TD - Feuille 5

Corrigé ex. 1 On notera parfois $X = \mathbb{A}^n_k$ et $A = k[x_1, \dots, x_n]$.
(1) Comme $\mathbb{A}^n_k$ est affine, $\mathcal{L}$ est de la forme $\widetilde{M}$ pour un certain A-module M. Clairement $M \neq 0$, donc il existe $m \neq 0$ dans M, qui donne une section non nulle σ de $\mathcal{L}$.
(2) Il existe un recouvrement de $\mathbb{A}^n_k$ par n ouverts $U_i = D(f_i)$ tels que $\mathcal{L}_{|U_i}$ est engendré par une section t_i, donc $\mathcal{L}^*_{|U_i}$ est engendré par une section : la forme δ_i telle que $\delta_i(t_i) = 1$. Donc $\mathcal{I}_{|U_i}$ est engendré par $\mathrm{ev}_\sigma(\delta_i)$. La propriété de faisceau pour $\mathcal{I}$ pour ce recouvrement peut s'écrire :

$$\mathcal{I}(X) \to \prod_i \mathcal{I}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{I}(U_i \cap U_j)$$

et $\mathcal{I}(X) = I$, $\mathcal{I}(U_i) = IA[1/f_i]$. Comme tous les $IA[1/f_i]$ sont inclus dans le corps de fractions de A, on obtient finalement :

$$I = IA[1/f_1] \cap \cdots \cap IA[1/f_n] \ .$$

On utilise maintenant le fait que A est factoriel et que donc une intersection d'idéaux principaux est un idéal principal. Plus précisément on choisit un générateur g_i de $IA[1/f_i]$ qui soit dans A, non divisible par f_i. On note g le ppcm des g_i. Alors

$$I = IA[1/f_1] \cap \cdots \cap IA[1/f_n] = (IA[1/f_1] \cap A) \cap \cdots \cap (IA[1/f_n] \cap A) = g_1 A \cap \cdots \cap g_n A = gA \ .$$

(3) Par définition de l'image d'un morphisme de faisceaux, le morphisme $\mathrm{ev}_\sigma : \mathcal{L}^* \to \mathcal{O}_X$ se factorise par $P\mathcal{O}_X$ ([1]). Donc il existe un morphisme $t : \mathcal{L}^* \to \mathcal{O}_X$, tel que $\mathrm{ev}_\sigma = Pt$. Par bidualité $((\mathcal{L}^*)^* \simeq \mathcal{L})$, ce morphisme définit une section τ de $\mathcal{L}$ telle que $t = \mathrm{ev}_\tau$. Il est clair que $P\tau = \sigma$. De plus, en tout point $x \in X$, l'image de $(\mathrm{ev}_\sigma) \otimes \mathcal{O}_{X,x}$ est $P_x\mathcal{O}_{X,x}$, donc l'image de $(\mathrm{ev}_\tau) \otimes \mathcal{O}_{X,x}$ est $\mathcal{O}_{X,x}$, donc l'image de $(\mathrm{ev}_\tau) \otimes k(x)$ est $k(x)$. En particulier $\tau \otimes k(x) \neq 0$.
(4) On définit un morphisme $a : \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$ par $1 \mapsto \tau$. Comme $\tau \otimes k(x)$ est surjectif pour tout $x \in X$, par Nakayama $a \otimes \mathcal{O}_{X,x}$ est surjectif donc un isomorphisme (morphisme surjectif entre deux modules libres de même rang), donc a est un isomorphisme.

Corrigé ex. 2 (1) $U_i \simeq \mathbb{A}^n_k$ donc il existe un isomorphisme $c_i : \mathcal{L}_{|U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}$.
(2) L'anneau de fonctions de $U_i \cap U_j$ est $k\left[x_0, \dots, x_n, \frac{1}{x_i}, \frac{1}{x_j}\right]_{(0)}$, anneau des éléments de degré 0 dans $k[x_0, \dots, x_n, \frac{1}{x_i}, \frac{1}{x_j}]$. Ses unités sont donc les fractions rationnelles de degré 0 dont le numérateur et le dénominateur ont pour seuls facteurs x_i et x_j. D'où le résultat.
(3) Posons $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$. On reprend les trivialisations $c_i : \mathcal{L}_{|U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}$ et on note les changements de cartes

$$\varphi_{ij} = (c_{j|U_{ij}}) \circ (c_{i|U_{ij}})^{-1} : \mathcal{O}_{U_i|U_{ij}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_j|U_{ij}} \ .$$

On note qu'un tel isomorphisme est simplement donné par une section inversible de $\mathcal{O}_{U_{ij}}$, donc d'après la question (2) on a $\varphi_{ij} = \alpha_{ij}(x_i/x_j)^{l_{ij}}$. La condition de cocycle est la compatibilité $\varphi_{ik} = \varphi_{jk}\varphi_{ij}$ sur les intersections triples U_{ijk}, ce qui donne

$$\alpha_{ik}(x_i/x_k)^{l_{ik}} = \alpha_{jk}(x_j/x_k)^{l_{jk}}\alpha_{ij}(x_i/x_j)^{l_{ij}} = \alpha_{jk}\alpha_{ij}(x_j/x_k)^{l_{jk}}(x_i/x_j)^{l_{ij}} \ .$$

[1]Attention : je rappelle que pour un morphisme de faisceaux $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, le préfaisceau $\mathcal{H}$ défini par $\mathcal{H}(U) = \mathrm{im}(f(U))$ n'est pas un faisceau en général. Le faisceau image de f est le faisceau associé : $\mathrm{im}(f) := \mathcal{H}^+$. On a une factorisation de f par $\mathcal{H}^+$ mais il n'est pas vrai en général que $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{H}^+(U)$ est surjectif. En revanche l'inclusion $\mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathcal{H}^+ \otimes \mathcal{O}_{X,x}$ pour tout $x \in X$, donc $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{H}^+ \otimes \mathcal{O}_{X,x}$ est surjectif pour tout $x \in X$.

L'égalité des degrés en x_i impose $l_{ik} = l_{ij}$ donc l_{ij} est indépendant de j. L'égalité des degrés en x_k impose $l_{ik} = l_{jk}$ donc l_{ij} est indépendant de i. Finalement $l_{ij} = l$ indépendant de i et j. Enfin, comme $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n_k, k^*) = 0$ (ceci provient du fait que la cohomologie de Zariski des faisceaux constants est nulle), il existe des constantes $\beta_i \in k^*$ telles que $\alpha_{ij} = \beta_i/\beta_j$. Alors on voit que si on pose $c_i' = c_i/\beta_i$ on a des changements de cartes $\varphi'_{ij} = \alpha_{ij}^{-1}\varphi_{ij} = (x_i/x_j)^{l_{ij}}$.
(4) Le faisceau inversible $\mathcal{O}(l)$ est celui qui est déterminé par les fonctions de transition $(x_i/x_j)^l$ sur $U_i \cap U_j$. L'application $\mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_k)$ donnée par $l \mapsto \mathcal{O}(l)$ envoie 0 sur $\mathcal{O}(0) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$, et c'est un morphisme de groupes car il est facile de voir que quand on prend le produit tensoriel de faisceaux inversibles, les fonctions de transition se multiplient. On a montré dans les questions précédentes que ce morphisme est surjectif. Calculons son noyau. Si $l > 0$ le faisceau $\mathcal{O}(l)$ possède une section non constante définie par $s_{|U_i} = (x_0/x_i)^l$, donc $\mathcal{O}(l)$ n'est pas trivial (car les seules sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$ sont les constantes). Si $l < 0$ le faisceau $\mathcal{O}(-l)$ possède une section non constante, donc $\mathcal{O}(-l)$ n'est pas trivial. Donc $\mathcal{O}(l)$ trivial implique $l = 0$. En conséquence le morphisme $\mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_k)$ est injectif, donc un isomorphisme.

Corrigé ex. 3 Les morphismes canoniques α, γ proviennent du fait que $f \notin p$, et les morphismes β, δ sont les morphismes de réduction modulo l'idéal maximal pA_p. (Notez que de manière générale, pour M un A-module et $I \subset A$ un idéal, on a $M \otimes_A A/I \simeq M/IM$.) Fixons une fois pour toutes une base $e_1, \dots, e_n$ du $A[\frac{1}{f}]$-module libre $A[\frac{1}{f}]^n$. Les images des e_i dans $(A_p)^n$ et $k(p)^n$ donnent des bases dans ces modules libres ; on les notera encore e_i quand il n'y aura pas de confusion possible.
(1) Le morphisme $M_p \to M \otimes k(p) \simeq M_p/pM_p$ est surjectif. On peut donc choisir un relevé $x_i \in M_p$ de chaque $\varphi(e_i)$ (il faudrait écrire $(\varphi\beta\alpha)(e_i)$...). Ceci définit un morphisme $\psi\colon (A_p)^n \to M_p$ par $\psi(e_i) = x_i$. Soit $K = \mathrm{coker}(\psi)$. Comme le produit tensoriel est exact à droite (i.e. il préserve les coker), on a $K \otimes k(p) \simeq \mathrm{coker}(\psi \otimes k(p)) = \mathrm{coker}(\varphi) = 0$. Par Nakayama, $K = 0$ donc ψ est surjectif.
(2) On a $x_i = \frac{m_i}{s_i}$ avec $m_i \in M$ et $s_i \in A$, $s_i \notin p$. Posons $f = s_1 \dots s_n$, il est clair que x_i provient d'un élément $y_i \in M[\frac{1}{f}]$ (qui s'écrit encore $y_i = \frac{m_i}{s_i}$, avec les abus de notations évidents). Donc on peut définir $\chi\colon A[\frac{1}{f}]^n \to M[\frac{1}{f}]$ par $\chi(e_i) = y_i$. Il reste à faire en sorte que χ soit surjectif. Soient $\mu_1, \dots, \mu_r$ des générateurs de M, alors leurs images dans $M[\frac{1}{f}]$ engendrent ce dernier. On note encore μ_k (au lieu de $\mu_k/1$) les images dans $M[\frac{1}{f}]$ (et dans M_p). Il suffira que μ_i soit dans l'image de χ pour que χ soit surjectif. Or, comme ψ est surjectif, on peut écrire dans M_p

$$\mu_k = \psi\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_{k,i}}{t_{k,i}} e_i\right)$$

pour des éléments $a_{k,i} \in A$ et $t_{k,i} \notin p$. Il est clair que si on multiplie f par le produit des $t_{k,i}$ ($1 \le k \le r$, $1 \le i \le n$) alors toutes les égalités écrites ont un sens dans les localisés par rapport à f, à la place des localisés par rapport à $A \setminus p$. En d'autres termes, $\mu_k = \chi\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_{k,i}}{t_{k,i}} e_i\right)$ dans $M[\frac{1}{f}]$.

Concluons : pour tout q dans l'ouvert $U = D(f)$, en tensorisant par le corps résiduel $k(q)$ on voit que $\chi \otimes k(q)$ est surjectif, donc $d(q) = \dim_{k(q)}(M \otimes_A k(q)) \le n$. Par conséquent $\{p \in \mathrm{Spec}(A)\,;\, d(p) \le n\}$ est ouvert, donc $\{p \in \mathrm{Spec}(A)\,;\, d(p) \ge n+1\}$ est fermé, ce qu'on voulait.