TD - Feuille 3

Dans toute cette feuille d'exercices, la lettre k désigne un corps. Les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires.

Conseils pour faire la feuille d'exercices.
J'avais prévu de faire en TD les exercices 2, 6, 7, 8, 9, ce serait bien que vous fassiez tout ce que vous pouvez. Pour les autres exercices, c'est surtout leur résultat qui est important, notamment les exemples élémentaires de produits fibrés (exercices 1 et 5). Je vous recommande en tout cas de lire les énoncés de ces exercices.

Exercice 1 *Produit fibré dans le cas affine.* Soient $X \to Z$ et $Y \to Z$ deux morphismes de schémas. Supposant que X, Y, Z sont des schémas affines, montrez qu'il existe un produit fibré $X \times_Z Y$ dans la catégorie des schémas.

Exercice 2 *Points d'un schéma comme morphismes* $\mathrm{Spec}(K) \to X$. Soit X un schéma. On note $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local d'un point $x \in X$, m_x l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, et $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/m_x$ son corps résiduel. Montrez qu'un morphisme $\mathrm{Spec}(K) \to X$, où K est un corps, est la même chose qu'un couple (x, i) formé d'un point x de l'espace topologique X, et d'une injection de corps $i : k(x) \to K$.

Exercice 3 *Points fermés.* Soit X un schéma et $x \in X$ un point. Pour tout ouvert affine $\mathrm{Spec}(A)$ contenant x, on note $p_x \subset A$ l'idéal premier correspondant à x (on distingue toujours dans la notation le point x, objet géométrique, et l'idéal $p_x \subset A$, objet algébrique).
(1) Supposons que $X = \mathrm{Spec}(A)$. Montrez que l'adhérence de $\{x\}$ est égale à $V(p_x)$.
(2) Soient $U = \mathrm{Spec}(A)$ et $V = \mathrm{Spec}(B)$ deux voisinages ouverts affines de x. Montrez qu'il existe un voisinage ouvert affine de x qui est un ouvert distingué dans U et dans V. (*Commencez par choisir $f \in A$ tel que $x \in \mathrm{Spec}(A_f) \subset \mathrm{Spec}(B)$, puis $g \in B$ tel que $x \in \mathrm{Spec}(B_g) \subset \mathrm{Spec}(A_f)$.*)
(3) Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes : (i) x est fermé dans X, (ii) pour tout voisinage ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de x, $p_x \subset A$ est un idéal maximal, (iii) il existe un voisinage ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de x tel que $p_x \subset A$ est un idéal maximal. (*Montrez que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) avec (1) puis que (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) avec (2).*)

Exercice 4 *Fermés irréductibles et leurs points génériques.* On dit qu'un point x d'un espace topologique X est un *point générique* ssi l'adhérence de $\{x\}$ est X.
(1) Soit X un schéma. Montrez que tout fermé irréductible $F \subset X$ a un et un seul point générique η_F. (*Commencez par le cas $F = X = \mathrm{Spec}(A)$. Dans le cas général, soient η_1 et η_2 deux points génériques de F. Soit U_1 un ouvert affine de X contenant η_1, montrez que $U_1 \cap F$ contient η_2 puis que $\eta_1 = \eta_2$.*)
(2) Déduisez-en que l'application $x \mapsto \overline{\{x\}}$ induit une bijection entre X et l'ensemble des fermés irréductibles de X, d'inverse l'application $F \mapsto \eta_F$.

Exercice 5 *Intersections ; fibres des morphismes.*
(1) Soient X un schéma et Y, Z deux sous-schémas fermés de X. On définit l'*intersection* $Y \cap Z$ comme étant égale au produit fibré $Y \times_X Z$. Dans le cas où X est affine, donnez l'idéal de $Y \cap Z$ en fonction de ceux de Y et Z. Donnez un exemple de deux sous-schémas fermés réduits qui ont une intersection non réduite.
(2) Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Soit $y \in Y$, vu comme un morphisme $\mathrm{Spec}(k(y)) \to Y$. On définit la *fibre de f en y*, notée $f^{-1}(y)$, comme étant égale au produit fibré $X \times_Y \mathrm{Spec}(k(y))$. Dans le cas où X et Y sont affines, dites quel est le schéma $f^{-1}(y)$. Donnez un exemple de morphisme entre deux schémas réduits ayant une fibre non réduite.

Exercice 6 *Morphismes finis.* On dit qu'un morphisme de schémas $f : Y \to X$ est *fini* s'il existe un recouvrement de X par des ouverts affines $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ tels que $V_i = f^{-1}(U_i)$ est affine égal à $\mathrm{Spec}(B_i)$, et B_i est un A_i-module fini. Montrez qu'un morphisme fini est fermé.
(*Indication : utiliser le théorème de Cohen-Seidenberg rappelé ci-dessous. Traiter d'abord le cas où X et Y sont réduits et l'image schématique de f est Y.*)

Théorème de Cohen-Seidenberg Soit $A \subset B$ une extension d'anneaux tel que B est entier sur A, c'est-à-dire, tout élément de B satisfait une équation polynomiale unitaire à coefficients dans A. Alors pour tout idéal premier $p \subset A$, il existe un idéal premier $q \subset B$ tel que $q \cap A = p$.

On notera que l'hypothèse « B est entier sur A » est satisfaite par exemple si B est un A-module fini.

Exercice 7 *Homéomorphisme n'est pas isomorphisme.* Soit $X \subset \mathbb{A}^2_k$ la courbe d'équation $y^2 = x^3$ et $f : \mathbb{A}^1_k \to X$ le morphisme défini par $f(t) = (t^2, t^3)$. Montrez que f est un homéomorphisme mais n'est pas un isomorphisme.

Exercice 8 *Dimension d'un diviseur de Cartier.* Soit A un anneau nœthérien et $f \in A$ un élément non inversible et non diviseur de 0. Dans cet exercice on démontre que $\dim(A/f) \leq \dim(A) - 1$, où la dimension est définie comme étant le sup des longueurs de chaînes d'idéaux premiers de A.
(N.B. on peut montrer que si de plus A est local, ou intègre, alors $\dim(A/f) = \dim(A) - 1$. C'est une conséquence du théorème de l'idéal principal de Krull (*Hauptidealsatz*), voir par exemple D. EISENBUD, Commutative algebra with a view toward algebraic geometry, Springer, chapitre 10.)
(1) Soit $p \subset R$ un idéal premier d'un anneau nœthérien. Montrez que la dimension du localisé R_p est égale au sup des longueurs de chaînes d'idéaux premiers qui se terminent en p, c'est-à-dire $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_r = p$. (Ce nombre est appelé la *hauteur* de p et noté $\mathrm{ht}(p)$.)
(2) Soit $m = \dim(A/f)$, soit $\overline{p}_0 \subsetneq \overline{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{p}_m$ une chaîne de premiers de longueur maximale dans A/f, et $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_m$ les relevés dans A. Démontrez que p_0 n'est pas un premier minimal, en utilisant la question (1) et le théorème de structure des anneaux nœthériens de dimension 0 : *un anneau nœthérien de dimension* 0 *est produit direct d'un nombre fini d'anneaux locaux dont l'idéal maximal est nilpotent.* Concluez.

Remarque Le résultat véritablement intéressant est celui mentionné ci-dessus, que l'on pourra utiliser librement : *si A est un anneau nœthérien qui est local ou intègre et $f \in A$ n'est ni inversible ni diviseur de* 0*, alors* $\dim(A/f) = \dim(A) - 1$.

Exercice 9 Calculez la dimension des sous-schémas suivants de $\mathbb{A}^4_k = \mathrm{Spec}(k[r, s, t, u])$:
(1) X défini par les équations $rt = s^2$ et $ru = st$,
(2) Y défini par les équations $rt = s^2$, $ru = st$, et $su = t^2$.