TD - Feuille 4

Exercice 1 *L'anneau local d'un point.* Étant donnés deux points x, y d'un espace topologique X, on dit que x est une *générisation* de y, ou que y est une *spécialisation* de x, si $y \in \overline{\{x\}}$.
(1) Soit X un schéma et $x \in X$ un point. On définit le *schéma local* de X en x par $X_x = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Rappelez la définition de $\mathcal{O}_{X,x}$ et montrez que l'ensemble sous-jacent à X_x s'identifie à l'ensemble des générisations de x.
(2) Soit k un corps, X un k-schéma de type fini, $x \in X$ un point. Montrez que si x est isolé alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est de type fini sur k. Réciproquement, montrez que si $\mathcal{O}_{X,x}$ est de type fini alors $X_x = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ est un point. Concluez à l'aide de (1) que x est isolé dans X.
(3) Montrez que le résultat de (2) est faux si on ne suppose pas que k est un corps.

Remarque. Lors du TD j'ai confondu deux notions qui sont en fait différentes :
- la notion de *point isolé* d'un espace topologique X, i.e. un point qui est *ouvert* dans X,
- la notion de point égal à sa composante connexe, i.e. un point qui est *ouvert et fermé* dans X.

Si un point est égal à sa composante connexe alors il est isolé, mais la réciproque n'est pas vraie, comme le montre le contre-exemple donné dans la question (3) ci-dessous. Pour ce qui concerne la question (2) de l'exercice, on a en fait l'énoncé fort : dans un schéma de type fini X sur un corps k, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est de type fini sur k si et seulement si x est égal à sa composante connexe. Le corrigé ci-dessous le montre.

Corrigé. (1) Par définition $\mathcal{O}_{X,x}$ est la limite inductive du système inductif d'anneaux $(\mathcal{O}_X(U), \mathrm{res}_{V,U} : \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U))$. En termes plus concrets, un élément de $\mathcal{O}_{X,x}$ est une classe déquivalence de couples (U, s) avec $s \in \mathcal{O}_X(U)$, pour la relation : $(U, s) \sim (V, t)$ ssi il existe $W \subset U \cap V$ tel que $s|W = t|W$ (je note $s|W$ au lieu de $\mathrm{res}_{U,W}(s)$). *Ce qu'il est important de savoir c'est que pour tout ouvert affine* $U = \mathrm{Spec}(A)$ *contenant x, on a une identification naturelle* $\mathcal{O}_{X,x} \simeq A_p$ (avec $p \subset A$ l'idéal premier correspondant à x). On sait que le spectre de A_p s'identifie à l'ensemble des premiers $q \subset A$ contenus dans p. Ceci n'est autre que l'ensemble des q tels que $p \in V(q) = \overline{\{q\}}$ (voir l'exercice sur les points fermés), c'est-à-dire l'ensemble des générisations de x.
(2) Si x est isolé alors $\{x\}$ est ouvert dans X ; donc il contient un ouvert affine non vide $U = \mathrm{Spec}(A)$, avec A de type fini, et donc $\{x\} = U = \mathrm{Spec}(A)$ est affine. Par ailleurs $\{x\}$ ne contient qu'un point fermé donc le calcul de l'anneau local donne $A = \mathcal{O}_{X,x}$, qui est donc de type fini.

Réciproquement, si $\mathcal{O}_{X,x}$ est de type fini alors X_x est un k-schéma de type fini donc l'ensemble de ses points fermés est dense. Or X_x n'a qu'un point fermé : x, donc l'adhérence de l'ensemble de ses points fermés est $\{x\}$. Comme l'ensemble sous-jacent à X_x est l'ensemble des générisations de x, en particulier les points génériques des composantes irréductibles de X contenant x sont tous égaux à x. Or la réunion des composantes irréductibles contenant x est égale à la composante connexe de x, donc x est égal à sa propre composante connexe dans X (et en particulier x est isolé dans X).
(3) Nous allons donc donner deux contre-exemples, les deux avec le même anneau de base. Remplaçons le corps k par un anneau de valuation discrète R. Notons K le corps des fractions et π une uniformisante. Soit $X = \mathrm{Spec}(R)$ qui est de type fini sur R (!!). Ce schéma a deux points, un point fermé et un point ouvert (le point générique). Si on prend pour x le point fermé, on a $\mathcal{O}_{X,x} = R$ qui est de type fini, mais x n'est pas ouvert (i.e. n'est pas isolé). Si on prend pour x le point générique, on $\mathcal{O}_{X,x} = K = R[1/\pi]$ est de type fini sur R (engendré par $1/\pi$). Ce point est isolé dans X, mais x n'est pas une composante connexe de X.

Exercice 2 *Schéma réduit.* Soit X un schéma.
(1) Montrez ques les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de X, A est un anneau réduit,
(ii) il existe un recouvrement ouvert affine $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ de X, tel que A_i est réduit pour tout i,
(iii) tous les anneaux locaux de X sont réduits.
(2) Énoncez la propriété universelle du schéma réduit $X_{\text{réd}}$ et démontrez-la.

Corrigé. (1) Je ne donne pas de détails ; l'idée est que le nilradical est inclus dans tous les idéaux premiers, donc lorsqu'on localise A en un idéal premier, il y a "autant" de nilpotents dans A que dans A_p (il n'y en a pas dans le noyau de $A \to A_p$).
(2) On a une immersion fermée canonique $i : X_{\text{réd}} \hookrightarrow X$. La propriété universelle de $X_{\text{réd}}$ est : pour tout schéma réduit Y et tout morphisme $f : Y \to X$, il existe un unique morphisme $f' : Y \to X_{\text{réd}}$ tel que $f = i \circ f'$. Démontrons-la.

Soit un schéma réduit Y et un morphisme $f : Y \to X$. Pour tous ouverts affines $U = \text{Spec}(A) \subset X$ et $V = \text{Spec}(B) \subset f^{-1}(U)$, le morphisme $f|V : V \to U$ est donné par un morphisme d'anneaux $A \to B$. Comme B est réduit, l'image du nilradical de A est nulle donc $A \to B$ se factorise de manière unique en un morphisme d'anneaux $A_{\text{réd}} \to B$. Ceci induit un morphisme $V \to U_{\text{réd}}$. Par unicité, les différents morphismes ainsi construits sur des $V \subset f^{-1}(U)$ variables se recollent en un morphisme $f^{-1}(U) \to U_{\text{réd}}$. Par unicité encore, ces morphismes se recollent en un morphisme $f' : Y \to X_{\text{réd}}$, unique.

Exercice 3 *Exemple d'utilisation du point générique.* Soit k un anneau. Donnez une structure de schéma naturelle à l'ensemble des matrices de taille (n, n) sur k. Démontrez que la matrice correspondant au point générique de ce schéma est semi-simple. Déduisez-en une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

Corrigé. Une matrice de taille (n, n), c'est la donnée de n^2 coefficients dans k, c'est-à-dire un point à coordonnées dans k de l'espace affine $\mathbb{A}_k^{n^2}$. On peut même dire plus, ce qui va préciser le sens du mot "naturellement. Notons $k[T_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n]$ ou plus simplement $k[T_{i,j}]$ l'anneau de polynômes en n^2 variables, alors on a des bijections :

$$\begin{aligned}\{ \text{ Matrices de taille } (n,n) \text{ à coefs. dans } k \ \} \ &\simeq \text{Hom}_{k-Alg}(\ k[T_{i,j}]\ ,\ k\ ) \\ &\simeq \text{Hom}_{k-Sch}(\ \text{Spec}(k)\ ,\ \text{Spec}(k[T_{i,j}]\ )\\ &\simeq \text{Hom}_{k-Sch}(\ \text{Spec}(k)\ ,\ \mathbb{A}_k^{n^2}\ )\ .\end{aligned}$$

Ceci est même vrai après toute extension R/k, c'est-à-dire que

$$\{ \text{ Matrices de taille } (n,n) \text{ à coefs. dans } R \ \} \simeq \text{Hom}_{R-Sch}(\ \text{Spec}(R)\ ,\ \mathbb{A}_R^{n^2}\ )\ ,$$

et les bijections obtenues sont fonctorielles en R. Ainsi les matrices de taille (n, n) à coefficients dans R sont naturellement (fonctoriellement) en bijection avec les R-points de $\mathbb{A}_k^{n^2}$.

Le point générique est le point correspondant à l'idéal $0 \in k[T_{i,j}]$. Son anneau local est le corps de fractions $k(T_{i,j})$, c'est un corps et donc il est égal à son corps résiduel. La matrice correspondant au point générique est celle donnée par le morphisme $\text{Spec}(k(T_{i,j})) \to \mathbb{A}_k^{n^2}$. Ce morphisme est décrit par l'inclusion d'anneaux $k[T_{i,j}] \to k(T_{i,j})$, autrement dit l'image de $T_{i,j}$ est $T_{i,j}$ lui-même, donc la composante (i, j) de la matrice générique est $T_{i,j}$. Pour voir que cette matrice est semi-simple (c'est-à-dire, diagonalisable dans une clôture algébrique de $k(T_{i,j})$) il suffit de montrer que son polynôme caractéristique P est séparable, c'est-à-dire que son discriminant est non nul. Or si on spécialise $T_{i,j} := 0$ si $i \neq j$, on trouve

$$\text{disc}(P)_{|i \neq j \Rightarrow T_{i,j}=0} = \prod_{i,j} (T_{i,i} - T_{j,j}) \neq 0\ ,$$

donc a fortiori $\text{disc}(P) \neq 0$. Donc cette matrice est bien semi-simple.

Déduisons-en une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton. Notons P_A le polynôme de Cayley-Hamilton d'une matrice A. Il est clair que $P_A(A) = 0$ si A est diagonale, et aussi si A est diagonalisable (multiplier à droite par P et à gauche par P^{-1}). C'est donc vrai aussi pour la matrice générique, car elle est diagonalisable dans un surcorps de $k(T_{i,j})$, or pour vérifier que $P_A(A) = 0$ on peut le vérifier dans un surcorps. Pour conclure, on dit que le lieu des matrices A telles que $P_A(A) = 0$ est un fermé de $\mathbb{A}_k^{n^2}$, et comme il contient le point générique, c'est $\mathbb{A}_k^{n^2}$ tout entier.