TD - Feuille 6

Dans cette feuille on illustre les utilisations de quelques plongements projectifs classiques. Ce thème est aussi le prétexte pour introduire la notion d'éclatement.

Exercice 1 *Éclatement d'un sous-schéma fermé $Y \subset X$.* Soit k un corps et X un k-schéma de type fini, supposé réduit pour simplifier. Soit $Y \subset X$ un sous-schéma fermé. L'éclatement de Y dans X est un morphisme $\pi : \widetilde{X} \to X$ défini comme suit. On choisit des sections $f_1, \dots, f_n$ du faisceau d'idéaux de Y sur un ouvert dense $U \subset X$, on pose $U^* = U \setminus U \cap Y$ et on considère le morphisme

$$f : U^* \to \mathbb{P}_k^{n-1}$$

qui envoie x sur $(u_1 : \cdots : u_n) = (f_1(x) : \cdots : f_n(x))$. Le graphe de f est le morphisme

$$\Gamma_f = \mathrm{Id} \times f \ : U^* \to U^* \times \mathbb{P}_k^{n-1} \subset X \times \mathbb{P}_k^{n-1}$$

et on note $\widetilde{X}$ l'image schématique de Γ_f dans $X \times \mathbb{P}_k^{n-1}$. Le morphisme $\pi : \widetilde{X} \to X$ est la projection sur le premier facteur. On admet que l'éclatement est indépendant du choix de U et de $f_1, \dots, f_n$.

(1) Calculez l'éclatement de l'origine dans $\mathbb{A}_k^n$, en regardant $\mathbb{A}_k^n$ comme une variété au sens classique ou au sens des schémas, selon votre préférence. Donnez des équations globales pour l'éclatement dans $\mathbb{A}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1}$. Calculez la fibre au-dessus de l'origine (on suppose que la caractéristique de k n'est pas 2).
(2) Calculez l'éclatement de la courbe affine C d'équation $y^2 = x^2(x+1)$ en l'origine, en donnant deux cartes affines. Calculez la fibre au-dessus de l'origine.
(3) On considère la complétée projective $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_k^2$ de la courbe précédente. Donnez un plongement projectif de l'éclatement de $\mathcal{C}$ en l'origine, avec des équations homogènes explicites, sans chercher à prouver qu'elles engendrent bien l'idéal homogène de $\mathcal{C}$.
(4) En toute généralité, justifiez le fait que $\pi : \widetilde{X} \to X$ est un isomorphisme au-dessus de $X \setminus Y$.

Exercice 2 *Plongement de Veronese.* Soit $N + 1 = \dim_k \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}(d)) = \binom{n+d}{d}$ et soient $M_0, \dots, M_N$ les monômes de degré d en $n+1$ variables $x_0, \dots, x_n$. Soit $\nu_d : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ le plongement de Veronese d-uple, qui envoie le point $a = (a_0, \dots, a_n)$ sur $(M_0(a), \dots, M_n(a))$. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

(1) Calculez le degré de $\nu_d(\mathbb{P}^n)$ dans $\mathbb{P}^N$.
(2) Soit $H \subset \mathbb{P}^n$ une hypersurface donnée par une équation homogène $f(x_0, \dots, x_n) = 0$ de degré d. Montrer que $\mathbb{P}_k^n \setminus H$ est un schéma affine.

Exercice 3 *Éclatement dans une fibration.* La définition d'un éclatement n'utilise pas le fait que l'anneau de base k est un corps. Prenons pour anneau de base un anneau de valuation discrète R, d'uniformisante π, de corps des fractions K et de corps résiduel $k = R/(\pi)$. Soit $X = \mathbb{P}_R^1$ la droite projective sur R, et $\mathbb{P}_K^1$ resp. $\mathbb{P}_k^1$ la fibre ouverte resp. fermée de la projection $p : \mathbb{P}_R^1 \to \mathrm{Spec}(R)$.

(1) Calculez l'éclatement $\widetilde{X} \to X$ en un point de la fibre fermée, comme sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_R^3$. Montrez que $\widetilde{X}$ est une conique plane.
(2) Montrez que la fibre fermée de $\widetilde{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ n'est pas lisse.