TD - Feuille 6

Corrigé ex. 1 (1) L'origine de $\mathbb{A}_k^n$ est définie par l'idéal maximal $(x_1, \ldots, x_n)$.

Donnons d'abord des équations pour l'éclatement dans chaque ouvert standard de $\mathbb{P}_k^n$. Plus précisément, notons $(u_1 : \cdots : u_n)$ des coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}_k^{n-1}$, $U_i = \{u_i \neq 0\}$ l'ouvert standard. On peut choisir un ouvert judicieux de $\mathbb{A}_k^n$: prenons $V_i = \{x_i \neq 0\}$. On voit que le morphisme $\Gamma : V_i \to \mathbb{A}_k^n \times U_i$ se factorise par $V_i \times U_i$, et il est donné par $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, \frac{u_1}{u_i} = \frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{u_n}{u_i} = \frac{x_n}{x_i})$. Sur les anneaux de fonctions cela donne :

$$\begin{array}{rcl} k\left[x_1, \ldots, x_n, \frac{u_1}{u_i}, \ldots, \frac{u_n}{u_i}\right] & \to & k\left[x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{x_i}\right] \\ x_k & \mapsto & x_k \\ \frac{u_k}{u_i} & \mapsto & \frac{x_k}{x_i} \; . \end{array}$$

Le noyau est engendré par les $x_k - (u_k/u_i)x_i$, ce qui donne des équations pour l'éclatement dans $\mathbb{A}_k^n \times U_i$.

Pour donner des équations globales dans $\mathbb{A}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1}$, il faut donner des équations en $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n$ qui soient homogènes en $u_1, \ldots, u_n$. Il est clair d'après ce qui précède que les équations sont $x_k u_i = x_i u_k$, pour tous i, k.

Pour la fibre au-dessus de l'origine, tous les x_k sont nuls et les équations sont toutes satisfaites ; donc $\pi^{-1}(\{0\}) = \{0\} \times \mathbb{P}_k^{n-1}$.

(2) Soit $f = y^2 - x^2(x+1)$ et $A = k[x,y]/(f)$. On éclate le point O d'idéal (x, y), l'ouvert $C \setminus \{O\}$ est affine d'anneau $A[1/x]$. Léclatement est un sous-schéma de $C \times \mathbb{P}_k^1$ que l'on recouvre à l'aide des deux cartes standard de $\mathbb{P}_k^1$. Soient $(u : v)$ des coordonnées homogènes de $\mathbb{P}_k^1$. Dans la carte $\{u \neq 0\}$ on prend la coordonnée affine $s = v/u$. Le morphisme d'anneaux correspondant au graphe Γ est le morphisme $k[x,y,s]/(f) \to k[x,y,1/x]/(f)$ qui envoie s sur y/x. Le calcul du noyau présente une subtilité car il est clair que $y - xs$ est dans le noyau, mais *à cause de la localisation en x, tous les éléments de $k[x,y,s]/(f, y-xs)$ annulés par une puissance de x sont dans le noyau.* Ainsi en faisant $y = xs$ dans f on obtient $x^2(s^2 - (x+1))$ et donc $s^2 - (x+1)$ est dans le noyau. (Ce qui se vérifie immédiatement.) Finalement, dans cette carte l'éclatement s'exprime en coordonnées (x, s) par l'équation $s^2 = (x+1)$.

Dans la carte $\{v \neq 0\}$ on prend la coordonnée affine $t = u/v$ et on trouve après calcul l'équation $1 = t^2(ty+1)$ en coordonnées (y, t).

La fibre au-dessus de l'origine est incluse dans les deux cartes de l'éclatement, il s'agit de deux points de coordonnées $s = \pm 1$ dans la première carte et $t = \pm 1$ dans la deuxième carte.

(3) La complétée projective $\mathcal{C}$ a pour équation $y^2 z - x^2(x+z)$ que l'on note encore f. (Attention : maintenant x, y, z sont des coordonnées *homogènes.*) L'éclatement est dans $\mathcal{C} \times \mathbb{P}_k^1 \subset \mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}_k^1$ qu'il faut mettre dans un espace projectif. On utilise le plongement de Segre : $\mathbb{P}_k^2 \times \mathbb{P}_k^1 \to \mathbb{P}_k^5$ qui envoie $((x:y:z),(u:v))$ sur $(xu : xv : yu : yv : zu : zv)$. Si on note $(a:b:c:d:e:f)$ des coordonnées dans $\mathbb{P}_k^5$, les équations de ce plongement sont $ad = bc$, $af = be$, $cf = de$ (on en aura besoin pour donner des équations de l'éclatement). Le morphisme graphe qui sert à définir l'éclatement envoie $(x:y:z)$ sur $((x:y:z),(u=x, v=y))$ dans $\mathcal{C} \times \mathbb{P}_k^1$. On obtient en particulier l'équation $b = c$ dans $\mathbb{P}_k^5$ donc on se retrouvera en fait dans l'hyperplan $\{c = b\} \simeq \mathbb{P}_k^4$. La relation $f = 0$ donne deux relations supplémentaires :

$$\text{si } u \neq 0 : \; c^2 e = a^2(a+e), \text{ et si } v \neq 0 : \; d^2 f = b^2(b^2 + f).$$

On obtient finalement les cinq équations en coordonnées homogènes $(a:b:d:e:f)$:

$$ad = b^2 \quad , \quad af = be \quad , \quad bf = de \quad , \quad b^2e = a^2(a+e) \quad , \quad d^2 f = b^2(b^2+f)\ .$$

(4) Il suffit de démontrer que π est un isomorphisme au-dessus d'un voisinage de tout point $x \in X \setminus Y$. Comme π ne dépend pas du choix de U et de $f_1, \dots, f_n$ on peut choisir pour U un voisinage de x disjoint de Y. L'application Γ_f est bien définie partout sur U et réalise une immersion fermée $U \hookrightarrow U \times \mathbb{P}^{n-1}_k$, l'image étant définie en coordonnées $(x,p) \in U \times \mathbb{P}^{n-1}_k$ par $f(x) = p$. Donc l'image schématique est isomorphe à U et Γ_f est un isomorphisme au-dessus de U.

Corrigé ex. 2 (1) Posons $X = \nu_d(\mathbb{P}^n)$, on va calculer le polynôme de Hilbert P_X. Il s'agit de trouver la dimension de l'espace des polynômes homogènes restreints à X de degré m sur $\mathbb{P}^N$. Or un polynôme de degré m sur $\mathbb{P}^N$ se restreint en un polynôme de degré dm sur $\mathbb{P}^n$, donc

$$h_X(m) = \binom{n+dm}{dm} = \frac{1}{n!}(dm+n)(dm+n-1)\dots(dm+1) = \frac{1}{n!}(dm)^n + \dots$$

(La fonction de Hilbert est ici un polynôme donc $P_X = h_X$.) Le degré est d^n.
(2) Il est clair que H est la préimage par ν_d d'un (unique) hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathbb{P}^N$. Le complémentaire de H dans $\mathbb{P}^n$ est la préimage par ν_d du complémentaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{P}^N$ qui est un ouvert affine. Comme ν_d est une immersion fermée (donc un morphisme affine), cette préimage est un fermé d'un ouvert affine donc affine.

Corrigé ex. 3 (1) Soit $(u:v)$ des coordonnées dans $X = \mathbb{P}^1_R$. On utilisera le plongement de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ donné par $((u:v),(x:y)) \mapsto (a:b:c:d) = (ux:uy:vx:vy)$. L'équation de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^3$ est $ad = bc$. On peut supposer que le point qu'on éclate est défini dans la carte $v \neq 0$ par l'idéal $(u/v, \pi)$ donc le morphisme graphe qui définit l'éclatement est $X \to X \times \mathbb{P}^1$, $(u:v) \mapsto ((u:v),(x:y) = (u:\pi v))$. On voit que l'équation $\pi v x = uy$ donne $\pi c = b$ dans $\mathbb{P}^3$. Finalement les équations pour $\widetilde{X}$ dans $\mathbb{P}^3$ sont $ad = bc$ et $\pi c = b$. On a bien la conique plane $ad = \pi c^2$.
(2) La fibre fermée a pour équation $ad = 0$, c'est une réunion de deux $\mathbb{P}^1$ se coupant en un point. Elle est singulière.