# TD - Feuille 1

Dans toute cette feuille d'exercices, la lettre $k$ désigne un corps. Les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires.

**Exercice 1** Soient $P, Q, R \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ avec $P$ irréductible et $Q$ non multiple de $P$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ les conditions $P(x) = 0$ et $Q(x) \neq 0$ impliquent $R(x) = 0$. Montrer que $P$ divise $R$.

**Exercice 2** *Espaces topologiques irréductibles.* Montrez les faits suivants. Si $X$ est un espace topologique non vide séparé et irréductible, alors $X$ est un point. Dans un espace topologique irréductible, les ouverts non vides sont denses, et en particulier se coupent. Un ouvert non vide d'un espace topologique irréductible est lui aussi irréductible. Si $X$ est un espace topologique et $Y \subset X$ est une partie irréductible alors $\overline{Y}$ est aussi irréductible.

**Exercice 3** Soit $A$ un anneau et $X = \mathrm{Spec}(A)$. Montrez que $X$ est irréductible ssi $A_{\text{réd}}$ est intègre.

**Exercice 4** Décrire les composantes irréductibles du fermé $Y \subset \mathbb{A}^3_k$ donné par $y^2 = xz$, $z^2 = y^3$.

**Exercice 5** On considère la courbe $X \subset \mathbb{A}^2_k$ donnée par $y^2 = x^2 + x^3$.
(1) Montrer que la fonction $y/x$ n'est pas régulière sur $X$. Quel est le plus grand ouvert de $X$ sur lequel elle est régulière ?
(2) Montrer que $X$ est rationnelle.

**Exercice 6** *Connexité et fonctions.* Soit $X$ un schéma. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) $X$ est connexe,
(2) $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ne possède pas d'idempotent non trivial ($e \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tel que $e^2 = e$ et $e \neq 0, 1$),
(3) $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ n'est pas un anneau produit non trivial $A_1 \times A_2$.
(*Indication :* (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).)

**Exercice 7** Soit $Y \subset \mathbb{A}^3_k$ le schéma donné par des équations $x^2 - yz = 0$ et $xz - x = 0$. Montrer que $Y$ admet trois composantes irréductibles, trouver les idéaux premiers correspondants de $\mathcal{O}_Y(Y)$. Montrer que $Y$ est connexe.

**Exercice 8** *Anneaux locaux.* On dit qu'un anneau est *local* s'il n'a qu'un idéal maximal. Montrez qu'un anneau est local si et seulement si l'ensemble des éléments non inversibles de $A$ est un idéal. Soit $A$ un anneau et $p$ un idéal premier de $A$. Montrez que le localisé de $A$ par rapport à la partie multiplicative $S = A \setminus p$, noté $A_p$, est un anneau local d'idéal maximal $pA_p$. Montrez que $A_p/pA_p$ est isomorphe au corps de fractions de l'anneau intègre $A/p$.

**Exercice 9** Décrivez la topologie de $X = \mathrm{Spec}(A)$ dans les cas suivants : $A = k$, $A = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$, $A = \mathbb{C}[X]$, $A = \mathbb{C}[X, Y]$, $A$ est un anneau de valuation discrète.

**Exercice 10** *Singularités de courbes.* On suppose que $k$ n'est pas de caractéristique 2. Dessinez l'allure des courbes planes qui suivent : (a) $x^2 = x^4 + y^4$ (b) $xy = x^6 + y^6$ (c) $x^3 = y^2 + x^4 + y^4$ (d) $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$.

## Références


D. Eisenbud, J. Harris, *The geometry of schemes*, Graduate Texts in Mathematics No 197. Springer-Verlag, 2000.

R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics No 52, Springer-Verlag, 1977.

H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Second edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics No 8, Cambridge University Press, 1989.

D. Mumford, *The red book of varieties and schemes*, Second, expanded edition, Lecture Notes in Mathematics No 1358, Springer-Verlag, 1999.

C. Peskine, *An algebraic introduction to complex projective geometry. 1. Commutative algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics No 47, Cambridge University Press, 1996.