TD - Feuille 2

Corrigé ex. 1 Soit $f\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$ un morphisme de schémas. En prenant les sections globales de $f^\sharp\colon \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} \to f_*\mathcal{O}_X$ on obtient un morphisme $\varphi\colon A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Réciproquement, soit $\varphi\colon A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ un morphisme d'anneaux. Considérons un recouvrement de X par des ouverts affines $U_i = \mathrm{Spec}(B_i)$. En composant φ avec l'application de restriction $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) = B_i$, on obtient un morphisme $A \to B_i$ qui induit un morphisme de schémas $f_i\colon U_i \to \mathrm{Spec}(A)$. Pour que les f_i se recollent en un morphisme $f\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$, il faut vérifier qu'ils coïncident sur les intersections $U_i \cap U_j$. Le schéma $U_i \cap U_j$ n'est pas nécessairement affine (nous verrons plus loin dans le cours qu'il l'est si X est *séparé*), mais on peut toujours le recouvrir par des schémas affines $V_{i,j}^k = \mathrm{Spec}(C_{i,j}^k)$. Alors il est clair que f_i et f_j coïncident sur chaque $V_{i,j}^k$, en vertu de l'égalité des applications de restriction $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(V_{i,j}^k, \mathcal{O}_X)$ et $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U_j, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(V_{i,j}^k, \mathcal{O}_X)$. On obtient ainsi $f\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$. Je laisse de côté la vérification du fait que les applications $f \mapsto \varphi$ et $\varphi \mapsto f$ sont inverses l'une de l'autre.

Plus généralement, soit k un anneau et supposons que X et $\mathrm{Spec}(A)$ sont des k-schémas. Alors les mêmes raisonnements montrent se donner un morphisme de k-schémas $X \to \mathrm{Spec}(A)$ est la même chose que se donner un morphisme de k-algèbres $A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Corrigé ex. 2 Pour les questions (1) et (2), il suffit de montrer que les morphismes en question sont des isomorphismes sur les fibres en tout point $x \in X$. Comme les faisceaux localement libres sont alors libres sur $\mathcal{O}_{X,x}$, c'est clair.

Pour (3), l'assertion à démontrer est locale sur X. On peut donc se restreindre à un ouvert $U = \mathrm{Spec}(A)$ sur lequel $\mathcal{L}$ est libre. On a donc un isomorphisme $i : A \to \mathcal{L}(U)$, notons t l'image de 1 par i de sorte que $\mathcal{L}_{|U} = t\mathcal{O}_U$. On note encore par la lettre s la restriction de la section globale s à U, de sorte que $s = ta$ pour un $a \in A$. Alors le germe s_x en un point x de U est non nul ssi a_x est non nul, de sorte que $X_s \cap U = D(a)$. C'est bien un ouvert.

Corrigé ex. 3 Je vous conseille vivement de regarder ce que la bijection de l'énoncé donne lorsque X est le spectre d'un corps : on doit retrouver le fait que l'ensemble des k-points de $\mathbb{P}(E)$ est en bijection avec l'ensemble des hyperplans vectoriels de E.

Passons à la démonstration de la propriété universelle. Étant donné un morphisme $f\colon X \to \mathbb{P}(E)$, en prenant les images inverses de la surjection universelle $E \to \mathcal{O}(1)$, on déduit un morphisme surjectif $E \to \mathcal{L}$ où $\mathcal{L} := f^*\mathcal{O}(1)$. (Notez que f^*E est le fibré E sur X, que l'on note encore E.)

En sens inverse, soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X avec un morphisme surjectif $E \to \mathcal{L}$. Fixons $e_1, \dots, e_n$ une base de E (l'espace vectoriel), qui donne une base de sections globales de E (le fibré). Soit s_i l'image de e_i dans $\mathcal{L}$. Le fait que $E \to \mathcal{L}$ soit surjectif dit qu'en tout point $x \in X$, l'un des germes $s_{i,x}$ est non nul, et donc que X est recouvert par les ouverts $V_i = \{x \in X\ ,\ s_{i,x} \neq 0\}$. (Les propriétés des germes impliquent que V_i est ouvert.) On souhaite définir $f\colon X \to \mathbb{P}(E)$; on va le définir sur chacun des V_i de façon à ce que tout se recolle. Sur V_i ce morphisme sera à valeurs dans l'ouvert standard $U_i = \{x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}(E)$ (les coordonnées x_i sont déterminées par la base $e_1, \ldots, e_n$). Autour de chaque point $x \in V_i$ il existe un ouvert U tel que $\mathcal{L}_{|U} \simeq \mathcal{O}_{X|U}$. Soit t un générateur local de $\mathcal{L}$ sur U, alors on a $s_i = a_i t$ pour $a_i \in \mathcal{O}_X(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Comme on est dans V_i, on a $a_i \neq 0$ sur U. Donc le morphisme suivant est bien défini :

$$\begin{array}{ccc} k\left[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right] & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(U) \\ \frac{x_j}{x_i} & \longmapsto & \frac{a_j}{a_i} \end{array}$$

Or on sait qu'un morphisme d'un schéma X vers un schéma affine $\operatorname{Spec}(A)$ est la même chose qu'un morphisme d'anneaux $A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ (c'est un exercice dans Hartshorne, faites-le). Dans notre cas, le morphisme d'anneaux ci-dessus détermine un morphisme

$$U \longrightarrow U_i \subset \mathbb{P}(E)$$

Clairement, tout ceci ne dépend pas du choix du générateur t (car un autre générateur est de la forme λt avec $\lambda \in \mathcal{O}_U(U)^\times$...), et se recolle sur tous les $U \subset V_i$ pour définir un morphisme $V_i \to \mathbb{P}(E)$, puis en recollant sur les V_i, on obtient $f\colon X \to \mathbb{P}(E)$.

Pour bien faire les choses, il faut démontrer que ces constructions sont inverses l'une de l'autre... (en tenant compte du quotient par les sections globales de $\mathcal{O}_X^\times$).

Corrigé ex. 4 Voir Liu, Algebraic Geometry and Arithmetic Curves, proposition 6.1.26 (page 218 de l'édition en couverture rigide).