TD - Feuille 4

Exercice 1 *L'anneau local d'un point.* Étant donnés deux points x, y d'un espace topologique X, on dit que x est une *générisation* de y, ou que y est une *spécialisation* de x, si $y \in \overline{\{x\}}$.
(1) Soit X un schéma et $x \in X$ un point. On définit le *schéma local* de X en x par $X_x = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Rappelez la définition de $\mathcal{O}_{X,x}$ et montrez que l'ensemble sous-jacent à X_x s'identifie à l'ensemble des générisations de x.
(2) Soit k un corps, X un k-schéma de type fini, $x \in X$ un point. Montrez que si x est isolé alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est de type fini sur k. Réciproquement, montrez que si $\mathcal{O}_{X,x}$ est de type fini alors $X_x = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ est un point. Concluez à l'aide de (1) que x est isolé dans X.
(3) Montrez que le résultat de (2) est faux si on ne suppose pas que k est un corps.

Exercice 2 *Schéma réduit.* Soit X un schéma.
(1) Montrez ques les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de X, A est un anneau réduit,
(ii) il existe un recouvrement ouvert affine $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ de X, tel que A_i est réduit pour tout i,
(iii) tous les anneaux locaux de X sont réduits.
(2) Énoncez la propriété universelle du schéma réduit $X_{\text{réd}}$ et démontrez-la.

Exercice 3 *Exemple d'utilisation du point générique.* Soit k un anneau. Donnez une structure de schéma naturelle à l'ensemble des matrices de taille (n, n) sur k. Démontrez que la matrice correspondant au point générique de ce schéma est semi-simple. Déduisez-en une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.