TD - Feuille 2

Exercice 1 Soit A un anneau. Montrez que pour tout schéma X, on a une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(X, \mathrm{Spec}(A)) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$.

Exercice 2 Soit X un schéma et $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1. Dans ce qui suit, lorsqu'on définit un morphisme de faisceaux, il est entendu que la formule donnée vaut pour des sections sur des ouverts $U \subset X$ variables.

(1) Soit $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. Montrez que $\mathcal{L}^\vee$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1 et que le morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{L}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L} \to \mathcal{O}_X$ donné par $(\varphi, s) \mapsto \varphi(s)$ est un isomorphisme.

(2) Montrez qu'en associant à une section f de $\mathcal{O}_X$ la multiplication par f dans $\mathcal{L}$, on obtient un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{O}_X \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ et un isomorphisme de faisceaux abéliens $\mathcal{O}_X^* \to \mathcal{A}ut_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L})$.

(3) Soit $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$. Montrez que $X_s := \{\, x \in X \,,\, s_x \neq 0 \text{ dans } \mathcal{L}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \,\}$ est un ouvert de X.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel de dimension $n+1$ sur un corps k et $\mathbb{P}(E)$ l'espace projectif correspondant (notation de Grothendieck). Démontrez que pour tout k-schéma X, on a une bijection :

$$\mathrm{Hom}_k(X, \mathbb{P}(E)) \to \left\{\text{morphismes surjectifs de } \mathcal{O}_X\text{-modules } E \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{\varphi} \mathcal{L} \text{ avec } \mathcal{L} \text{ inversible}\right\} / \sim$$

où deux couples $(\mathcal{L}, \varphi)$ et $(\mathcal{L}', \varphi')$ sont équivalents ssi il existe un isomorphisme $\tau : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$ tel que $\varphi' = \tau \circ \varphi$.

Exercice 4 Soit k un corps et E la k-courbe elliptique d'équation

$$F(u, v, w) = v^2 w + (a_1 u + a_3 w) v w - (u^3 + a_2 u^2 w + a_4 u w^2 + a_6 w^3) = 0$$

dans le plan projectif de coordonnées homogènes $(u : v : w)$.

(1) Montrez que E est recouverte par les ouverts $U = D_+(w)$ et $V = D_+(v)$.

(2) Montrez que $\Omega^1_{U/k}$ est libre engendré par $\omega = \frac{dx}{2y + a_1 x + a_3}$, où $x = u/w$, $y = v/w$.

(3) Montrez que $\Omega^1_{V/k}$ est libre engendré par $\omega' = \frac{dz}{a_1 z - (3t^2 + 2a_2 tz + a_4 z^2)}$, où $t = u/v$, $z = w/v$.

(4) Montrez que $\omega \in \Gamma(E, \Omega^1_{E/k})$ et que $\Omega^1_{E/k} = \omega \mathcal{O}_E$.