TD - Feuille 2

Exercice 1 *Foncteur de points d'un schéma affine.* Soit X un schéma et A un anneau. Montrez qu'un morphisme de schémas $X \to \mathrm{Spec}(A)$ est la même chose qu'un morphisme d'anneaux $A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Donnez une interprétation des fonctions (globales) sur X en termes de morphismes de X vers un certain schéma affine.

Exercice 2 *Image schématique.* Soit $f : Z \to X$ un morphisme de schémas.
(1) Montrez qu'il existe un sous-schéma fermé $Y \subset X$ tel que f se factorise en $Z \to Y \to X$ et que pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, hook] & X \\ Z \arrow[u] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

où Y' est un sous-schéma fermé de X, il existe un morphisme $Y \to Y'$ sur X (il est automatiquement unique). Le sous-schéma fermé Y s'appelle l'*image schématique* de f.
(2) Montrez que si Z est réduit, alors Y est l'adhérence de l'image de f avec sa structure de schéma réduit.

Exercice 3 *Schéma des racines n-ièmes de l'unité.* Soit A un anneau et $n \geq 1$ un entier.
(1) Montrez qu'il existe un schéma affine, noté $\mu_{n,A}$ et appelé schéma des racines n-ièmes de l'unité, tel que pour tout A-schéma S, se donner une racine n-ième de l'unité de $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ est la même chose que se donner un A-morphisme $S \to \mu_{n,A}$.
(2) Montrez que la multiplication des racines n-ièmes de l'unité induit un morphisme de A-schémas $m\colon \mu_{n,A} \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mu_{n,A} \to \mu_{n,A}$ que vous décrirez.
(3) Décrivez $\mu_{p,\mathbb{Q}}$, puis $\mu_{p,\mathbb{F}_{p'}}$ pour $p' \neq p$ premier, puis $\mu_{p,\mathbb{F}_p}$.

Exercice 4 *La cubique gauche.* On note Y la *cubique gauche*, image du morphisme de Veronese $\nu_3\colon \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^3_k$ donné par $\nu_3(x : y) = (x^3 : x^2y : xy^2 : y^3)$. Montrer que ν_3 induit un isomorphisme de $\mathbb{P}^1_k$ sur Y et écrire l'isomorphisme inverse. Montrer que Y est une *variété déterminantielle*, c'est-à-dire une variété définie par l'annulation des mineurs d'une certaine matrice.

Exercice 5 *Intersections complètes.* Soit $Y \subset \mathbb{P}^n_k$ une sous-variété de dimension r. On dit que Y est une *intersection complète (stricte)* si $I(Y)$ peut être engendré par $n - r$ éléments. On dit que Y est une *intersection complète ensembliste* si Y est l'intersection (ensembliste) de $n - r$ hypersurfaces.
(1) Montrer qu'une intersection complète stricte est une intersection complète ensembliste.
(2) Montrer que la cubique gauche Y n'est pas une intersection complète stricte. (*Considérer l'idéal homogène de Y dans $k[x, y, z]$.*)
(3) Montrer que la cubique gauche Y est une intersection complète ensembliste. Précisément, trouver une hypersurface Y_2 de degré 2 et une hypersurface déterminantielle Y_3 de degré 3 telles que $Y = Y_2 \cap Y_3$ ensemblistement. Montrer que l'intersection $Y_2 \cap Y_3$ au sens des schémas est comprise entre Y et son premier voisinage infinitésimal dans $\mathbb{P}^3_k$. (Soit X un schéma et $Y \subset X$ un sous-schéma fermé défini par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$. Le *n-ième voisinage infinitésimal de Y dans X* est le sous-schéma fermé de X défini par le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}^{n+1}$.)

Exercice 6 *Fonctions sur $\mathbb{P}^n$.* Montrez que les fonctions globales sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n_k$ sont les constantes.

Exercice 7 *Support d'un module.* Soit M un module de type fini sur un anneau A. On appelle *support de* M l'ensemble $\{p \in \operatorname{Spec}(A),\, M_p \neq 0\}$. Soit $I = \{a \in A,\, aM = 0\}$ l'annulateur de M.
(1) Montrer que le support de M est $V(I) = \{p \in \operatorname{Spec} A,\, I \subset p\}$.
(2) Supposons que $A = k[t]$ et M est un A-module de longueur finie. Alors M peut être vu comme un k-espace vectoriel $\overline{M}$ de dimension finie muni d'un opérateur $\bar{t} \in \operatorname{End}(\overline{M})$. Montrer que l'annulateur de M est l'idéal engendré par P, où P est le polynôme minimal de $\bar{t}$.

Exercice 8 *Caractérisations des anneaux de valuation discrète.* Soit A intègre de corps des fractions K avec $A \neq K$. On dit que A est un *anneau de valuation discrète* s'il existe une application $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ d'image non réduite à $\{0, \infty\}$ telle que

(i) $v^{-1}(\infty) = \{0\}$,
(ii) pour tous x, y dans K on a $v(xy) = v(x) + v(y)$,
(iii) pour tous x, y dans K on a $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$,

et $A = \{x \in K,\, v(x) \geq 0\}$. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) A est un anneau de valuation discrète,
(2) A est local et principal,
(3) A est local, nœthérien et son unique idéal maximal est principal,
(4) il existe un élément $\pi \in A$ non nul et irréductible tel que tout $x \in A$ non nul peut sécrire $x = u\pi^n$ avec $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{N}$.
(*Indication : (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1). Pour (3) $\Rightarrow$ (4) montrer que l'idéal* $I = \cap_{n \geq 1}(\pi^n)$ *est nul à l'aide du lemme de Nakayama rappelé ci-dessous.*)

Théorème (Lemme de Nakayama) *Soit A un anneau et $I \subset A$ un idéal. Soit M un A-module fini. Si $M = IM$, alors il existe $a \in A$ avec $a \equiv 1 \mod I$, tel que $aM = 0$.*

On rappelle qu'un A-module est dit *fini*, ou *de type fini*, s'il admet un système fini de générateurs. Un cas particulier très utile est le cas où A est local d'idéal maximal m : dans ce cas le théorème dit que $M = mM$ implique $M = 0$. Pour une démonstration du lemme de Nakayama, voir H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press.

Exercice 9 *Exemples d'anneaux de valuation discrète.* Soit A_1 le localisé de $k[X_1, \ldots, X_n]$ en l'idéal premier engendré par un polynôme irréductible $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ (anneau local d'une hypersurface irréductible de $\mathbb{A}^n_k$). Soit $A_2 = k[[x]]$ l'anneau de séries formelles (voisinage analytique d'un point lisse dans une courbe). Soit A_3 le localisé de $\mathbb{Z}$ en l'idéal premier engendré par un nombre premier p.

Montrez que A_1, A_2, A_3 sont des anneaux de valuation discrète.