TD - Feuille 5

Rappel : Soit X une variété sur un corps k. Un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1 est aussi appelé $\mathcal{O}_X$-module inversible, ou fibré en droites. Si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites, le fibré $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ est encore un fibré en droites noté $\mathcal{L}^*$ ou $\mathcal{L}^{-1}$ et appelé l'inverse de $\mathcal{L}$. Le groupe de Picard de X est l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur X, muni du produit induit par le produit tensoriel.

Exercice 1 *Groupe de Picard de l'espace affine.* Soit k un corps et soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur $\mathbb{A}^n_k$.
(1) Justifier que $\mathcal{L}$ possède une section non nulle σ.
(2) Soit $\mathrm{ev}_\sigma : \mathcal{L}^* \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_k}$, $u \mapsto u(\sigma)$ le morphisme d'évaluation, $\mathcal{I}$ le faisceau image, $I = \Gamma(\mathbb{A}^n_k, \mathcal{I})$. En écrivant la propriété de faisceau pour un recouvrement bien choisi de $\mathbb{A}^n_k$, montrez que I est principal.
(3) Soit P un générateur de I, montrez que σ/P est une section partout non nulle de $\mathcal{L}$ (ce qui veut dire non nulle dans chaque corps résiduel $k(x)$).
(4) En utilisant le lemme de Nakayama rappelé ci-dessous, déduisez-en que $\mathrm{Pic}(\mathbb{A}^n_k) = 0$.

Rappel : Théorème (Lemme de Nakayama) *Soit A un anneau et $I \subset A$ un idéal. Soit M un A-module fini. Si $M = IM$, alors il existe $a \in A$ avec $a \equiv 1 \mod I$, tel que $aM = 0$. En particulier, si A est local d'idéal maximal m, alors $M = mM$ implique $M = 0$.*

Exercice 2 *Groupe de Picard de l'espace projectif.* Soit k un corps et soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur $\mathbb{P}^n_k = \mathrm{Proj}(k[x_0, \ldots, x_n])$.
(1) En utilisant l'exercice précédent, montrez que $\mathcal{L}$ est trivial sur les ouverts standard U_i de $\mathbb{P}^n_k$.
(2) Montrez que les fonctions inversibles sur $U_i \cap U_j$ sont de la forme $\alpha_{ij}(x_i/x_j)^{l_{ij}}$ avec $\alpha_{ij} \in k^*$ et $l_{ij} \in \mathbb{Z}$.
(3) À partir de trivialisations de $\mathcal{L}$ sur U_i, utilisez la condition de cocycle pour montrer que la puissance l_{ij} dans le changement de carte est indépendante de (i, j). Admettant que $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n_k, k^*) = 0$, où $k^\times$ est le faisceau constant sur $\mathbb{P}^n_k$, montrer qu'on peut changer les trivialisations initiales pour se ramener à $\alpha_{ij} = 1$.
(4) En déduire que $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}(l)$ pour un $l \in \mathbb{Z}$ puis que $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_k) \simeq \mathbb{Z}$.

Exercice 3 Soit X une variété affine sur un corps k (ou un schéma quelconque) et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. L'objet de cet exercice est de montrer que la fonction $d\colon X \to \mathbb{N}$ définie par $d(x) = \dim_{k(x)}(\mathcal{F} \otimes k(x))$, est semi-continue supérieurement. (On rappelle que cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{x \in X\,;\, d(x) \geq n\}$ est fermé.) Comme l'assertion est locale sur X, on se ramène au cas $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $\mathcal{F}$ est le module induit par un A-module fini M.

Soit $p \in \mathrm{Spec}(A)$ et $n = d(p)$. On va produire un ouvert $U = D(f) \subset \mathrm{Spec}(A)$ contenant p et tel que $d_{|U} \leq n$. On fixe un isomorphisme $\varphi\colon k(p)^n \to M_p \otimes_{A_p} k(p)$ et un élément $f \notin p$, quelconque pour l'instant. Soit A_p l'anneau local en p et $M_p = M \otimes_A A_p$. On considère le diagramme ci-contre, dans lequel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les morphismes canoniques.

$$\begin{tikzcd}
A[\frac{1}{f}]^n \arrow[r, dotted, "\chi"] \arrow[d, "\alpha"] & M[\frac{1}{f}] \arrow[d, "\gamma"] \\
(A_p)^n \arrow[r, dotted, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & M_p \arrow[d, "\delta"] \\
k(p)^n \arrow[r, "\varphi"] & M \otimes k(p)
\end{tikzcd}$$

(1) Utilisez le lemme de Nakayama pour relever φ en une surjection de A_p-modules $\psi\colon (A_p)^n \to M_p$.

(2) Choisissez f pour que ψ se relève à son tour en un morphisme surjectif $\chi\colon A[\frac{1}{f}]^n \to M[\frac{1}{f}]$. Concluez.