non ramifié, étale ? Si A est un corps et si $A = \mathbb{Z}$, le schéma $\mu_{n,A}$ est-il connexe, affine, réduit, normal ?

(3) Montrez qu'il existe un A-schéma noté $\mathbb{G}_{m,A}$ tel que pour tout A-schéma X, on ait une bijection fonctorielle en X :

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^* \ \stackrel{\sim}{\to} \ \mathrm{Hom}_A(X, \mathbb{G}_{m,A}) \ .$$

Montrez qu'il existe une immersion fermée $i : \mu_{n,A} \hookrightarrow \mathbb{G}_{m,A}$. Est-elle régulière, différentiellement lisse, plate, lisse ?

Exercice 3 *Faisceau canonique d'un morphisme localement d'intersection complète.*

(1) Soient A un anneau. Le *déterminant* d'un A-module libre de rang fini M est $\det(M) := \wedge^n M$ où $n = \mathrm{rg}(M)$. Soit $0 \to L \to M \to N \to 0$ une suite exacte de A-modules libres de rang fini. Montrez qu'on a un isomorphisme canonique $\det(L) \otimes \det(N) \simeq \det(M)$. Étendez la définition du déterminant au cas de faisceaux de modules localement libres de rang fini sur un schéma X.

(2) Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type fini de schémas localement noethériens dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[dr, "g_1"'] & X \arrow[l, hook', "i_1"'] \arrow[r, hook, "i_2"] \arrow[d, "f"] & Z_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

où i_1, i_2 sont des immersions régulières et g_1, g_2 sont lisses. Montrez qu'on a un isomorphisme canonique

$$\phi_{12} : \det(\mathcal{C}_{X/Z_1})^\vee \otimes i_1^*(\det \Omega^1_{Z_1/Y}) \simeq \det(\mathcal{C}_{X/Z_2})^\vee \otimes i_1^*(\det \Omega^1_{Z_2/Y}) \ .$$

(Introduisez $W = Z_1 \times_Y Z_2$, $h = (i_1, i_2) : X \to W$, et utilisez le fait admis suivant : si une immersion régulière $S \to T$ se factorise en une immersion $i : S \to U$ suivie d'un morphisme lisse $U \to T$, alors on a une suite exacte canonique $0 \to \mathcal{C}_{S/T} \to \mathcal{C}_{S/U} \to i^*\Omega^1_{U/T} \to 0$.)

(3) Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type fini de schémas localement noethériens. On dit que f est *localement d'intersection complète* si tout $x \in X$ possède un voisinage U tel que $f_{|U}$ se factorise en une immersion régulière $i : U \hookrightarrow Z$ suivie d'un morphisme lisse $g : Z \to Y$. Indiquez comment déduire de la question précédente la construction d'un faisceau inversible canonique sur X, appelé *faisceau canonique*.

Exercice 4 Soit $X \to S$ un morphisme de schémas. Donnez un exemple dans lequel X est rgulier, mais n'est pas lisse sur S. Donnez un exemple dans lequel $\Omega^1_{X/S}$ est localement libre, sans que X soit lisse sur S.