TD - Feuille 1

Corrigé ex. 1 (1) On utilise la première suite exacte fondamentale :

$$f^*\Omega^1_{\mathbb{A}^1_k/k} \to \Omega^1_{\mathbb{A}^2_k/k} \to \Omega^1_f \to 0\ .$$

Tous les schémas sont affines : posons $A = k[t]$, $B = k[x,y]$, $f^\sharp : A \to B$ donné par $t \mapsto y^2 - x^3$. La suite exacte ci-dessus est déterminée par la suite exacte de modules sur $B = k[x,y]$:

$$Bdt \to Bdx \oplus Bdy \to \Omega^1_f \to 0$$

où $dt \mapsto 2ydy - 3x^2dx$. On trouve $\Omega^1_f = \frac{Bdx \oplus Bdy}{2ydy - 3x^2dx}$.

(2) On utilise la seconde suite exacte fondamentale :

$$\mathcal{C}_{C/\mathbb{A}^2_k} \to i^*\Omega^1_{\mathbb{A}^2_k/k} \to \Omega^1_{C/k} \to 0$$

où $\mathcal{C}$ désigne le faisceau conormal, et $i : C \to \mathbb{A}^2_k$ l'immersion fermée. Notons I l'idéal engendré par $y^2 - x^3$ dans B, on obtient la suite exacte de $C = B/I$-modules :

$$I/I^2 \to Cdx \oplus Cdy \to \Omega^1_{C/k} \to 0\ .$$

La flèche $I/I^2 \to Cdx \oplus Cdy$ est donnée par $y^2 - x^3 \mapsto 2\overline{y}dy - 3\overline{x}^2dx$ (on note avec une barre les images dans C). On trouve $\Omega^1_{C/k} = \frac{Cdx \oplus Cdy}{2\overline{y}dy - 3\overline{x}^2dx}$.

Corrigé ex. 2 Si ℓ/k est une extension séparable, elle est monogène (théorème de l'élément primitif). Donc $\ell = k[x]/(P)$ pour un certain polynôme P. Alors, $\Omega^1_{\ell/k} = \ell dx/(P'(x)dx)$. Comme P est séparable, P' et P sont premiers entre eux, ou dit autrement $P'(x)$ est inversible dans $k[x]/(P)$. Il en résulte que $\Omega^1_{\ell/k} = 0$.

Si ℓ/k n'est pas séparable, il existe une sous-extension monogène et inséparable $m \subset \ell$. La première suite exacte fondamentale donne

$$\Omega^1_{m/k} \otimes \ell \to \Omega^1_{\ell/k} \to \Omega^1_{\ell/m} \to 0\ .$$

Par ailleurs $\ell = m[x]/(P)$ pour un certain polynôme inséparable P. On a donc $P' = 0$ puis $\Omega^1_{\ell/m} = \ell \neq 0$. Comme $\Omega^1_{\ell/k}$ a une surjection vers $\Omega^1_{\ell/m}$, on a $\Omega^1_{\ell/k} \neq 0$.

Corrigé ex. 3 (1) La notation de Grothendieck est celle pour laquelle, lorsque le corps de base est algébriquement clos, l'ensemble des points fermés de $\mathbb{P}(E)$ est l'ensemble des hyperplans linéaires (et non des droites) de E. En termes de schémas, on a $\mathbb{P}(E) = \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(E))$ où $\mathrm{Sym}(E) = \oplus_{i\geq 0} E^{\otimes i}$ est l'algèbre symétrique de E. Le schéma $\mathbb{P}(E)$ est muni d'un faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$ tel que $\Gamma(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}(1)) = E$, et d'un morphisme surjectif $E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \twoheadrightarrow \mathcal{O}(1)$. (Sur tout schéma X, on note $E \otimes \mathcal{O}_X$ le fibré vectoriel trivial dont chaque fibre est E.)

La propriété universelle est la suivante. Pour tout schéma X, tout faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X et tout morphisme surjectif de fibrés $\varphi : E \otimes \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow \mathcal{L}$, il existe un unique morphisme de schémas $f : X \to \mathbb{P}(E)$ tel que $\mathcal{L} \simeq f^*\mathcal{O}(1)$; deux couples $(\mathcal{L}, \varphi)$ et $(\mathcal{L}', \varphi')$ tels qu'il existe un isomorphisme $\tau : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ avec $\varphi' = \tau \circ \varphi$ donnent lieu au même morphisme f.

Réciproquement, si $f : X \to \mathbb{P}(E)$ est un morphisme, posons $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}(1)$. En tirant la surjection $E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \to \mathcal{O}(1)$ en arrière via f, on obtient un morphisme surjectif $\varphi : E \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$.

(2) Sur un ouvert U, l'évaluation $E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \to \mathcal{O}(1)$ envoie $\sum x_i \otimes f_i$, où les f_i sont des fonctions de $\mathbb{P}(E)$ sur U, sur $\sum x_{i|U} f_i$. Un élément de $\mathcal{K}(U)$ est donc tel que $\sum x_{i|U} f_i = 0$. L'étoile doit donc vérifier

$$\sum_{k \neq i} x_k \frac{g_k}{x_i} \ + \ x_i * = 0 \quad , \quad \text{donc} \quad * = -\frac{1}{x_i^2} \sum_{k \neq i} x_k g_k \ .$$

(3) Il s'agit de vérifier que φ_i et φ_j coïncident sur $U_i \cap U_j$. Or sur $U_i \cap U_j$ on a

$$\sum_{k \neq i} dx_{k/i} \otimes g_k = \sum_{k \neq i} d\tfrac{x_{k/j}}{x_{i/j}} \otimes g_k = \sum_{k \neq i} \tfrac{x_{i/j} dx_{k/j} - x_{k/j} dx_{i/j}}{x_{i/j}^2} \otimes g_k$$

$$= \sum_{k \neq i,j} \tfrac{dx_{k/j}}{x_{i/j}} \otimes g_k \ - \ \sum_{k \neq i} \tfrac{x_{k/j} dx_{i/j}}{x_{i/j}^2} \otimes g_k = \sum_{k \neq i,j} dx_{k/j} \otimes \tfrac{g_k}{x_{i/j}} \ - \ dx_{i/j} \otimes \sum_{k \neq i} \tfrac{x_{k/j}}{x_{i/j}^2} g_k \ .$$

Par φ_j cet élément est envoyé sur un élément dont on va calculer la composante sur $x_k \otimes$.

Si $k \neq i, j$ la composante est $\frac{g_k}{x_{i/j} x_j} = \frac{g_k}{x_i}$.

Si $k = i$ la composante est

$$-\sum_{k \neq i} \frac{x_{k/j} g_k}{x_{i/j}^2 x_j} = -\frac{1}{x_i^2} \sum_{k \neq i} x_k g_k \ .$$

Si $k = j$ la composante est 0. On voit donc que l'image de $\sum dx_{k/i} \otimes g_k$ par φ_i et φ_j est la même, donc ces morphismes se recollent. Sur chaque ouvert U_i il est clair que φ_i est un isomorphisme, donc le morphisme φ obtenu par recollement est un isomorphisme.

Corrigé ex. 4 Pour l'application à la suite exacte d'Euler, on n'a besoin que du cas $r = 1$. Dans ce cas, les notations sont significativement plus simples, donc si vous n'aviez pas fait l'exercice, je vous encourage a réécrire la preuve ci-dessous dans le cas $r = 1$.

Une façon de voir que les $d_V\sigma$ se recollent est de vérifier que $d_V\sigma$ ne dépend pas de la trivialisation choisie pour $\mathcal{F}$ sur V. En effet, si tel est le cas, étant donné un autre ouvert W avec une trivialisation de $\mathcal{F}$ sur W, alors sur l'ouvert $V \cap W$ on a deux trivialisations de $\mathcal{F}$ (celle provenant de V, et celle provenant de W), et donc $(d_V\sigma)_{|V \cap W}$ et $(d_W\sigma)_{|V \cap W}$ coïncident donc se recollent sur $V \cup W$.

Si on a une autre trivialisation donnée par des générateurs t'_j, alors il existe une matrice M inversible à coefficients $m_{i,j} \in \mathcal{O}_X(V)$ telle que $t = Mt'$ où $t = (t_1, \ldots, t_r)$. On a donc

$$t_i = \sum_{j=1}^r m_{i,j} t'_j \quad \text{puis} \quad \sigma_i = \sum_{j=1}^r \sigma_{ij} t_j = \sum_{k=1}^r \underbrace{\sum_{j=1}^r \sigma_{ij} m_{j,k}}_{\sigma'_{i,k}} \ t'_k \ .$$

L'expression $(d_V\sigma)_{t'}$ associée à la trivialisation de générateurs t' est :

$$(d_V\sigma)_{t'} = \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^n d\sigma'_{i,k} \otimes f_i t'_k = \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^n \big(\sum_{j=1}^r \sigma_{ij} dm_{j,k} + m_{j,k} d\sigma_{ij} \big) \otimes f_i t'_k$$

$$= \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} f_i dm_{j,k} \otimes t'_k \ + \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} d\sigma_{ij} \otimes f_i \sum_{k=1}^{r} m_{j,k} t'_k$$

Comme l'image de σ dans $\mathcal{F}$ est nulle, on a $\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} f_i = 0$ pour tout j. De plus $\sum_{k=1}^{r} m_{j,k} t'_k = t_j$ donc on trouve finalement $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} d\sigma_{ij} \otimes f_i t_j$ c'est-à-dire $(d\sigma)_t$. On a montré que $d_V\sigma$ ne dépend pas de la trivialisation locale, donc par recollement on obtient $d\sigma$.

Pour le fibré en droites $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$ sur l'espace projectif, cette construction fournit un morphisme $\mathcal{K} \to \Omega^1_{\mathbb{P}(E)/k}(1)$. Il est facile de voir directement que c'est un isomorphisme. De manière alternative, on peut vérifier que ce morphisme est un inverse pour l'application définie dans l'exercice précédent.