TD - Feuille 1

Dans toute cette feuille d'exercices, la lettre k désigne un corps. Les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires.

Corrigé ex. 1 Considérons les idéaux $(P),(R) \subset A = \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]_Q$. On a des ensembles algébriques $V(P), V(R)$ dans $\mathrm{Spec}(A)$ qui est l'ouvert $\{Q \neq 0\}$ dans $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$. De plus $V(P) \subset V(R)$ par hypothèse.

Par le Nullstellensatz, ou théorème des zéros de Hilbert, on en déduit que $\sqrt{(R)} \subset \sqrt{(P)}$ en tant qu'idéaux de A. Donc, $Q^m R^d = PP_0$ dans $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ pour certains $P_0 \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ et $m > 0$. Comme $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ est factoriel, P divise R.

Corrigé ex. 2 Soit X espace topologique séparé et irréductible. Si $x, y \in X$ et $x \neq y$ alors il y a deux ouverts $x \in U \subset X$ et $y \in V \subset X$ tel que $U \cap V = \emptyset$, contradiction. Donc, X est un point (s'il est non vide).

Soit X un espace topologique irréductible, $U \subset X$ un ouvert non vide. Soit $\overline{U} \subset X$ l'adhérence de U, alors $Y = X - U$ est fermé et $Y \cup \overline{U} = X$, donc $\overline{U} = X$. En particulier, si $U, V \subset X$ sont deux ouverts non vides, $U \cap V \neq \emptyset$.

Soit X un espace irréductible, $U \subset X$ un ouvert non vide. Supposons que U n'est pas irréductible, alors il y a deux ouverts non vides $U_1, U_2 \subset U$ tel que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Mais les U_i sont aussi ouverts dans X, contradiction. Donc, U est irréductible.

Si X est un espace topologique et $Y \subset X$ est une partie irréductible, alors $\overline{Y}$ est aussi irréductible. En effet, si $Y_1 \subset Y_2 = \overline{Y}$ est une décomposition de Y en une réunion de deux fermés, alors les $Y_i \cap Y$ sont fermés dans Y et leur réunion contient Y, donc pour $i = 1$ ou 2 on a $Y \subset Y_i$, mais alors $\overline{Y} \subset Y_i$.

Corrigé ex. 3 Supposons X irréductible. Alors si $xy \in \sqrt{0}$, pour tout $p \subset A$ premier, on a $x \in p$ ou $y \in p$. Ainsi $X = V(x) \cup V(y)$. Comme X est irréductible, $V(x) = X$ ou $V(y) = X$. Si $V(x) = X$ par exemple, alors tout premier contient x, donc $x \in \cap p = \sqrt{0}$. Ceci montre que $\sqrt{0}$ est premier, donc $A_{\text{réd}}$ est intègre.

Réciproquement, si $X = V(I) \cup V(J)$, alors tout premier p contient IJ, donc $IJ \subset \sqrt{0}$. Comme $\sqrt{0}$ est premier par hypothèse, on en déduit que $I \subset \sqrt{0}$ ou $J \subset \sqrt{0}$, donc $V(I) = X$ ou $V(J) = X$, donc X est irréductible.

Corrigé ex. 4 Soit $A = k[x,y,z]/(y^2 - xz, z^2 - y^3)$ l'anneau de fonctions de Y. Les composantes irréductibles de Y correspondent aux idéaux premiers minimaux de A. Soit p un tel idéal. De $y^2 = xz$ et $z^2 = y^3$ on tire $z^2 = xyz$ donc $z(z - xy) = 0$. Ainsi $z \in p$ ou $z - xy \in p$.

Dans le premier cas, $y^3 = z^2$ est dans p donc $y \in p$. Comme $p_1 = (z, y)$ est un idéal premier, c'est un idéal premier minimal. Il correspond à la composante irréductible $Y_1 = \mathrm{Spec}(A/p_1) = \mathrm{Spec}(k[x])$ qui n'est autre que l'axe des x dans $\mathbb{A}^3_k$.

Dans le deuxième cas on a $z = xy$ dans A/p, donc $y^2 = x^2 y$ puis $y(y - x^2) = 0$ dans A/p. Il s'ensuit que $y \in p$ ou $y - x^2 \in p$. Le premier sous-cas mène à $p = p_1$, et le deuxième sous-cas mène à $p = p_2 = (y - x^2, z - x^3)$. Cet idéal premier minimal correspond à la composante irréductible $Y_2 = \mathrm{Spec}(A/p_2) = \mathrm{Spec}(k[x])$ qui est aussi une droite affine, cette fois-ci image de $x \mapsto (x, x^2, x^3)$ dans $\mathbb{A}^3_k$. C'est la *cubique gauche* (affine).

Corrigé ex. 5 (1) Une remarque préliminaire : quand on manipule des anneaux quotients de la forme A/I, il est très pratique de noter par une même lettre un élément de A et son image dans A/I. Cet abus ne mène pas à des confusions tant qu'on utilise des tournures du style « $f = g$ modulo I » ou « $f = g$ dans A/I ».

Soit $A = k[x,y]/(y^2 - x^2 - x^3)$ l'anneau de fonctions de X. La fonction $f = y/x$ est regulière sur $X - \{0\}$, c'est-à-dire que c'est un élément de $A[1/x]$. Montrons qu'elle n'est pas regulière sur X, ce qui veut dire que ce n'est pas l'image d'un élément de A par le morphisme $A \to A[1/x]$. Or il est facile de voir que $g := y^2 - x^2 - x^3$ est irréductible dans $k[x,y]$, et comme $k[x,y]$ est factoriel un irréductible engendre un idéal premier, donc A est intègre. Ainsi $A \to A[1/x]$ est injectif, et on souhaite juste voir que $f \notin A$. Or si $f \in A$, l'égalité $y = fx$ dans A se relève dans $k[x,y]$ en $y = fx + gh$ pour un certain $h \in k[x,y]$. En faisant $x = 0$ on trouve $y = y^2 h(0,y)$ dans $k[y]$, ce qui est impossible.
(2) Rappelons qu'une variété X est *rationnelle* si elle est birationnelle à un espace projectif, c'est-à-dire s'il existe deux ouverts isomorphes $U \subset X$ et $V \subset \mathbb{P}^n_k$. Ici, il s'agit de trouver un isomorphisme entre un ouvert de X et un ouvert de $\mathbb{A}^1_k$. Intuitivement, on voit que si on pose $t = y/x$ alors l'équation de X donne $x = t^2 - 1$ et donc $y = tx = t(t^2 - 1)$. Pour formaliser ceci on considère le morphisme $\mathbb{A}^1_k \to X$ donné par $t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$. Il est clair que c'est un isomorphisme de $\mathbb{A}^1_k \setminus \{\pm 1\}$ sur son image.

Corrigé ex. 6 (1) $\Rightarrow$ (2) : si $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ possède un idempotent non trivial e, alors

$$U_0 = \{x \in X \,,\, e(x) \neq 0 \text{ dans } k(x)\} \text{ et } U_1 = \{x \in X \,,\, e(x) \neq 1 \text{ dans } k(x)\}$$

sont deux ouverts de X (pourquoi ?), disjoints, non vides, et qui le recouvrent.
(2) $\Rightarrow$ (3) : si $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \simeq A_1 \times A_2$, alors l'élément $e = (1, 0)$ est un idempotent non trivial.
(3) $\Rightarrow$ (1) : si X n'est pas connexe, on a $X = Y \amalg Z$ et donc $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \times \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$.

Remarque L'exercice montre en fait que si X a un nombre fini r de composantes connexes, alors $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est un produit de r facteurs, et possède exactement 2^r idempotents.

Corrigé ex. 7 Les idéaux premiers minimaux de $k[x,y,z]/(x^2 - yz, xz - x)$ sont (x,y) et (x,z) et $(z - 1, x^2 - y)$. Les composantes irréductibles de Y s'intersectent, donc Y est connexe.

Corrigé ex. 8 Soit n l'ensemble des éléments non inversibles de A. Clairement, tout idéal de A distinct de A, en particulier tout idéal maximal m, est inclus dans n. Pour montrer que $m = n$ il suffit de montrer que $n \subset m$.

Si A est local, soit m son unique idéal maximal et montrons que $m = n$. Soit $x \in n$, alors x engendre un idéal de A distinct de A, donc inclus dans un idéal maximal d'après le lemme de Zorn, donc inclus dans m. Donc $n = m$, donc c'est un idéal.

Réciproquement, supposons que n est un idéal. Soit m un idéal maximal de A, montrons que $m = n$. Si $x \in n$, alors l'idéal engendré par x et m contient m et est distinct de A, donc est égal à m par maximalité, donc $n = m$. Donc A est un anneau local d'idéal maximal n.

Je ne donne pas de détails pour les réponses aux autres questions, qui sont assez faciles.

Corrigé ex. 9 Si $A = k$ ou $A = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$, alors X est un point et sa topologie est l'unique topologie sur le point.

Si $A = \mathbb{C}[X]$, les fermés stricts de X sont les ensembles finis de points fermés (on rappelle qu'un point fermé correspond à un idéal maximal de A, c'est-à-dire par le Nullstellensatz, un idéal de la forme $(X - x_0)$ où $x_0 \in \mathbb{C}$).
Si $A = \mathbb{C}[X, Y]$, les fermés stricts de X sont les réunions finies de points fermés et de courbes irréductibles, définies par une équation irréductible $f(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$.
Si A est un anneau de valuation discrète, alors $\mathrm{Spec}(A)$ est composé de deux points : son point générique, qui est un point ouvert correspondant à l'idéal $\{0\}$, et un point fermé correspondant à l'idéal maximal.

Corrigé ex. 10 Voir Hartshorne page 36. La courbe (a) est un *point double avec tangente commune* (*tacnode* en anglais), la courbe (b) est un *point double* (*double point* ou *node* ; on dit parfois aussi noeud en français), la courbe (c) est un *point de rebroussement* (*cusp*) et la courbe (d) est un *point triple* (*triple point*). Le passage de la terminologie anglaise à la terminologie française pose parfois de petits problèmes. Voir par exemple

http://mapage.noos.fr/r.ferreol/langage/dicofgb/dicofgb.htm .