

Introduction algébrique à la géométrie projective

Christian Peskine
Analyse complexe et géométrie
Université Paris 6.

November 6, 2007

Contents

1 Anneaux, homomorphismes, idéaux.	7
1.1 Idéaux. Anneaux quotients	8
1.2 Opérations sur les idéaux.	10
1.3 Idéaux premiers, idéaux maximaux.	11
1.4 Nilradical et Radical de Jacobson.	13
1.5 Idéaux comaximaux.	14
1.6 Anneaux factoriels.	15
2 Modules sur un anneau.	17
2.1 Homomorphismes. Sous-modules. Modules quotients.	17
2.2 Produits et sommes directes.	19
2.3 Opérations sur les sous-modules d'un module.	20
2.4 Modules libres.	21
2.5 Modules d'homomorphismes.	21
2.6 Modules de type fini.	22
3 Anneaux et modules noethériens.	25
3.1 Anneaux noethériens.	25
3.2 Anneaux noethériens factoriels.	26
3.3 Décomposition primaire dans les anneaux noethériens.	27
3.4 Radical d'un idéal dans un anneau noethérien.	28
3.5 Retour sur la décomposition primaire dans les anneaux noethériens.	28
3.6 Idéaux premiers minimaux dans un anneau noethérien.	29
3.7 Modules noethériens.	30
4 Anneaux et modules artiniens.	31
4.1 Anneaux artiniens.	31
4.2 Modules artiniens.	34
5 Modules de type fini sur un anneau noethérien.	35
5.1 Idéaux premiers associés à un module de type fini sur un anneau noethérien.	36
5.2 Modules de longueur finie sur un anneau noethérien.	37
5.3 Modules de type fini sur un anneau principal.	40

6	Brève introduction à l'algèbre homologique.	43
6.1	Suites exactes.	43
6.2	Appendice : Produits tensoriels et modules d'homomorphismes.	46
6.3	Appendice : Module dualisant sur un anneau artinien.	47
7	Anneaux et modules de fractions.	53
7.1	Anneaux de fractions.	53
7.2	Modules de fractions.	55
7.3	Support d'un module.	56
7.4	Localisation et idéaux.	59
7.5	Localisation et anneaux factoriels.	61
7.6	Localisation et décomposition primaire.	62
7.7	Retour sur les idéaux premiers minimaux.	63
7.8	Localisation et idéaux premiers associés.	64
8	Extensions entières d'anneaux.	65
8.1	Éléments algébriques, éléments transcendants, éléments entiers.	65
8.2	Extensions finies, extensions entières, extensions algébriques d'anneaux.	67
8.3	Les Théorèmes de relèvement	69
9	Lemme de normalisation. Théorèmes des zéros.	73
9.1	Degré de transcendance.	73
9.2	Le Lemme de normalisation.	74
9.3	Les Théorèmes des zéros.	75
9.4	Anneaux de Jacobson.	77
9.5	Chaînes d'idéaux premiers d'une algèbre de type fini sur un corps.	78
9.6	Appendice : Le "main theorem" de Zariski	79
10	Anneaux noethériens intégralement clos.	83
10.1	Anneaux noethériens réduits.	83
10.2	Anneaux noethériens intégralement clos.	84
10.3	Valuations discrètes. Anneaux de Dedekind.	86
10.4	Groupe des diviseurs et groupe des classes de diviseurs.	88
11	Extensions algébriques de corps.	91
11.1	Extensions finies.	91
11.2	Extensions normales.	94
11.3	Trace et norme.	96
11.4	Appendice : Racines de l'unité et groupes de galois cycliques.	98
12	Extensions entières d'anneaux noethériens.	101
12.1	Extensions entières d'un anneau intègre noethérien.	101
12.2	Appendice : Groupe de galois et idéaux premiers	102

13 Anneaux et modules gradués.	105
13.1 Anneaux noethériens gradués. Anneaux projetants.	105
13.2 Modules gradués.	108
13.3 Fractions homogènes.	110
13.4 Le Théorème des syzygies gradué.	111
14 Polynômes de Hilbert.	115
14.1 Le Complexe de Koszul.	115
14.2 Polynômes de Hilbert.	117
14.3 Propriétés du polynôme de Hilbert.	118
14.4 Degré du Polynôme de Hilbert.	119
14.5 Exemples et exercices.	122
15 Dimension	123
15.1 Dimension et polynôme de Hilbert.	123
15.2 Système de paramètres.	127
15.3 Multiplicité d'un module pour un idéal de définition.	129
15.4 Dimension des anneaux géométriques.	130
15.5 Premier Théorème d'intersection.	133
15.6 Retour au cas gradué.	134
15.7 Exemples et Exercices.	135
16 Profondeur	137
16.1 Suites régulières.	137
16.2 Conditions \mathcal{S}_i	142
16.3 Le Lemme d'acyclicité.	145
16.4 Suites régulières et Complexe de Koszul.	146
16.5 Retour au cas gradué.	147
17 Dimension projective	149
17.1 Modules projectifs.	149
17.2 Dimension projective.	151
17.3 Dimension projective finie et profondeur.	153
18 Anneaux locaux réguliers	157
18.1 Régularité.	157
18.2 Le Théorème des Syzygies local.	158
18.3 Conditions \mathcal{R}_i	159
18.4 Factorialité des anneaux réguliers.	160
18.5 Régularité des anneaux géométriques.	161
18.6 Exemple	163
19 Complexes. Suites spectrales d'un complexe double.	165
19.1 Complexes.	165
19.2 Suites spectrales d'un double complexe positif (ou négatif).	166

20 Foncteurs Tors. Théorème de Bezout.	175
20.1 Les foncteurs Tors.	175
20.2 Modules de Cohen-Macaulay sur un anneau régulier.	179
20.3 Le Théorème de Bezout	179
21 Foncteurs Exts.	183
21.1 Modules injectifs.	183
21.2 Foncteurs Exts.	184
21.3 Foncteurs Exts et profondeur	187
21.4 Foncteurs Exts et conditions \mathcal{S}_r	189
21.5 La suite spectrale des <i>Exts</i> pour la restriction des scalaires.	190
22 Dualités.	193
22.1 Dualité sur un anneau local régulier.	193
22.2 Modules dualisants sur un anneau de Cohen-Macaulay.	196
22.3 Dualité sur un anneau de Cohen-Macaulay.	203
22.4 Retour au cas gradué.	205
23 Schémas affines	207
23.1 L'espace affine \mathbf{A}_n	207
23.2 Schémas affines.	208
23.3 Dimension d'un schéma affine.	210
23.4 Composantes irréductibles d'un schéma affine.	210
23.5 Lieu singulier d'un schéma affine.	212
23.6 Morphismes de schémas affines.	212
23.7 Immersions.	213
23.8 Description locale d'un morphisme.	214
23.9 Produit de schémas affines.	214
23.10 Dimensions des fibres d'un morphisme.	216
23.11 Morphismes finis	216
24 Schémas projectifs	219
24.1 L'espace projectif \mathbf{P}_n	219
24.2 Schémas projectifs.	221
24.3 Dimension des schémas.	223
24.4 Composantes irréductibles d'un schéma.	224
24.5 Lieu singulier d'un schéma.	225
24.6 Exemples de schémas projectifs.	225
24.7 Anneaux de fonctions des schémas projectifs.	227
24.8 Morphismes de schémas.	229
24.9 Exemples de morphismes de schémas.	231
24.10 Produits de schémas projectifs.	233
24.11 Image d'une variété projective.	236

25 Faisceaux cohérents.	237
25.1 Faisceaux de O_X -modules.	237
25.2 Faisceaux cohérents.	238
25.3 Fonctions de degré r sur \mathbf{P}_n	241
25.4 Faisceau cohérent associé à un module gradué de type fini.	241
25.5 Sections d'un faisceau cohérent sur un schéma projectif.	242
25.6 Faisceau cohérent engendré par ses sections.	243
25.7 Image inverse d'un faisceau cohérent.	244
25.8 Morphismes dans \mathbf{P}_n . Faisceaux inversibles très amples.	244
26 Image inverse d'un fermé et fibre d'un point.	245
26.1 Extension d'un faisceau d'idéaux par un morphisme.	245
26.2 Image inverse d'un fermé par un morphisme.	245
26.3 Fibre d'un point.	246
27 Espace tangent. Variété duale.	247
27.1 Hyperplans tangents. Espace tangent	248
27.2 Espace dual. Variété d'incidence.	249
27.3 Variété duale.	250
28 Groupes de points. Degré d'un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n.	253
28.1 Degré d'un groupe de points.	253
28.2 Genre virtuel d'un groupe de points plongé.	255
28.3 Degré d'un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n	256
28.4 Genre virtuel des groupes de points plans.	257
29 Diviseurs. Groupe de Picard.	261
30 Genre d'une courbe projective.	273
31 Groupe numérique d'une surface non singulière. Le Théorème de Halphen-Noether-Lefschetz pour les surfaces de \mathbf{P}_3.	283

Chapter 1

Anneaux, homomorphismes, idéaux.

Dans ce texte, nous écrirons toujours anneau pour anneau commutatif avec élément unité et nous noterons toujours 1 cette unité (il pourra nous arriver d'écrire 1_A pour préciser qu'il s'agit de l'élément unité de l'anneau A). Si A est un anneau et si $B \subset A$ est un sous-groupe abélien de A , stable pour la multiplication et contenant 1_A , on dit que B est sous-anneau de A .

Exemples 1.1 :

(i) $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ et \mathbf{C} sont des anneaux. Un corps commutatif, avec élément unité, K est un anneau. Nous connaissons aussi les anneaux de polynômes à une ou plusieurs variables sur un corps K , notés $K[X], K[X_1, \dots, X_n]$. Suivant un formalisme évident nous pouvons utiliser aussi les anneaux de polynômes à coefficients dans un anneau A , soient $A[X], A[X_1, \dots, X_n]$.

(ii) Si A et B sont deux anneaux, l'ensemble produit $A \times B$ est muni d'une structure naturelle d'anneau.

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{et} \quad (a, b)(a', b') = (aa', bb').$$

Il est intéressant de remarquer que si K et K' sont deux corps, l'anneau produit $K \times K'$ n'est pas un corps.

(iii) Si p est un nombre premier, on note $\mathbf{Z}_{(p)}$ le sous anneau de \mathbf{Q} formé par les fractions n/m telles que $m \notin p\mathbf{Z}$ (vérifier qu'il s'agit bien d'un sous-anneau de \mathbf{Q}).

(iv) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ un point. Vérifier que les fractions rationnelles P/Q , avec $P, Q \in K[X_1, \dots, X_n]$ et telles que $Q(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, forment un sous-anneau du corps des fractions rationnelles $K(X_1, \dots, X_n)$.

Définition 1.2 : Si A et B sont deux anneaux, un homomorphisme $f : A \rightarrow B$ est une application f de A dans B telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in A$, d'une part, et $f(1_A) = 1_B$, d'autre part.

Lorsqu'il existe un homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$, on dit que B est une A -algèbre.

Il est évident que le composé de deux homomorphismes, composables, d'anneaux est un homomorphisme d'anneaux.

1.1 Idéaux. Anneaux quotients

Proposition 1.3 : Le noyau $\text{Ker } f = f^{-1}(0)$ de f est un sous-groupe abélien de A tel que

$$(a \in \text{ker } f \quad \text{et} \quad x \in A) \quad \Rightarrow \quad ax \in \text{ker } f.$$

C'est évident.

Définition 1.4 : Un sous-groupe abélien strict \mathcal{I} d'un anneau A est un idéal de A si $a \in \mathcal{I}$ et $x \in A$ impliquent $ax \in \mathcal{I}$.

Exemples 1.5 :

(i) Si $n \in \mathbf{Z}$, $n \notin \{+1, -1\}$, alors $n\mathbf{Z}$ est un idéal de \mathbf{Z} .

(ii) Soit $a \in A$. L'ensemble aA des multiples de A est un idéal de A si a n'est pas inversible; c'est A si a est inversible.

(iii) Plus généralement, soient a_i avec $i \in E$ des éléments de A . L'ensemble des combinaisons finies des éléments a_i à coefficients dans A est soit A (si 1 est combinaison des a_i), soit un idéal. Dans le deuxième cas, on dit que les éléments a_i , avec $i \in E$, forment un système de générateurs de (ou engendrent) cet idéal.

(iv) Le noyau d'un homomorphisme $f : A \rightarrow B$ est un idéal de A .

Remarque évidente mais importante: Tout idéal contient 0.

Proposition 1.6 : Un anneau A est un corps si et seulement si (0) est le seul idéal de A .

Théorème 1.7 : Si \mathcal{I} est un idéal de A , l'ensemble A/\mathcal{I} des classes pour la relation d'équivalence $a \sim b$ si $a - b \in \mathcal{I}$ est muni d'une structure d'anneau telle que l'application classe $cl : A \rightarrow A/\mathcal{I}$ est un homomorphisme d'anneaux (évidemment surjectif), de noyau \mathcal{I} .

On démontre que $cl(a + b)$ et $cl(ab)$ ne dépendent que des classes de a et b . On pose alors

$$cl(a) + cl(b) = cl(a + b) \quad \text{et} \quad cl(a)cl(b) = cl(ab).$$

Il est clair que $cl(0)$ est élément neutre pour l'addition, que $cl(1_A)$ est élément neutre pour la multiplication et que le noyau de l'application classe est \mathcal{I} .

Corollaire 1.8 : Tout idéal de A est le noyau d'un homomorphisme d'anneaux, de source A .

Définition 1.9 : A/\mathcal{I} est l'anneau quotient de A par l'idéal \mathcal{I} .

Exemple 1.10 :

Vous connaissez l'anneau quotient (à n éléments) $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (on a supposé $n \notin \{+1, -1\}$).

Exercice 1.11 :

Soit K un corps. Montrer que l'homomorphisme composé

$$K[Y] \xrightarrow{i} K[X, Y] \xrightarrow{cl} K[X, Y]/XK[X, Y]$$

est un isomorphisme (i est l'inclusion naturelle et cl l'application classe).

Définition 1.12 : Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et $x_1, \dots, x_n \in B$. On dit que x_1, \dots, x_n engendrent la A -algèbre B si l'homomorphisme d'anneaux

$$h : A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B, \quad h|_A = f, \quad h(X_i) = x_i,$$

est surjectif. La A -algèbre B est alors de type fini.

Théorème 1.13 (Le Théorème de factorisation.) : Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Il existe un unique homomorphisme injectif d'anneaux $g : A/\text{Ker } f \rightarrow B$ tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow \text{cl} & \nearrow g & \\ A/\text{ker } f & & \end{array}$$

De plus f est surjectif si et seulement si g est un isomorphisme.

Verifier que $f(a)$ ne dépend que de $\text{cl}(a)$, poser $g(\text{cl}(a)) = f(a)$ et montrer que g ainsi défini est bien un homomorphisme injectif. La commutativité du diagramme explique clairement pourquoi f est surjective si et seulement si g est un isomorphisme.

Théorème 1.14 : Soit \mathcal{I} un idéal d'un anneau A .

Si \mathcal{J} est un idéal de A/\mathcal{I} , alors $\text{cl}^{-1}(\mathcal{J})$ est un idéal de A contenant \mathcal{I} .

Si \mathcal{I}' est un idéal de A contenant \mathcal{I} , alors $\text{cl}(\mathcal{I}')$ est un idéal de A/\mathcal{I} (souvent noté \mathcal{I}'/\mathcal{I}).

On a $\text{cl}^{-1}(\text{cl}(\mathcal{I}')) = \mathcal{I}'$ et $\text{cl}(\text{cl}^{-1}(\mathcal{J})) = \mathcal{J}$. La bijection ainsi définie entre les idéaux de A , contenant \mathcal{I} , et les idéaux de A/\mathcal{I} respecte l'inclusion.

La preuve va d'elle même. Elle repose sur la Proposition suivante.

Proposition 1.15 : Si \mathcal{J} est un idéal de A/\mathcal{I} , alors $\text{cl}^{-1}(\mathcal{J})$ est l'idéal noyau de l'homomorphisme (surjectif) composé d'anneaux

$$A \rightarrow A/\mathcal{I} \rightarrow (A/\mathcal{I})/\mathcal{J}.$$

Cet homomorphisme se factorise par un isomorphisme

$$A/\text{cl}^{-1}(\mathcal{J}) \simeq (A/\mathcal{I})/\mathcal{J}.$$

La description de $\text{cl}^{-1}(\mathcal{J})$ se passe de commentaires. La factorisation est une conséquence du Théorème de factorisation.

Définition 1.16 : Si un idéal est engendré par un nombre fini d'éléments, on dit qu'il est de type fini. Un idéal engendré par un élément est dit principal.

Théorème 1.17 : Tout idéal de \mathbf{Z} est principal. Idem pour l'anneau des polynômes $K[X]$ à une variable sur un corps K .

Indications: Montrer qu'un idéal non nul \mathcal{I} de \mathbf{Z} est engendré par le plus petit entier strictement positif qu'il contient. Suivant le même principe de démonstration, un idéal non nul \mathcal{I} de $K[X]$ est engendré par un polynôme non nul de degré minimum parmi les polynômes de \mathcal{I} .

Définition 1.18 :

(i) Si $a \in A$ est inversible, autrement dit s'il existe $b \in A$ tel que $ab = 1$, on dit que a est une unité et on écrit $b = a^{-1}$ (b est l'inverse de a).

(ii) Si $a \in A$ et $b \in A$ sont des éléments non nuls tels que $ab = 0$, on dit que a (et b) sont des diviseurs de 0.

(iii) Soit $a \in A$. S'il existe un entier $n > 0$ tel que $a^n = 0$, on dit que a est nilpotent.

Exemples 1.19 :

(i) Les unités de \mathbf{Z} sont 1 et -1 . Les unités de $K[X]$ sont les constantes non nulles. Les unités de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sont les classes des entiers premiers à n .

(ii) L'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ n'a pas de diviseurs de zéro si et seulement si n est premier.

(iii) L'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ a un élément nilpotent si et seulement si n a un facteur carré.

$cl(X + Y), cl(X), cl(Y)$ sont des éléments nilpotents de $K[X, Y]/\mathcal{I}$ où \mathcal{I} est l'idéal de $K[X, Y]$ engendré par $X^2 + Y^2$ et XY .

Définition 1.20 : Un anneau sans diviseur de 0 est dit intègre.

Un anneau sans nilpotent est dit réduit.

Définition 1.21 : Un anneau intègre qui n'est pas un corps et dont tous les idéaux sont principaux est un anneau principal.

Nous avons donc vu le résultat suivant:

Théorème 1.22 : Les anneaux \mathbf{Z} et $K[X]$ sont principaux.

1.2 Opérations sur les idéaux.

Si \mathcal{I} et \mathcal{J} sont deux idéaux d'un anneau A , il est clair que l'intersection $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ est aussi un idéal de A .

La réunion de deux idéaux n'est pas nécessairement un idéal.

Si \mathcal{I} et \mathcal{J} sont deux idéaux d'un anneau A , nous notons $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ l'ensemble des éléments de la forme $a + b$, avec $a \in \mathcal{I}$ et $b \in \mathcal{J}$. On vérifie immédiatement que $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ est soit A , soit un idéal de A .

Plus généralement, si \mathcal{I}_s est une famille d'idéaux d'un anneau A , nous noterons $\sum_s \mathcal{I}_s$ l'ensemble des combinaisons (finies) d'éléments des idéaux \mathcal{I}_s . Il est clair que $\sum_s \mathcal{I}_s$ est soit A , soit un idéal de A . Dans le deuxième cas, c'est le plus petit idéal de A contenant \mathcal{I}_s pour tout s .

Si \mathcal{I} et \mathcal{J} sont deux idéaux d'un anneau A , nous notons $\mathcal{I}\mathcal{J}$ l'idéal engendré par les produits xy , avec $x \in \mathcal{I}$ et $y \in \mathcal{J}$, i.e. l'ensemble des combinaisons de produits d'un élément de \mathcal{I} et d'un élément de \mathcal{J} .

Si \mathcal{I} est un idéal d'un anneau A et P une partie de A , on note $\mathcal{I} : P$ l'ensemble des éléments $a \in A$ tels que $ax \in \mathcal{I}$ pour tout $x \in P$. On vérifie facilement que $\mathcal{I} : P$ est un idéal de A si $P \not\subset \mathcal{I}$ et que $\mathcal{I} : P = A$ si $P \subset \mathcal{I}$. On appelle $\mathcal{I} : P$ le conducteur de P dans \mathcal{I} .

Si $f : A \rightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux et si \mathcal{J} est un idéal de B , il est clair que $f^{-1}(\mathcal{J})$ est un idéal de A (la contraction de \mathcal{J}).

Si $f : A \rightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux et si \mathcal{I} est un idéal de A , l'idéal engendré par l'image de \mathcal{I} dans B , noté $f(\mathcal{I})B$, est l'idéal extension de \mathcal{I} à B .

1.3 Idéaux premiers, idéaux maximaux.

Définition 1.23 : Un idéal \mathcal{I} de A est premier si l'anneau quotient A/\mathcal{I} est intègre.

On vérifie immédiatement l'énoncé qui suit.

Proposition 1.24 : L'idéal \mathcal{I} de A est premier si et seulement si $ab \in \mathcal{I}$ et $a \notin \mathcal{I}$ impliquent $b \in \mathcal{I}$.

Définition 1.25 : Un idéal \mathcal{I} de A est maximal si l'anneau quotient A/\mathcal{I} est un corps.

Proposition 1.26 : L'idéal \mathcal{I} de A est maximal si et seulement si \mathcal{I} est un élément maximal de l'ensemble des idéaux de A , ordonné par l'inclusion.

Nous savons qu'un corps est un anneau dont le seul idéal est (0) , donc la Proposition est une conséquence immédiate du Théorème 1.14.

Exercices 1.27 :

(i) Soient k un corps et $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$. Montrer que l'ensemble des polynômes $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ tels que $P(a_1, \dots, a_n) = 0$ est un idéal maximal de $k[X_1, \dots, X_n]$ engendré par les polynômes $X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n$.

(ii) Démontrer le résultat suivant :

Proposition 1.28 : Dans un anneau principal, tout idéal premier non nul est maximal.

Proposition 1.29 : Si \mathcal{P} est un idéal premier et si \mathcal{I}_i , avec $i = 1, \dots, n$, sont des idéaux tels que $\bigcap_1^n \mathcal{I}_i \subset \mathcal{P}$, alors il existe l tel que $\mathcal{I}_l \subset \mathcal{P}$.

Sinon soient $a_i \in \mathcal{I}_i$ et $a_i \notin \mathcal{P}$. Alors $\prod_1^n a_i \notin \mathcal{P}$ (car \mathcal{P} est premier) et $\prod_1^n a_i \in \bigcap_1^n \mathcal{I}_i$.

Théorème 1.30 (Lemme d'évitement.) : Soient $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n$ des idéaux de A dont deux au plus ne sont pas premiers. Si \mathcal{J} est un idéal tel que $\mathcal{J} \not\subset \mathcal{I}_m$ pour $m = 1, \dots, n$, alors $\mathcal{J} \not\subset \bigcup_1^n \mathcal{I}_m$.

C'est évident pour $n = 1$, on fait une récurrence sur n . Pour tout i , il existe $a_i \in \mathcal{J}$, avec $a_i \notin \cup_{m \neq i} \mathcal{I}_m$. S'il existe i tel que $a_i \notin \mathcal{I}_i$, le résultat est démontré. Sinon $a_i \in \mathcal{I}_i$ pour tout i . Dans ce cas on prend $a = a_1 + a_2$ si $n = 2$ et $a = a_1 + \prod_{i>1} a_i$ pour $n > 2$ (on suppose alors que \mathcal{I}_1 est premier) et on montre $a \notin \mathcal{I}_m$ pour tout m .

Remarque : On a en fait démontré le résultat plus précis suivant,

Théorème 1.31 : *Soient $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n$ des idéaux de A dont deux au plus ne sont pas premiers. Si E est une partie de A stable pour l'addition et la multiplication telle que $E \not\subset \mathcal{I}_m$ pour $m = 1, \dots, n$, alors $E \not\subset \cup_1^n \mathcal{I}_m$.*

Théorème 1.32 : *Si \mathcal{I} est un idéal de A , la bijection entre les idéaux de A/\mathcal{I} et les idéaux de A contenant \mathcal{I} , établie plus haut, induit une bijection entre les idéaux premiers (resp. maximaux) de A/\mathcal{I} et les idéaux premiers (resp. maximaux) de A contenant \mathcal{I} .*

Démonstration : Soit \mathcal{J} un idéal de A/\mathcal{I} . Nous avons vu (Proposition 1.15) qu'il y a un isomorphisme $A/cl^{-1}(\mathcal{J}) \simeq (A/\mathcal{I})/\mathcal{J}$. Donc $(A/\mathcal{I})/\mathcal{J}$ est un anneau intègre (resp. un corps) si et seulement si $A/cl^{-1}(\mathcal{J})$ est un anneau intègre (resp. un corps), ce qui démontre le Théorème.

Théorème 1.33 : *Un anneau $A \neq 0$ admet un idéal maximal.*

C'est une conséquence de l'axiome de Zorn que je rappelle ici :

Si un ensemble ordonné non vide est tel que tout sous-ensemble totalement ordonné est borné supérieurement, alors il possède au moins un élément maximal.

Il faut donc montrer que tout sous-ensemble totalement ordonné de l'ensemble des idéaux d'un anneau A est borné. Soit E un tel sous-ensemble. Considérons \mathcal{I} la réunion des éléments de E . Montrons que \mathcal{I} est un idéal de A .

Si $a, b \in \mathcal{I}$ et $c \in A$, il existe $\mathcal{J} \in E$ tel que $a, b \in \mathcal{J}$. On en déduit $a + b \in \mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ et $ac \in \mathcal{J} \subset \mathcal{I}$. De plus, comme $1_A \notin \mathcal{J}$ pour tout $\mathcal{J} \in E$, il est clair que $1_A \notin \mathcal{I}$.

Bien évidemment l'idéal \mathcal{I} est une borne supérieure de E , ce qui démontre le Théorème.

Compte tenu du Théorème 1.32, on a alors le Corollaire suivant (et son Corollaire).

Corollaire 1.34 : *Tout idéal d'un anneau est contenu dans un idéal maximal de cet anneau.*

Corollaire 1.35 : *Un élément d'un anneau est inversible si et seulement si il n'est contenu dans aucun idéal maximal.*

Définition 1.36 : *Un anneau n'ayant qu'un seul idéal maximal est dit local.*

Exercice 1.37 : *Vérifier que l'anneau $\mathbf{Z}_{(p)}$ défini plus haut est local et que son idéal maximal est l'ensemble des fractions pouvant s'écrire n/m avec $n \in p\mathbf{Z}$ et $m \notin p\mathbf{Z}$.*

Définition 1.38 (Spectre d'un anneau) :

Le Spectre, $\text{Spec}A$, d'un anneau A est l'ensemble des idéaux premiers de cet anneau.

Définition 1.39 (*Topologie de Zariski*) :

Si \mathcal{I} est un idéal d'un anneau A , on note $V(\mathcal{I})$ le sous-ensemble de $\text{Spec}A$ formé par les idéaux premiers de A contenant \mathcal{I} .

Les sous-ensembles $V(\mathcal{I})$ de $\text{Spec}A$ et l'ensemble vide sont les fermés d'une topologie sur $\text{Spec}A$, appelée Topologie de Zariski.

Il faut bien sur vérifier qu'il s'agit bien d'une topologie. C'est pratiquement évident.

Si \mathcal{I}_s , pour $s = 1, \dots, n$ sont des idéaux de A , on a $\cup_1^n V(\mathcal{I}_s) = V(\cap_1^n \mathcal{I}_s)$.

Si \mathcal{I}_s est une famille d'idéaux de A , on a $\cap_s V(\mathcal{I}_s) = V(\sum_s \mathcal{I}_s)$.

Le résultat suivant est évident mais important.

Proposition 1.40 : Si A est un anneau intègre, tout ouvert non vide de $\text{Spec}A$ contient l'idéal premier (0) , en particulier tout ouvert non vide est dense dans $\text{Spec}A$.

1.4 Nilradical et Radical de Jacobson.

Proposition 1.41 : L'ensemble des éléments nilpotents d'un anneau A est un idéal de A .

Vérifier que si $a^n = 0$ et $b^m = 0$, alors $(ca - db)^{n+m-1} = 0$.

Définition 1.42 : Cet idéal est appelé le Nilradical de A et noté $\text{Nil}(A)$.

Proposition 1.43 : $\text{Nil}(A) = (0)$ si et seulement si l'anneau A est réduit.

C'est la définition d'un anneau réduit.

Théorème 1.44 : $\text{Nil}(A)$ est l'intersection des idéaux premiers de A .

Soient $a \in \text{Nil}(A)$ et \mathcal{P} est un idéal premier de A . Il existe $n > 0$ tel que $a^n = 0$, donc $a^n \in \mathcal{P}$ et $a \in \mathcal{P}$, ce qui démontre $\text{Nil}(A) \subset \mathcal{P}$. L'inclusion inverse est plus délicate à prouver.

Montrons que si $a \notin \text{Nil}(A)$, il existe un idéal premier \mathcal{P} tel que $a \notin \mathcal{P}$. On considère la partie S de A formée par les puissances positives de a . Nous avons supposé que $S \cap (0)$ est vide. On peut donc considérer l'ensemble non vide E des idéaux de A disjoints de S . Tout sous-ensemble E' totalement ordonné de E est borné, dans E , par la réunion des éléments (qui sont des idéaux) de E' . On peut donc appliquer Zorn. L'ensemble E admet un élément maximal \mathcal{I} .

Montrons que \mathcal{I} est un idéal premier. Soient $x, y \in A$ des éléments tels que $xy \in \mathcal{I}$. Si $x \notin \mathcal{I}$ et $y \notin \mathcal{I}$, il existe des entiers n et m tels que $a^n \in \mathcal{I} + xA$ et $a^m \in \mathcal{I} + yA$. On en déduit $a^{n+m} \in \mathcal{I} + x\mathcal{I} + y\mathcal{I} + xyA \subset \mathcal{I}$, donc une contradiction.

Corollaire 1.45 : Si \mathcal{I} est un idéal de A , l'idéal intersection des idéaux premiers qui contiennent \mathcal{I} est l'ensemble des éléments $x \in A$ tels que $x^n \in \mathcal{I}$ pour n assez grand.

C'est le Théorème précédent appliqué à l'anneau quotient A/\mathcal{I} .

Définition 1.46 : L'idéal formé des éléments $x \in A$ tels que $x^n \in \mathcal{I}$ pour n assez grand est le radical de \mathcal{I} . Il est noté $\sqrt{\mathcal{I}}$ ou $R(\mathcal{I})$.

Définition 1.47 : L'intersection des idéaux maximaux de A est le Radical de Jacobson de A (noté $RJ(A)$).

Théorème 1.48 : $a \in RJ(A)$ si et seulement si $1 - ax$ est inversible pour tout $x \in A$.

Supposons $a \in RJ(A)$. Soit \mathcal{M} un idéal maximal de A . Alors $a \in \mathcal{M}$ implique $ax \in \mathcal{M}$ et $1 - ax \notin \mathcal{M}$ (car $1 = (1 - ax) + ax$). Donc $1 - ax$ n'est contenu dans aucun idéal maximal et il est inversible.

Supposons $a \notin RJ(A)$. Soit \mathcal{M} un idéal maximal tel que $a \notin \mathcal{M}$. Comme A/\mathcal{M} est un corps et comme l'image $cl(a)$ de a dans ce corps est non nulle, elle est inversible. Donc il existe $b \in A$ tel que $cl(a)cl(b) = cl(1)$, soit $cl(1 - ab) = 0$. Mais ceci signifie $(1 - ab) \in \mathcal{M}$, donc $1 - ab$ n'est pas inversible.

1.5 Idéaux comaximaux.

Définition 1.49 : Deux idéaux \mathcal{I} et \mathcal{J} d'un anneau A sont dits comaximaux si $\mathcal{I} + \mathcal{J} = A$.

Lemme 1.50 : Si les idéaux \mathcal{I}_l , pour $l = 1, \dots, n$, sont deux à deux comaximaux, les idéaux \mathcal{I}_e et $\bigcap_{i \neq e} \mathcal{I}_i$ sont comaximaux.

Sinon il existe un idéal maximal \mathcal{M} les contenant. Comme $\bigcap_{i \neq e} \mathcal{I}_i \subset \mathcal{M}$, on sait (Proposition 1.29) qu'il existe $l \neq e$ tel que $\mathcal{I}_l \subset \mathcal{M}$. Comme \mathcal{I}_e et \mathcal{I}_l sont comaximaux, c'est impossible.

Lemme 1.51 : Si les idéaux \mathcal{I}_l , pour $l = 1, \dots, n$, sont deux à deux comaximaux,, on a

$$\bigcap_1^n \mathcal{I}_l = \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \dots \mathcal{I}_n.$$

Compte tenu du Lemme précédent, il suffit de le démontrer pour $n = 2$. Soit $1 = a + b$, avec $a \in \mathcal{I}_1$ et $b \in \mathcal{I}_2$. Si $x \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, alors $x = ax + bx \in \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2$. Donc $\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2$.

Théorème 1.52 : Soient $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n$ des idéaux d'un anneau A et pour tout \mathcal{I} soit $cl_{\mathcal{I}}$ l'application naturelle $A \rightarrow A/\mathcal{I}$. Les idéaux \mathcal{I}_l sont deux à deux comaximaux si et seulement si l'application $a \rightarrow (cl_1(a), \dots, cl_n(a))$ de A dans $\prod_1^n A/\mathcal{I}_l$ est surjective.

Supposons d'abord que l'application est surjective. Il existe alors $a \in A$ tel que $cl_1(a) = cl_1(1)$ et $cl_2(a) = cl_2(0)$. Autrement dit $1 - a \in \mathcal{I}_1$ et $a \in \mathcal{I}_2$, donc évidemment $1 = (1 - a) + a \in \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$. On démontre bien sûr de la même façon que \mathcal{I}_l et \mathcal{I}_k sont comaximaux pour $l \neq k$.

Supposons maintenant les idéaux \mathcal{I}_l deux à deux comaximaux. D'après le Lemme 1.50, on sait que, pour tout e , il existe $a_e \in \mathcal{I}_e$ et $b_e \in \mathcal{I}_k$ pour $k \neq e$ tel que $1 = a_e + b_e$. Autrement dit, $cl_e(b_e) = cl_e(1)$ et $cl_k(b_e) = 0$ pour $k \neq e$. Ceci étant démontré, on a

$$cl_l(b_1z_1 + b_2z_2 + \dots + b_nz_n) = cl_l(z_l),$$

ce qui montre que l'application considérée est surjective.

1.6 Anneaux factoriels.

Définition 1.53 : On dit qu'un élément non inversible d'un anneau est irréductible s'il n'est pas le produit de deux éléments non inversibles de cet anneau.

Définition 1.54 : Un anneau intègre A est dit factoriel si

- (i) pour tout élément irréductible a de A l'idéal aA est premier,
- (ii) tout élément non inversible de A est produit d'éléments irréductibles.

Théorème 1.55 (unicité de la décomposition en produit d'irréductibles) :

Soit A un anneau factoriel. Si $a_i, (i = 1, \dots, n)$ et $b_j, (j = 1, \dots, m)$ sont des éléments irréductibles de A tels que $\prod_1^n a_i = \prod_1^m b_j$, alors $n = m$ et il existe une permutation τ de $[1, \dots, n]$ telles que $a_iA = b_{\tau(i)}A$ pour tout i .

Il suffit de remarquer que comme a_iA est un idéal premier et comme $\prod_1^m b_j \in a_iA$, il existe j tel que $b_j \in a_iA$. Soit $b_j = a_ic$. Comme b_j est irréductible et a_i n'est pas inversible, c est inversible. Il reste $b_jA = a_iA$.

Définition 1.56 : Soient A un anneau factoriel et $a, b \in A$ des éléments non nuls.

(i) Un pgcd de a et b est un élément $c \in A$ tel que tout diviseur commun de a et b divise c . Si 1 est un pgcd de a et b , on dit qu'ils sont premiers entre eux.

(ii) Un ppcm de a et b est un élément $c \in A$ tel que tout multiple commun de a et b est multiple de c .

Je vous laisse le soin de prouver le Théorème suivant.

Théorème 1.57 : Dans un anneau factoriel deux éléments non nuls ont un pgcd et un ppcm.

ATTENTION, si a et b sont premiers entre eux on n'a pas nécessairement $aA + bA = A$.

Théorème 1.58 : Un anneau principal est factoriel.

On aura besoin du Lemme suivant :

Lemme 1.59 : *Une suite croissante d'idéaux d'un anneau principal A est stationnaire.*

Soit $a_1A \subset a_2A \subset \dots \subset a_nA \subset \dots$ une telle suite. Il suffit de remarquer que $\mathcal{I} = \cup_{i>0} a_iA$ est un idéal de A . Comme A est principal, il existe $b \in \mathcal{I}$ tel que $\mathcal{I} = bA$. Mais il existe i tel que $b \in a_iA$. Il reste évidemment $\mathcal{I} = a_iA$, et le Lemme est démontré.

Démonstration du Théorème:

Soit a un élément irréductible d'un anneau principal A . Soit \mathcal{M} un idéal maximal contenant a . Il existe $b \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} = bA$, donc il existe $c \in A$ tel que $a = bc$. Comme a est irréductible, c est inversible et $aA = bA = \mathcal{M}$, donc aA est premier.

Montrons maintenant que si a est un élément non inversible qui n'est pas produit d'éléments irréductibles, il existe a' tel que $aA \subset a'A$, que cette inclusion est stricte et que a' n'est pas produit d'éléments irréductibles.

Il existe un idéal maximal $\mathcal{M} = bA$ tel que $a \in \mathcal{M}$, donc $a = ba'$. Comme b est irréductible, il est clair que a' n'est pas produit d'éléments irréductibles. On a évidemment $aA \subset a'A$. Si $a' = ac$, il en résulte $1 = bc$, ce qui est impossible car b n'est pas inversible. Il reste que l'inclusion $aA \subset a'A$ est stricte.

On construit ainsi une suite strictement croissante d'idéaux de A , ce qui contredit le Lemme. Tout élément non inversible est donc produit d'éléments irréductibles.

J'énonce enfin ici un résultat dont la preuve est remise à plus tard.

Théorème 1.60 : *Si A est un anneau factoriel, l'anneau de polynômes $A[X]$ est factoriel.*

Corollaire 1.61 : *L'anneau des polynômes $K[X_1, \dots, X_n]$ à plusieurs variables sur un corps K est factoriel.*

Chapter 2

Modules sur un anneau.

Soit A un anneau

Définition 2.1 : Un A -module M est un groupe commutatif muni d'une application

$A \times M \rightarrow M; (a, x) \rightarrow ax$, telle que :

(i) $a(x + y) = ax + ay$,

(ii) $(a + b)x = ax + bx$,

(iii) $a(bx) = (ab)x$,

(iv) $1x = x$.

Exemples 2.2 :

(i) L'anneau A est évidemment un A -module.

(ii) Un idéal de A est un A -module.

(iii) Si \mathcal{I} est un idéal de A , le quotient A/\mathcal{I} a une structure naturelle de A -module, en posant $acl(x) = cl(ax)$ (vérifier que ça marche).

2.1 Homomorphismes. Sous-modules. Modules quotients.

Définition 2.3 : On dit qu'une famille d'éléments $(x_i)_{i \in E}$, avec $x_i \in M$, engendre le A -module M si tout élément de M est combinaison (finie), à coefficients dans A , des x_i . On dit aussi que les x_i forment un système de générateurs de M .

Définition 2.4 : Un sous- A -module N de M est un sous-ensemble de M tel que pour tous $x, y \in N$ et $a, b \in A$ on a $ax + by \in N$.

Exemples 2.5 : (i) Un idéal de A est un sous- A -module de A .

(ii) Les sous-modules du A -module A/\mathcal{I} sont les idéaux de cet anneau quotient de A .

Définition 2.6 : Un homomorphisme de A -modules $f : M \rightarrow N$, ou une application A -linéaire, est une application ensembliste telle que

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y) \quad \forall x, y \in M \quad \text{and} \quad a, b \in A.$$

Si cet homomorphisme est bijectif, c'est un isomorphisme.

Proposition 2.7 : Si $f : M \rightarrow N$ est un homomorphisme de A -modules, le noyau $\text{Ker } f$ de f est un sous- A -module de M .

Théorème 2.8 : Si N est un sous- A -module de M , l'ensemble M/N des classes d'équivalence pour la relation $x \sim y$ si $(x - y) \in N$ est muni d'une unique structure de A -module telle que l'application classe $cl : M \rightarrow M/N$ est un homomorphisme. On a donc pour cette structure

$$acl(x) + bcl(y) = cl(ax + by).$$

Le noyau de cette application est N .

Démonstration :

Il suffit de remarquer que si $(x - x') \in N$ et $(y - y') \in N$, alors $((ax + by) - (ax' + by')) \in N$ pour tous $a, b \in A$. On peut donc poser

$$acl(x) + bcl(y) = cl(ax + by).$$

Théorème 2.9 (Le théorème de factorisation) :

Soit $f : M \rightarrow N$ un homomorphisme de A -modules.

$\text{Ker } f$ est un sous-module de M et $f(M)$ est un sous-module de N .

Il existe un unique isomorphisme $\bar{f} : M/\text{Ker } f \simeq f(M)$ tel que $f = i \circ \bar{f} \circ cl$, où $cl : M \rightarrow M/\text{Ker } f$ et $i : f(M) \rightarrow N$ sont les applications naturelles.

Proof : Comme $(x - y) \in \text{Ker } f$ implique $f(x) = f(y)$, on peut définir $\bar{f}(cl(x)) = f(x)$ et vérifier immédiatement la factorisation.

Définition 2.10 : $N/f(M)$ est le conoyau ($\text{Coker } f$) de l'application linéaire f .

Théorème 2.11 : Soit N un sous- A -module de M .

Si F est un sous- A -module de M/N , alors $cl^{-1}(F)$ est un sous- A -module de M contenant N .

Si N' est un sous- A -module de M contenant N , alors $cl(N') \simeq N'/N$ est un sous- A -module of M/N .

$cl^{-1}(cl(N')) = N'$ and $cl(cl^{-1}(F)) = F$.

Cette bijection entre les sous- A -modules de M contenant N , et les sous- A -modules de M/N respecte l'inclusion.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la proposition suivante.

Proposition 2.12 :

Si F est un sous- A -module de M/N , alors $cl^{-1}(F)$ est le noyau de l'homomorphisme composé

$$M \rightarrow M/N \rightarrow (M/N)/F.$$

Cet homomorphisme se factorise à travers l'isomorphisme

$$A/cl^{-1}(F) \simeq (M/N)/F.$$

Cette description de $cl^{-1}(F)$ se passe de commentaires. La factorisation se déduit du théorème de factorisation.

Définition 2.13 : Soient N un sous- A -module de M et $P \subset M$ un sous-ensemble.

$N : P = \{a \in A \mid ax \in N, \forall x \in P\}$ est le conducteur de P dans N .

L'annulateur de M est $ann(M) = (0) : M$.

146

Exercice 2.14 : Soit $x \in M$. Montrer $Ax \simeq A/((0) : x)$.

Définition 2.15 : Un A -module M est fidèle si $(0) : M = (0)$.

Exercice 2.16 : Considérer le \mathbf{Z} -module \mathbf{Q}/\mathbf{Z} .

Montrer que $((0) : x) \neq (0)$ pour tout $x \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Montrer que \mathbf{Q}/\mathbf{Z} est un \mathbf{Z} -module fidèle.

2.2 Produits et sommes directes.

Proposition 2.17 : Soient $(M_i)_{i \in E}$ des A -modules.

Le produit ensembliste $\prod_{i \in E} M_i = \{(x_i)_{i \in E}\}$ a une structure naturelle de A -module :

$$(x_i)_{i \in E} + (y_i)_{i \in E} = (x_i + y_i)_{i \in E}, \quad a((x_i)_{i \in E}) = (ax_i)_{i \in E}.$$

Définition 2.18 : La somme directe $\bigoplus_{i \in E} M_i$ est le sous- A -module de $\prod_{i \in E} M_i$ formé par les éléments

$$(x_i)_{i \in E}, \quad x_i = 0 \quad \forall i \quad \text{sauf un nombre fini.}$$

Définition 2.19 :

(i) On note nM , ou $\bigoplus_1^n M$, ou M^n la somme directe de n copies de M .

(ii) Si E est un ensemble et si $M_i = M$ pour tout $i \in E$, on note $\bigoplus_{i \in E} M$ la somme directe des A -modules M_i .

On a évidemment :

Proposition 2.20 : Si E est fini, $\bigoplus_{i \in E} M_i = \prod_{i \in E} M_i$.

2.3 Opérations sur les sous-modules d'un module.

Définition 2.21 : Soient N et N' des sous-modules de M .

$$N + N' = \{x + x', \quad x \in N, x' \in N'\}.$$

Plus généralement, si N_s est une famille de sous-modules de M ,

$$\sum_s N_s = \left\{ \sum_s x_s, \quad x_s \in N_s (\text{finite sums}) \right\}.$$

DANGER : $N \cup N'$ n'est pas un sous-module (en général).

Définition 2.22 Let \mathcal{I} be an ideal of A .

$$\mathcal{I}M = \{a_1x_1 + \dots + a_rx_r, \quad a_i \in \mathcal{I}, x_i \in M\}.$$

On démontre immédiatement le résultat suivant :

Théorème 2.23 : Si N et N' sont des sous-modules de M tels que $N \cap N' = (0)$ et $N + N' = M$, il y a un isomorphisme naturel $M = N \oplus N'$.

Il est aussi commode de dégager les deux énoncés qui suivent :

Théorème 2.24 (Les Théorèmes d'isomorphisme) :

(i) Si $N \subset N' \subset M$, où N et N' sont des sous-modules de M , il existe un isomorphisme naturel

$$M/N' \simeq (M/N)/(N'/N).$$

(ii) Si N_1 et N_2 sont des sous-modules de M , il existe un isomorphisme naturel

$$N_1/(N_1 \cap N_2) \simeq (N_1 + N_2)/N_2.$$

Démonstration :

Pour (i), on montre que le noyau de l'homomorphisme composé

$$M \rightarrow M/N \rightarrow (M/N)/(N'/N)$$

est N' , et on utilise le Théorème de factorisation.

Pour (ii), on montre que $N_1 \cap N_2$ est le noyau de l'homomorphisme naturel surjectif

$$N_1 \rightarrow (N_1 + N_2)/N_2,$$

et on utilise à nouveau le Théorème de factorisation.

2.4 Modules libres.

Définition 2.25 :

On dit que des éléments $(x_i)_{i \in E}$ d'un A -module M sont linéairement indépendants si l'application naturelle

$$\bigoplus_{i \in E} A \rightarrow \sum_{i \in E} Ax_i, \quad (a_i)_{i \in E} \rightarrow \sum_{i \in E} a_i x_i,$$

est injective.

Définition 2.26 : Un A -module M est libre s'il existe une famille d'éléments $(e_i)_{i \in E}$ de M telle que tout élément $x \in M$ s'écrit de façon unique

$$x = \sum_i a_i e_i,$$

où tous les $a_i \in A$ sauf au plus un nombre fini sont nuls.

Une telle famille est une base du module libre M .

Remarque : Il est clair que les éléments $(e_i)_{i \in E}$ de M forment une base de M si et seulement si ils sont linéairement indépendants et engendrent M .

Exemple : nA est un A -module libre.

Proposition 2.27 : Si un A -module libre L admet une base finie, toutes ses bases sont finies et ont le même nombre d'éléments. C'est le rang du module.

Je vous laisse le soin de démontrer ce résultat. On pourra par exemple démontrer que si une matrice T , à coefficients dans A , a strictement plus de ligne que de colonnes, il y a une relation entre ses lignes.

ATTENTION, il y a des A -modules qui ne sont pas libres. Par exemple A/\mathcal{I} si $\mathcal{I} \neq (0)$.

Exercice 2.28 : Montrer qu'un idéal de A est libre si et seulement si il est principal engendré par un élément non diviseur de zéro de A .

2.5 Modules d'homomorphismes.

Définition 2.29 : Si M et N sont des A -modules, $\text{Hom}_A(M, N)$ est le A -module dont les éléments sont les homomorphismes de M dans N . Si $f \in \text{Hom}_A(M, N)$ et $a \in A$, on a bien sûr posé $(af)(x) = af(x) = f(ax)$.

Si $h : N \rightarrow N'$ est un homomorphisme, $\text{Hom}_A(M, h) : \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N')$ est l'homomorphisme défini par $\text{Hom}_A(M, h)(f) = hf$.

Si $g : M' \rightarrow M$ est un homomorphisme, $\text{Hom}_A(g, N) : \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(M', N)$ est l'homomorphisme défini par $\text{Hom}_A(g, N)(f) = fog$.

Remarque : ATTENTION, il est possible que M et N soient non nuls et que $\text{Hom}_A(M, N) = (0)$. Par exemple, si $a \in A$ est un élément non diviseur de zéro, alors $\text{Hom}_A(A/aA, A) = (0)$. En effet, pour tout $y \in A/aA$, on a $af(y) = f(ay) = 0$, donc $f(y) = 0$ puisque a est non diviseur de zéro.

Définition 2.30 : Le dual M^\vee d'un A -module M est le A -module $\text{Hom}_A(M, A)$ dont les éléments sont les formes linéaires sur M .

D'après la remarque précédente, si $a \in A$ est un élément non diviseur de zéro les formes linéaires sur A/aA sont toutes nulles.

Proposition 2.31 : Soit M un A -module. L'application évaluation $e : M \rightarrow M^{\vee\vee}$, définie par $e(x)(f) = f(x)$, est linéaire (un homomorphisme).

Lorsque cette application est un isomorphisme, on dit que M est réflexif.

Théorème 2.32 : Un A -module libre de rang fini est réflexif.

Démonstration : Soit $(f_i)_{i \in I}$ un base du A -module libre L . Nous introduisons, comme pour les espaces vectoriels sur un corps, la base duale $(f_i^\vee)_{i \in I}$ de L^\vee . Elle est évidemment définie par $f_i^\vee(f_j) = \delta_{ij}$. Il faut vérifier qu'il s'agit d'une base de L^\vee . On a alors, de façon identique la base $(f_i^{\vee\vee})_{i \in I}$ de $L^{\vee\vee}$. Il reste à remarquer que $e(f_i) = f_i^{\vee\vee}$.

Remarque : Un module réflexif n'est pas nécessairement libre

Exercices 2.33 : (i) Montrer que tout idéal de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -module réflexif.

(ii) Montrer que l'idéal $(X_0, X_1)/(X_0X_3 - X_1X_2)$ de l'anneau

$\mathbf{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]/(X_0X_3 - X_1X_2)$ est réflexif et non libre.

2.6 Modules de type fini.

Définition 2.34 : Un A -module engendré par un nombre fini d'éléments est de type fini.

Proposition 2.35 : Soient M un A -module et N un sous- A -module de M . Si N et M/N sont de type fini, M est de type fini.

Démonstration :

Si $x_1, \dots, x_n \in N$ engendrent N et si $cl(y_1), \dots, cl(y_m) \in M/N$ engendrent M/N , il est clair que $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in M$ engendrent M .

Théorème 2.36 (Lemme de Nakayama) :

Soit \mathcal{J} le radical de Jacobson de A . Si M est un A -module de type fini tel que $M = \mathcal{J}M$, alors $M = (0)$.

Démonstration :

Soit (x_1, \dots, x_n) un système de générateurs de M . Comme $M = \mathcal{J}M$, il existe $a_{ij} \in \mathcal{J}$ tels que $x_i = \sum_j a_{ij}x_j$. Considérons alors la matrice carrée, $n \times n$, à coefficients dans l'anneau, $T = I_{n \times n} - (a_{ij})$. On a

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

Si ${}^tCo(T)$ est la transposée de la matrice des cofacteurs de T , on en déduit

$${}^tCo(T)T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

soit

$$det(T) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

Autrement dit $det(T)x_i = 0$ pour tout i , soit $det(T)M = 0$ puisque les éléments x_i engendrent M . Mais compte-tenu de la forme de la matrice T , on a $det(T) = 1 + a$, avec $a \in \mathcal{J}$. Comme d'après le Théorème 1.48, l'élément $1 + a$ est inversible, on en déduit que $M = (0)$.

Corollaire 2.37 : *Si M est un A -module de type fini, pour que des éléments x_1, \dots, x_n de M engendrent M il faut et il suffit que leurs classes $cl(x_1), \dots, cl(x_n) \in M/\mathcal{J}M$ engendrent $M/\mathcal{J}M$.*

Démonstration : La condition est évidemment nécessaire.

Réciproquement, si $x \in M$, il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $cl(x) = \sum a_i cl(x_i)$, soit $(x - (\sum a_i x_i)) \in \mathcal{J}M$. Si N est le sous-module de M engendré par les x_i , on en déduit $M/N = \mathcal{J}(M/N)$. Mais le Lemme de Nakayama implique alors $M/N = (0)$, et le Corollaire est démontré.

Théorème 2.38 (Cayley-Hamilton revisité) :

Soit (x_1, \dots, x_n) un système de générateurs d'un A -module de type fini M . Soit u un endomorphisme de M . Soit (a_{ij}) une matrice carrée, $n \times n$, à coefficients dans A telle que $u(x_i) = \sum_j a_{ij} x_j$ pour tout i . Si $P(X)$ est le déterminant de la matrice $XI_{n \times n} - (a_{ij})$, à coefficients dans $A[X]$, alors l'endomorphisme $P(u)$ est nul.

Démonstration : Donnons à M une structure de $A[X]$ -module en posant $Xy = u(y)$ pour tout $y \in M$. On peut le faire car u est une application A -linéaire.

On a alors

$$(XI_{n \times n} - (a_{ij})) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

En multipliant à gauche par la transposée de la matrice des cofacteurs de $(XI_{n \times n} - (a_{ij}))$, on obtient

$$det(XI_{n \times n} - (a_{ij})) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

soit $\det(XI_{n \times n} - (a_{ij}))x_i = 0$ pour tout i et $\det(XI_{n \times n} - (a_{ij}))M = (0)$.

Mais par définition de l'opération de X dans M , si $Q(X) \in A[X]$, on a $Q(X)y = Q(u)(y)$. Comme $\det(XI_{n \times n} - (a_{ij}))y = 0$ pour tout $y \in M$, il reste $P(u) = 0$.

Chapter 3

Anneaux et modules noethériens.

On démontre sans difficulté le résultat suivant:

Proposition 3.1 : *Si E est un ensemble ordonné, les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *Tout sous-ensemble admet un élément maximal.*
- (ii) *Toute suite croissante est stationnaire.*

3.1 Anneaux noethériens.

Définition 3.2 : *Si l'ensemble des idéaux d'un anneau vérifie les conditions équivalentes de la Proposition précédente, on dit que l'anneau est noethérien.*

Rappelant la bijection entre les idéaux de A/\mathcal{I} et les idéaux de A contenant \mathcal{I} , on a alors évidemment l'énoncé qui suit.

Théorème 3.3 : *Si \mathcal{I} est un idéal d'un anneau noethérien, l'anneau quotient A/\mathcal{I} est noethérien.*

Théorème 3.4 : *Un anneau est noethérien si et seulement si tous ses idéaux sont de type fini.*

Supposons d'abord que l'anneau A est noethérien. Si \mathcal{I} est un idéal de A , considérer l'ensemble des idéaux de type fini contenus dans \mathcal{I} et montrer qu'un élément maximal de cet ensemble est nécessairement égal à \mathcal{I} .

Réciproquement, supposons que tout idéal de A est de type fini. Soit \mathcal{I}_l , avec $l \geq 0$, une suite croissante d'idéaux de A . Posons $\mathcal{I} = \cup_{l \geq 0} \mathcal{I}_l$. On vérifie que \mathcal{I} est un idéal. Comme il est de type fini, soit (a_1, \dots, a_n) un système de générateurs de \mathcal{I} . Il existe un entier r tel que $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{I}_r$. On a alors $\mathcal{I} = \mathcal{I}_r$ et bien sûr $\mathcal{I}_l = \mathcal{I}_r$ pour $l > r$, donc la suite est stationnaire.

Exemples: Un corps est un anneau noethérien. Un anneau principal est noethérien.

Théorème 3.5 (Le Théorème de Hilbert) :

Si A est un anneau noethérien, l'anneau des polynômes $A[X]$ est noethérien.

Démonstration: Soit \mathcal{J} un idéal non nul de $A[X]$. Considérons, pour tout $n \geq 0$, l'ensemble \mathcal{I}_n des coefficients dominants des polynômes de degré n qui sont éléments de \mathcal{J} . Si $P \in \mathcal{J}$, on a $XP \in \mathcal{J}$, donc $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{I}_{n+1}$. Comme \mathcal{I}_n est soit un idéal de A , soit l'anneau A tout entier, il est clair qu'il existe m tel que $\mathcal{I}_n = \mathcal{I}_m$ pour $n \geq m$.

Montrons d'abord que \mathcal{J} est engendré par des polynômes de degré $\leq m$.

Si $P \in \mathcal{J}$, avec $n = d^0(P) \geq m$, on sait que le coefficient dominant de P est dans \mathcal{I}_m . Donc il existe $Q \in \mathcal{J}$, avec $d^0(Q) = m$, ayant le même coefficient dominant que P . On en déduit que $P - X^{n-m}Q$ est un polynôme de \mathcal{J} de degré $< n$ et on conclut par récurrence sur $n \geq m$.

Considérons maintenant $(a_{i1}, \dots, a_{in_i})$, pour $i \leq m$, un système de générateurs de \mathcal{I}_i et $(P_{i1}, \dots, P_{in_i})$ des polynômes de degré i , de \mathcal{J} , de coefficients dominants respectifs $(a_{i1}, \dots, a_{in_i})$. Montrons que les polynômes P_{ij} , avec $i \leq m$ et $j = 1, \dots, n_i$, engendrent \mathcal{J} .

Compte tenu de ce que nous avons vu, plus haut, il suffit de vérifier que tout polynôme, de degré $t \leq m$, de \mathcal{J} est combinaison des P_{ij} (à coefficients dans $A[X]$). On fait alors un récurrence sur t . Si $P \in \mathcal{J}$ est un polynôme, de degré $t \leq m$, soit a son coefficient dominant. Comme $a \in \mathcal{I}_t$, il existe un relation $a = b_1 a_{t1} + \dots + b_{n_t} a_{tn_t}$. On en déduit que $P - b_1 P_{t1} + \dots + b_{n_t} P_{tn_t}$ est un polynôme, de degré $< t$, de \mathcal{J} et le Théorème est démontré.

Définition 3.6 : *Un anneau quotient d'un anneau de polynômes sur un anneau A est appelé A -algèbre de type fini.*

On a alors la conséquence immédiate suivante du Théorème de Hilbert:

Théorème 3.7 : *Si A est un anneau noethérien, toute A -algèbre de type fini est un anneau noethérien.*

3.2 Anneaux noethériens factoriels.

Théorème 3.8 : *Soit A un anneau intègre noethérien. Si tout élément irréductible de A engendre un idéal premier, l'anneau A est factoriel.*

Démonstration : Il suffit de démontrer que tout élément de A est produit d'irréductibles.

Remarquons d'abord que si $aA = a'A$, alors a est produit d'irréductibles si et seulement si a' est produit d'irréductibles. On peut donc considérer l'ensemble des idéaux principaux aA de A tels que a n'est pas produit d'irréductibles. Si cet ensemble est non vide, soit cA un élément maximal de cet ensemble. Si c n'est pas irréductible, alors il existe des éléments non inversibles $e \in A$ et $f \in A$ tels que $c = ef$. Comme cA est strictement contenu dans eA et fA , les éléments e et f sont produits d'irréductibles et c aussi, ce qui est une contradiction. Donc c est irréductible, mais c'est encore une contradiction. Le Théorème est démontré.

3.3 Décomposition primaire dans les anneaux noethériens.

Définition 3.9 : On dit qu'un idéal \mathcal{I} d'un anneau A est irréductible si $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ et $\mathcal{I} \neq \mathcal{I}_1$ impliquent $\mathcal{I} = \mathcal{I}_2$.

Proposition 3.10 : Un idéal \mathcal{I} de A est irréductible si et seulement si l'idéal (0) de A/\mathcal{I} est un idéal irréductible de A/\mathcal{I} .

Définition 3.11 : On dit qu'un idéal \mathcal{I} d'un anneau A est primaire si $ab \in \mathcal{I}$ et $a \notin \mathcal{I}$ impliquent $b^n \in \mathcal{I}$ pour n assez grand (il existe n tel que $b^n \in \mathcal{I}$).

Proposition 3.12 : L'idéal \mathcal{I} de A est primaire si et seulement si tout diviseur de 0 de A/\mathcal{I} est un élément nilpotent de A/\mathcal{I} .

Exercices :

- 1) Preuve de la Proposition précédente.
- 2) Un idéal premier est primaire.
- 3) Démontrer le résultat qui suit.

Proposition 3.13 : S'il n'existe qu'un seul idéal premier (nécessairement maximal) contenant \mathcal{I} , alors \mathcal{I} est primaire.

Théorème 3.14 : Dans un anneau noethérien tout idéal irréductible est primaire.

Démonstration : Il suffit de démontrer que si dans un anneau noethérien l'idéal (0) est irréductible il est primaire, autrement dit tout diviseur de 0 est nilpotent. Supposons $ab = 0$, avec $a \neq 0$. on considère alors la suite croissante d'idéaux

$$((0) : b) \subset ((0) : b^2) \subset \dots \subset ((0) : b^n) \subset \dots$$

Elle est stationnaire, donc il existe n tel que $((0) : b^n) = ((0) : b^{n+1})$.

Montrons $(0) = b^n A \cap aA$. Soit $b^n c = ad = x \in b^n A \cap aA$. On a $b^{n+1}c = bad = 0$, donc $c \in ((0) : b^{n+1}) = ((0) : b^n)$, soit $x = b^n c = 0$. Comme (0) est irréductible, la preuve est terminée, car $(0) = b^n A \cap aA$ et $aA \neq (0)$ impliquent $b^n A = (0)$.

Corollaire 3.15 : Dans un anneau noethérien tout idéal est intersection finie d'idéaux primaires.

Sinon, soit E l'ensemble des idéaux de A qui ne sont pas intersection finie d'idéaux primaires. Soit \mathcal{I} un idéal maximal dans E .

Si \mathcal{I} n'est pas irréductible, on a $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, avec $\mathcal{I} \neq \mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I} \neq \mathcal{I}_2$. Les idéaux \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 sont alors intersections finies d'idéaux primaires et \mathcal{I} aussi, ce qui contredit l'hypothèse.

Si \mathcal{I} est irréductible, il est primaire, ce qui contredit aussi l'hypothèse. Donc E est évidemment vide.

Définition 3.16 : Si $\mathcal{I} = \bigcap_1^n \mathcal{Q}_i$, où les idéaux \mathcal{Q}_i sont primaires, on dit qu'on a une décomposition primaire de \mathcal{I} .

3.4 Radical d'un idéal dans un anneau noethérien.

Proposition 3.17 : Si \mathcal{I} est un idéal d'un anneau noethérien A , il existe n tel que $R(\mathcal{I})^n \subset \mathcal{I}$.

Il suffit bien sûr de montrer que dans un anneau noethérien le nilradical N a une puissance nulle. Mais ce nilradical est de type fini. Soit (a_1, \dots, a_r) un système de générateurs de N , et soient n_1, \dots, n_r des entiers tels que $a_i^{n_i} = 0$. Il est clair que si $l_1 + \dots + l_r \geq \sum n_i - (r - 1)$, il existe i tel que $l_i \geq n_i$, donc on a $a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_r^{l_r} = 0$. On en déduit que si $n \geq \sum n_i - (r - 1)$, on a $x_1 x_2 \dots x_n = 0$ pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n \in N$, soit $N^n = (0)$.

Théorème 3.18 : Si \mathcal{I} est un idéal primaire, son radical $R(\mathcal{I})$ est premier.

Supposons $ab \in R(\mathcal{I})$. Il existe n tel que $a^n b^n \in \mathcal{I}$. Mais $a \notin R(\mathcal{I})$ implique $a^n \notin R(\mathcal{I})$, donc $a^n \notin \mathcal{I}$ et comme \mathcal{I} est primaire il existe m tel que $(b^n)^m \in \mathcal{I}$, donc $b \in R(\mathcal{I})$.

Attention, un idéal dont le radical est premier n'est pas nécessairement primaire.

Exemple : Soit $\mathcal{I} = (X) \cap (X^2, Y^2)$, dans l'anneau $k[X, Y]$. Montrer que $R(\mathcal{I}) = (X)$, donc est un idéal premier, et que \mathcal{I} n'est pas primaire.

Définition 3.19 : Si \mathcal{Q} est un idéal primaire et si $\mathcal{P} = R(\mathcal{Q})$ est son radical, on dit que \mathcal{Q} est \mathcal{P} -primaire

Proposition 3.20 : Si \mathcal{Q} est un idéal primaire et si $\mathcal{P} = R(\mathcal{Q})$ est son radical, un élément a de l'anneau est diviseur de zéro modulo \mathcal{Q} si et seulement si $a \in \mathcal{P}$.

Si $ab \in \mathcal{Q}$, avec $b \notin \mathcal{Q}$, il existe n tel que $a^n \in \mathcal{Q}$, donc $a \in \mathcal{P}$. La réciproque est plus évidente encore.

Proposition 3.21 : Si \mathcal{I} et \mathcal{J} sont deux idéaux \mathcal{P} -primaires, alors $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ est un idéal \mathcal{P} -primaire.

Exercice : Démontrer ce résultat.

3.5 Retour sur la décomposition primaire dans les anneaux noethériens.

On étudie la décomposition primaire dans un anneau noethérien fixé A .

Définition 3.22 : Une décomposition primaire $\mathcal{I} = \bigcap_1^n \mathcal{Q}_i$ est minimale si $\mathcal{I} \neq \bigcap_{i \neq j} \mathcal{Q}_i$ pour tout j et si pour $i \neq j$ on a $R(\mathcal{Q}_i) \neq R(\mathcal{Q}_j)$.

Compte tenu de la Proposition 3.21, un idéal d'un anneau noethérien a toujours une décomposition primaire minimale.

Théorème 3.23 : Soit $\mathcal{I} = \cap_1^n \mathcal{Q}_i$ une décomposition primaire minimale de \mathcal{I} . Si \mathcal{P} est un idéal premier, alors il existe i tel que $\mathcal{P} = R(\mathcal{Q}_i)$ si et seulement si il existe $x \in A$ tel que $\mathcal{P} = (\mathcal{I} : x)$.

Montrons d'abord que si $\mathcal{P}_1 = R(\mathcal{Q}_1)$, il existe x tel que $\mathcal{P}_1 = (\mathcal{I} : x)$.

Comme la décomposition est minimale, il existe $y \in \cap_{i>1} \mathcal{Q}_i$ tel que $y \notin \mathcal{Q}_1$. On a alors $y\mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{I}$. Mais il existe n tel que $\mathcal{P}_1^n \subset \mathcal{Q}_1$, donc $y\mathcal{P}_1^n \subset \mathcal{I}$. Soit alors m le plus petit entier tel que $y\mathcal{P}_1^m \subset \mathcal{I}$. Soit $x \in y\mathcal{P}_1^{m-1}$ et $x \notin \mathcal{I}$. Remarquons que $x \notin \mathcal{Q}_1$. Il est clair que $x\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{I}$, donc $\mathcal{P}_1 \subset (\mathcal{I} : x)$. Soit $z \in (\mathcal{I} : x)$. Comme $xz \in \mathcal{I} \subset \mathcal{Q}_1$ et comme $x \notin \mathcal{Q}_1$, il existe un entier l tel que $z^l \in \mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{P}_1$, donc $z \in \mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_1 = (\mathcal{I} : x)$.

Réciproquement, supposons $\mathcal{P} = (\mathcal{I} : x)$. Remarquons d'abord que $(\mathcal{I} : x) = \cap_1^n (\mathcal{Q}_i : x)$. Comme un idéal premier est évidemment irréductible, il existe i tel que $\mathcal{P} = (\mathcal{Q}_i : x)$. Ceci démontre $\mathcal{Q}_i \subset \mathcal{P}$, donc $R(\mathcal{Q}_i) \subset \mathcal{P}$. D'autre part, il est clair que $x \notin \mathcal{Q}_i$, sinon on aurait $(\mathcal{Q}_i : x) = A$. Alors $y \in \mathcal{P}$ implique $xy \in \mathcal{Q}_i$, donc il existe l tel que $y^l \in \mathcal{Q}_i$, soit $y^l \in R(\mathcal{Q}_i)$ et $\mathcal{P} \subset R(\mathcal{Q}_i)$. Le Théorème est démontré.

Corollaire 3.24 : Si $\mathcal{I} = \cap_1^n \mathcal{Q}_i$ et $\mathcal{I} = \cap_1^m \mathcal{Q}'_i$ sont deux décompositions primaires minimales de \mathcal{I} , on a $n = m$ et il existe une permutation τ de $(1, \dots, n)$ telle que $R(\mathcal{Q}_i) = R(\mathcal{Q}'_{\tau(i)})$.

C'est une conséquence immédiate du Théorème. Elle autorise la définition suivante.

Définition 3.25 : Si $\mathcal{I} = \cap_1^n \mathcal{Q}_i$ est une décomposition primaire minimale de \mathcal{I} , les idéaux premiers $R(\mathcal{Q}_i)$ sont les idéaux premiers associés à \mathcal{I} .

On dit que \mathcal{Q}_i est une composante $R(\mathcal{Q}_i)$ -primaire de \mathcal{I} .

Théorème 3.26 : Dans un anneau noethérien, un élément est diviseur de zéro si et seulement si il est contenu dans un idéal premier associé à (0) .

Soit \mathcal{P} un idéal premier associé à (0) . On sait qu'il existe $x \in A$ tel que $\mathcal{P} = ((0) : x)$. On a évidemment $x \neq 0$. Comme $z \in \mathcal{P}$ implique $zx = 0$, l'élément z est diviseur de 0.

Réciproquement, soit $z \neq 0$ et $y \neq 0$ tels que $zy = 0$. Soit $(0) = \cap_1^n \mathcal{Q}_i$ une décomposition primaire minimale de (0) . Comme $y \neq 0$, il existe i tel que $y \notin \mathcal{Q}_i$. Mais $yz \in \mathcal{Q}_i$ implique (car \mathcal{Q}_i est primaire) qu'il existe n tel que $z^n \in \mathcal{Q}_i$, donc $z \in \mathcal{P}_i$ où \mathcal{P}_i est le radical de \mathcal{Q}_i , c'est à dire un idéal premier associé à (0) .

Corollaire 3.27 : Soit \mathcal{I} un idéal d'un anneau noethérien A . Si $x \in A$, alors $cl(x) \in A/\mathcal{I}$ est diviseur de 0 (ou égale à 0) si et seulement si x est contenu dans un idéal premier associé à \mathcal{I} .

3.6 Idéaux premiers minimaux dans un anneau noethérien.

Définition 3.28 : Un idéal premier \mathcal{P} contenant \mathcal{I} est un idéal premier minimal de \mathcal{I} si pour tout idéal premier \mathcal{P}' tel que $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, on a $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.

Théorème 3.29 : *Un idéal d'un anneau noethérien n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux, tous associés à l'idéal.*

Soit \mathcal{P} un idéal premier minimal de \mathcal{I} . Si $\mathcal{I} = \cap_1^n \mathcal{Q}_i$ est une décomposition primaire de \mathcal{I} , on sait (Proposition 1.29) qu'il existe i tel que $\mathcal{Q}_i \subset \mathcal{P}$, donc $R(\mathcal{Q}_i) \subset \mathcal{P}$, ce qui démontre le Théorème.

ATTENTION : Un idéal premier associé à \mathcal{I} n'est pas nécessairement minimal.

Exemple : Soit $\mathcal{I} = (X) \cap (X^2, Y^2)$, dans l'anneau $k[X, Y]$. Montrer que (X, Y) est un idéal premier associé à \mathcal{I} qui n'est pas minimal pour \mathcal{I} .

3.7 Modules noethériens.

Soit A un anneau (non nécessairement noethérien).

Définition 3.30 : *Un A -module M est noethérien s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :*

(i) *Tout ensemble non vide de sous-modules de M contient un élément maximal pour la relation d'inclusion.*

(ii) *Toute suite croissante de sous-modules est stationnaire.*

On a évidemment l'énoncé suivant.

Proposition 3.31 : *Si M est un A -module noethérien, les sous-modules de M et les modules quotients de M sont noethériens.*

Théorème 3.32 : *Un A -module est noethérien si et seulement si tous ses sous-modules sont de type fini.*

Nous avons déjà démontré un cas particulier de ce Théorème : Un anneau est noethérien si et seulement si tous ses idéaux sont de type fini. La preuve du cas général est strictement identique. Faites la.

Chapter 4

Anneaux et modules artiniens.

On démontre sans difficulté le résultat suivant:

Proposition 4.1 : *Si E est un ensemble ordonné, les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *Tout sous-ensemble admet un élément minimal.*
- (ii) *Toute suite décroissante est stationnaire.*

4.1 Anneaux artiniens.

Définition 4.2 : *Si l'ensemble des idéaux d'un anneau vérifie les conditions équivalentes de la Proposition précédente, on dit que l'anneau est artinien.*

Exemples :

- (i) Un corps n'a qu'un seul idéal, c'est donc un anneau artinien.
- (ii) Un anneau qui n'a qu'un nombre fini d'idéaux est évidemment artinien. Vérifier que si $n \geq 2$, alors $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ n'a qu'un nombre fini d'idéaux, donc est artinien.
- (iii) L'anneau $\mathbf{C}[X, Y]/(X^2, Y^2, XY)$ est artinien et a une infinité d'idéaux.
Pour voir cela, remarquer d'abord que $\mathbf{C}[X, Y]/(X^2, Y^2, XY)$ est un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension 3 de base $1, cl(X), cl(Y)$. Vérifier ensuite que ses idéaux sont les sous-espaces vectoriels du sous-espace vectoriel de dimension 2 engendré par $cl(X)$ et $cl(Y)$.

On en déduit alors que toute suite strictement décroissante d'idéaux est de longueur au plus 2, donc que l'anneau est artinien. Enfin un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension 2 a une infinité de sous-espaces vectoriels, donc l'anneau a une infinité d'idéaux.

Rappelant la bijection entre les idéaux de A/\mathcal{I} et les idéaux de A contenant \mathcal{I} , on a alors évidemment l'énoncé qui suit.

Théorème 4.3 : *Si \mathcal{I} est un idéal d'un anneau artinien, l'anneau quotient A/\mathcal{I} est artinien.*

Proposition 4.4 : *Un anneau artinien intègre est un corps.*

Soit $x \neq 0$ un élément de l'anneau A . Montrons que x est inversible. La suite d'idéaux $x^n A$ est décroissante, donc stationnaire. Il existe n tel que $x^n A = x^{n+1} A$. Donc Il existe $a \in A$ tel que $x^n = ax^{n+1}$. Comme A est intègre, on peut simplifier par x^n . Il reste $1 = ax$ et x est inversible.

Corollaire 4.5 : *Dans un anneau artinien tout idéal premier est maximal.*

Soit \mathcal{P} un idéal premier. Comme A/\mathcal{P} est intègre et est artinien, c'est un corps. Donc \mathcal{P} est un idéal maximal.

Proposition 4.6 : *Un anneau artinien n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux.*

Supposons l'existence d'idéaux maximaux \mathcal{M}_i , avec $i \geq 0$, deux à deux distincts.

Comme $\mathcal{M}_i \not\subset \mathcal{M}_{n+1}$, pour $i < n+1$, on a $\cap_0^n \mathcal{M}_i \not\subset \mathcal{M}_{n+1}$, donc $\cap_0^{n+1} \mathcal{M}_i$ est strictement contenu dans $\cap_0^n \mathcal{M}_i$. Nous avons construit une suite strictement décroissante infinie d'idéaux de A . C'est une contradiction.

Proposition 4.7 : *Soient A un anneau artinien et $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_r$ ses idéaux maximaux. Il existe des entiers n_1, \dots, n_r tels que*

$$(0) = \mathcal{M}_1^{n_1} \mathcal{M}_2^{n_2} \dots \mathcal{M}_r^{n_r} = \cap_1^r \mathcal{M}_i^{n_i}.$$

Comme A est artinien, il existe des entiers n_i tels que $\mathcal{M}_i^{n_i} = \mathcal{M}_i^{n_i+1}$. Montrons que

$$(0) = \mathcal{M}_1^{n_1} \mathcal{M}_2^{n_2} \dots \mathcal{M}_r^{n_r}.$$

Supposons le contraire et cherchons une contradiction.

Soit E l'ensemble des idéaux J tels que $J\mathcal{M}_1^{n_1} \mathcal{M}_2^{n_2} \dots \mathcal{M}_r^{n_r} \neq (0)$. Cet ensemble est non vide puisqu'il contient \mathcal{M}_i . Soit alors \mathcal{I} un élément minimal de E . Il existe $x \in \mathcal{I}$ tel que

$$x\mathcal{M}_1^{n_1} \mathcal{M}_2^{n_2} \dots \mathcal{M}_r^{n_r} \neq (0).$$

Comme

$$x\mathcal{M}_1^{n_1} \mathcal{M}_2^{n_2} \dots \mathcal{M}_r^{n_r} = x\mathcal{M}_1^{n_1+1} \mathcal{M}_2^{n_2+1} \dots \mathcal{M}_r^{n_r+r},$$

on a

$$x\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \dots \mathcal{M}_r \subset xA \subset \mathcal{I} \quad \text{donc} \quad x\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \dots \mathcal{M}_r = xA.$$

Il existe alors $y \in \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \dots \mathcal{M}_r$ tel que $x = yx$. Soit $x(1 - y) = 0$. Comme $y \in \cap_1^r \mathcal{M}_i = RJ(A)$, on sait (Théorème 1.48) que $1 - y$ est un élément inversible de A , donc $x = 0$, ce qui contredit $x\mathcal{M}_1^{n_1} \mathcal{M}_2^{n_2} \dots \mathcal{M}_r^{n_r} \neq (0)$.

Comme les idéaux $\mathcal{M}_i^{n_i}$ sont deux à deux comaximaux, on a (Lemme 1.51)

$$\mathcal{M}_1^{n_1} \mathcal{M}_2^{n_2} \dots \mathcal{M}_r^{n_r} = \cap_1^r \mathcal{M}_i^{n_i}$$

et la Proposition est démontrée.

Nous pouvons maintenant montrer le Théorème principal de cette section.

Théorème 4.8 : *Si A est un anneau, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) A est artinien.
- (ii) A est noethérien et tout idéal premier de A est maximal.

Démonstration :

Si A est noethérien, soit $(0) = \cap_1^r \mathcal{Q}_l$ une décomposition primaire de (0) . Comme tout idéal premier est maximal, $\sqrt{\mathcal{Q}_l}$ est un idéal maximal \mathcal{M}_l . On a $\mathcal{M}_l^n \subset \mathcal{Q}_l$ pour n assez grand. On en déduit qu'il existe des entiers positifs n_l tels que $(0) = \cap_1^r \mathcal{M}_l^{n_l}$.

Donc si l'une des conditions (i) ou (ii) est vérifiée, on a une décomposition

$$(0) = \cap_1^r \mathcal{M}_l^{n_l}.$$

Comme les idéaux \mathcal{M}_l sont maximaux, les idéaux $\mathcal{M}_l^{n_l}$ sont deux à deux comaximaux, et on a

$$A \simeq \prod_1^r A/\mathcal{M}_l^{n_l}.$$

Il est clair que A est artinien (resp. noethérien) si et seulement si $A/\mathcal{M}_l^{n_l}$ est artinien (resp. noethérien), pour tout l .

Il suffit donc de démontrer que si A est un anneau local d'idéal maximal \mathcal{M} et n un entier positif tel que $\mathcal{M}^n = (0)$, alors A est artinien si et seulement si A est noethérien.

Faisons une récurrence sur n . Si $n = 1$, l'idéal (0) est maximal, donc A est un corps et il est artinien et noethérien.

Si $n > 1$, on peut par hypothèse de récurrence supposer que l'anneau A/\mathcal{M}^{n-1} est artinien et noethérien.

Soit \mathcal{I}_r une suite croissante d'idéaux de A . Elle induit une suite croissante $(\mathcal{I}_r + \mathcal{M}^{n-1})/\mathcal{M}^{n-1}$ d'idéaux de A/\mathcal{M}^{n-1} . Comme A/\mathcal{M}^{n-1} est noethérien, cette suite est stationnaire.

Le noyau de l'application naturelle

$$\mathcal{I}_r \rightarrow (\mathcal{I}_r + \mathcal{M}^{n-1})/\mathcal{M}^{n-1}$$

est $\mathcal{I}_r \cap \mathcal{M}^{n-1}$. La suite $\mathcal{I}_r \cap \mathcal{M}^{n-1}$ est une suite croissante de sous- A -modules de \mathcal{M}^{n-1} .

On vérifie facilement que la suite \mathcal{I}_r est stationnaire si et seulement si la suite croissante $\mathcal{I}_r \cap \mathcal{M}^{n-1}$ de sous- A -modules de \mathcal{M}^{n-1} est stationnaire.

Soit maintenant \mathcal{J}_r une suite décroissante d'idéaux de A . La suite

$$\mathcal{I}_r \rightarrow (\mathcal{I}_r + \mathcal{M}^{n-1})/\mathcal{M}^{n-1}$$

est une suite décroissante d'idéaux de l'anneau artinien A , donc elle est stationnaire.

On vérifie tout aussi facilement que la suite \mathcal{J}_r est stationnaire si et seulement si la suite décroissante $\mathcal{J}_r \cap \mathcal{M}^{n-1}$ de sous- A -modules de \mathcal{M}^{n-1} est stationnaire.

Il nous reste donc à démontrer l'assertion suivante :

Toute suite croissante de sous- A -modules de \mathcal{M}^{n-1} est stationnaire si et seulement si toute suite décroissante de sous- A -modules de \mathcal{M}^{n-1} est stationnaire.

Comme $\mathcal{M}^n = (0)$, l'idéal \mathcal{M}^{n-1} de A est annihilé par \mathcal{M} . Il a donc naturellement une structure d'espace vectoriel sur A/\mathcal{M} . En effet si $a - b \in \mathcal{M}$, on a $(a - b)x = 0$ pour tout $x \in \mathcal{M}^{n-1}$, donc $ax = bx$ et on peut poser $cl(a)x = ax$.

Il est clair que les sous- A -modules de \mathcal{M}^{n-1} sont les sous- A/\mathcal{M} -espaces vectoriels de \mathcal{M}^{n-1} .

On conclut alors au moyen du Lemme qui suit.

Lemme 4.9 : Soit E un espace vectoriel sur un corps k . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Toute suite décroissante de sous-espaces vectoriels est stationnaire.
- (ii) E est de rang fini.
- (iii) Toute suite croissante de sous-espaces vectoriels est stationnaire.

Démonstration du Lemme : Il est clair que (ii) implique (i) et (iii).

Réciproquement, supposons que E n'est pas de rang fini et montrons que (i) et (iii) ne sont pas vérifiées. Considérons des éléments linéairement indépendants z_i , pour $i > 0$.

Si E_i est le sous-espace vectoriel engendré par les éléments z_1, \dots, z_i , la suite (E_i) de sous-espaces vectoriels est croissante et n'est pas stationnaire.

Si F_i est le sous-espace vectoriel engendré par les éléments z_j , avec $j \geq i$, la suite (F_i) de sous-espaces vectoriels est décroissante et n'est pas stationnaire.

Le Théorème est démontré.

4.2 Modules artiniens.

Soit A un anneau (non nécessairement artinien).

Définition 4.10 : Un A -module M est artinien s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

- (i) Tout ensemble non vide de sous-modules de M contient un élément minimal pour la relation d'inclusion.
- (ii) Toute suite décroissante de sous-modules est stationnaire.

On a évidemment l'énoncé suivant.

Proposition 4.11 : Si M est un A -module artinien, les sous-modules de M et les modules quotients de M sont artiniens.

Chapter 5

Modules de type fini sur un anneau noethérien.

Théorème 5.1 : *Si A est un anneau noethérien, un A -module M est noethérien si et seulement si il est de type fini.*

Démonstration : La condition est nécessaire d'après le Théorème précédent. Montrons qu'elle est suffisante.

Supposons d'abord que M est monogène, i.e. engendré par un élément x . Alors le Théorème de factorisation appliqué à l'application surjective $f : A \rightarrow M$ définie par $f(a) = ax$ donne un isomorphisme de A -modules $A/\mathcal{I} \simeq M$, où $\mathcal{I} = \text{ann}(x) = 0 : x$ est le noyau de f . Cet isomorphisme donne une bijection naturelle entre les sous-modules de M et les idéaux de l'anneau A/\mathcal{I} . Comme A/\mathcal{I} est un anneau noethérien, le résultat est démontré dans ce cas.

Faisons une récurrence. Supposons le résultat démontré pour tout A -module engendré par $< n$ éléments. Soit alors (x_1, \dots, x_n) un système de générateurs de M . Notons M' le sous-module de M engendré par (x_1, \dots, x_{n-1}) et $M'' = M/M'$. Ces deux A -modules sont noethériens par hypothèse de récurrence (M'' est engendré par $cl(x_n)$).

Si $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_r \subset \dots$ est une suite croissante de sous-modules de M , les suites $N_i \cap M'$ et $(N_i + M')/M'$ de sous-modules de M' et M'' sont stationnaires. Donc il existe n tel que

$$N_n \cap M' = N_m \cap M' \quad \text{et} \quad (N_n + M')/M' = (N_m + M')/M'$$

pour $m > n$. Montrons que $N_n = N_m$ pour $m > n$.

Soit $x \in N_m$. Comme $(N_n + M')/M' = (N_m + M')/M'$, il existe $y \in N_n$ tel que $(x - y) \in M'$. Mais $x, y \in N_m$ implique $(x - y) \in M' \cap N_m = M' \cap N_n$, donc $(x - y) \in N_n$, soit $x \in N_n$ car $y \in N_n$. Le Théorème est démontré.

5.1 Idéaux premiers associés à un module de type fini sur un anneau noethérien.

Définition 5.2 : Si M est un module de type fini sur un anneau noethérien A et si \mathcal{P} est un idéal premier de A , on dit que \mathcal{P} est associé à M , et on écrit $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M)$, s'il existe un élément $x \in M$ tel que $\mathcal{P} = \text{ann}(x) = (0 : x)$ (\mathcal{P} est l'annulateur de l'élément, nécessairement non nul, x).

Remarques :

(i) Les idéaux premiers associés à un idéal \mathcal{I} (voir décomposition primaire) sont les idéaux premiers associés au A -module A/\mathcal{I} (maladresse de langage mais ce n'est pas grave).

(ii) En particulier, si \mathcal{P} est un idéal premier de A on a $\text{Ass}(A/\mathcal{P}) = \{\mathcal{P}\}$.

Théorème 5.3 : Si $x \in M$ est non nul, il existe un idéal premier $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M)$ tel que $(0 : x) \subset \mathcal{P}$.

Démonstration : On considère l'ensemble des idéaux de la forme $(0 : x)$, pour $x \in M$, $x \neq 0$. Soit $(0 : z)$ un élément maximal de cet ensemble. Montrons que $(0 : z)$ est un idéal premier. Supposons $ab \in (0 : z)$ et $a \notin (0 : z)$. Alors $abz = 0$ et $az \neq 0$. Donc $b \in (0 : az)$. Mais bien évidemment, $(0 : z) \subset (0 : az)$, donc $(0 : z) = (0 : az)$. Il reste $b \in (0 : z)$ et le Théorème est démontré.

Corollaire 5.4 : Si $M \neq (0)$, alors $\text{Ass}(M)$ est non vide.

Corollaire 5.5 : Soit $a \in A$. La multiplication par a dans M n'est pas injective si et seulement si il existe $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M)$ tel que $a \in \mathcal{P}$.

Proposition 5.6 : Si M' est un sous A -module de M , alors

$$\text{Ass}(M') \subset \text{Ass}(M) \subset \text{Ass}(M') \cup \text{Ass}(M/M').$$

Démonstration : L'inclusion $\text{Ass}(M') \subset \text{Ass}(M)$ est évidente.

Soient $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M)$ et $x \in M$ tel que $\mathcal{P} = (0 : x)$.

Si $M' \cap Ax \neq (0)$, alors $\text{Ass}(M' \cap Ax) \subset \text{Ass}(Ax) = \{\mathcal{P}\}$ et $\text{Ass}(M' \cap Ax) \subset \text{Ass}(M')$, donc $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M')$.

Si $M' \cap Ax = (0)$, soit $cl(x) \in M/M'$ la classe de x . Alors $acl(x) = 0$ signifie $ax \in M' \cap Ax = (0)$, donc $ax = 0$. Il reste $(0 : cl(x)) = (0 : x) = \mathcal{P}$, donc $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M/M')$.

Corollaire 5.7 : Si \mathcal{P} est un idéal premier, minimal parmi les idéaux contenant l'idéal annulateur de M , alors $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M)$.

Démonstration :

Soit (x_1, \dots, x_n) un système de générateurs de M . Si $I_j = (0 : x_j)$, il est clair qu'on a $(0 : M) = \bigcap I_j$. Comme $(0 : M) \subset \mathcal{P}$, il existe i tel que $I_i \subset \mathcal{P}$. Comme $A/I_i \simeq Ax_i$, on a $\text{Ass}(A/I_i) = \text{Ass}(Ax_i)$. Mais comme $(0 : M) \subset I_i$, l'idéal premier \mathcal{P} est évidemment minimal parmi les idéaux premiers contenant I_i , donc $\mathcal{P} \in \text{Ass}(A/I_i)$ (décomposition primaire). Il reste $\mathcal{P} \in \text{Ass}(Ax_i) \subset \text{Ass}(M)$.

Théorème 5.8 : *Si M est un A -module de type fini, il existe une suite croissante finie de sous-modules*

$$(0) = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$$

et des idéaux premiers \mathcal{P}_i tels que $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathcal{P}_i$ pour $i > 0$.

ATTENTION, il n'y a pas d'unicité!

Démonstration : Si N est un A -module de type fini et si $\mathcal{P} \in \text{Ass}(N)$, soit $x \in N$ tel que $\mathcal{P} = (0 : x)$. Il est clair que $Ax \simeq A/\mathcal{P}$, donc il existe un sous module de N isomorphe à A/\mathcal{P} .

On prend alors $\mathcal{P}_1 \in \text{Ass}(M)$ et M_1 un sous-module de M tel que $M_1 \simeq A/\mathcal{P}_1$. Si $M/M_1 \neq (0)$, soient $\mathcal{P}_2 \in \text{Ass}(M/M_1)$ et M'_2 un sous-module de M/M_1 tel que $M'_2 \simeq A/\mathcal{P}_2$. Il existe un sous-module M_2 de M contenant M_1 tel que $M_2/M_1 = M'_2 \simeq A/\mathcal{P}_2$. On construit ainsi une suite croissante M_i de sous-modules, telle que $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathcal{P}_i$, où $\mathcal{P}_i \in \text{Ass}(M/M_{i-1})$. Comme M est noethérien, elle est stationnaire, donc il existe n tel que $M_n = M$. Le Théorème est démontré.

Corollaire 5.9 : *Si M est un A -module de type fini, $\text{Ass}(M)$ est fini.*

Démonstration : D'après la Proposition 5.6, on a

$$\begin{aligned} \text{Ass}(M) &\subset \text{Ass}(M_1) \cup \text{Ass}(M/M_1) \subset \text{Ass}(M_1) \cup \text{Ass}(M_2/M_1) \cup \text{Ass}(M/M_2) \subset \dots \\ &\text{Ass}(M_1/M_0) \cup \text{Ass}(M_2/M_1) \cup \dots \cup \text{Ass}(M_n/M_{n-1}) = \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n\}. \end{aligned}$$

5.2 Modules de longueur finie sur un anneau noethérien.

Rappelons qu'un anneau artinien est un anneau noethérien dont tous les idéaux premiers sont maximaux (Théorème 4.8). On a donc la conséquence suivante du Théorème 5.8.

Théorème 5.10 : *Soit A un anneau artinien. Si M est un A -module de type fini, il existe une suite croissante finie de sous-modules*

$$(0) = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$$

et des idéaux maximaux \mathcal{M}_i tels que $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathcal{M}_i$ pour $i > 0$.

Démonstration : Comme A est noethérien, on sait qu'il existe une telle suite croissante telle que $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathcal{P}_i$, où les \mathcal{P}_i sont des idéaux premiers (Théorème 5.8). Mais tout idéal premier de A est maximal.

Remarque : Si N est un sous-module de M tel que $M_{i-1} \subset N \subset M_i$, on a $M_{i-1} = N$ ou $M_i = N$. En effet N/M_{i-1} est un sous-module de $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathcal{M}_i$, dont les seuls sous-modules sont (0) et lui même. La suite (M_i) , qui est strictement croissante de longueur n , ne peut pas se prolonger en une suite strictement croissante plus longue.

Définition 5.11 : *Soient A un anneau noethérien et M un A -module. On dit que M est simple si les seuls sous-modules de M sont (0) et M .*

Démontrer la Proposition suivante :

Proposition 5.12 : (i) Si \mathcal{M} est un idéal maximal de A , alors A/\mathcal{M} est un module simple.

(ii) Pour tout module simple M sur un anneau noethérien A , il existe un idéal maximal \mathcal{M} de A tel que $M \simeq A/\mathcal{M}$.

Définition 5.13 : Soit M est un module sur un anneau noethérien A . Si $(0) = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$ est une suite strictement croissante de sous-modules de M telle que, pour tout i le module M_i/M_{i-1} est simple, on dit que cette suite est une suite de composition de M .

Nous avons donc démontré qu'un module de type fini sur un anneau artinien admettait une suite de composition.

Proposition 5.14 : Si un module M sur un anneau noethérien A admet une suite de composition, il est de type fini.

La preuve est une récurrence évidente sur la longueur de la suite.

Théorème 5.15 : Soit M un module sur un anneau noethérien A . Si M a une suite de composition, alors

(i) toute suite strictement croissante de sous-modules de M se prolonge en une suite de composition de M ,

(ii) toutes les suites de compositions de M ont même longueur.

Démonstration : On fait un récurrence sur $l_m(M)$ la longueur d'une suite de composition de M de longueur minimale.

Si $l_m(M) = 1$, le module M est simple. Il n'a qu'une suite de composition.

Soit $l = l_m(M)$, et soit $(0) = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_l = M$ une suite de composition de M .

Si N est un sous-module de M , on a, d'après un théorème d'isomorphisme,

$$(M_i \cap N)/(M_{i-1} \cap N) \subset (M_i/M_{i-1}),$$

donc les modules $(M_i \cap N)/(M_{i-1} \cap N)$ sont simples ou nuls. On peut donc extraire de la suite $M_i \cap N$ de sous-module de N une suite de composition de N , ce qui démontre $l_m(N) \leq l$.

De plus, si $l_m(N) = l$ on a

$$(M_i \cap N)/(M_{i-1} \cap N) = (M_i/M_{i-1})$$

pour tout i . On en déduit $M_i \cap N = M_i$ pour tout i , par récurrence sur i , et $N = M$.

Soit maintenant $(0) = N_0 \subset M_1 \subset \dots \subset N_n = M$ une suite strictement croissante de sous-module de M . Comme N_{n-1} est un sous-module stricte de M , on a $l_m(N_{n-1}) < l$, donc par hypothèse de récurrence toute suite strictement croissante de sous-modules de N_{n-1} est de longueur $< l$. En particulier $(n-1) < l$, ce qui démontre (i) et (ii).

Définition 5.16 : Soit M un module sur un anneau noethérien A .

Si M a une suite de composition, on dit que M est de longueur finie. La longueur d'une suite de composition est la longueur de M .

Si M n'a pas de suite de composition, on dit que M est de longueur infinie.

Le Théorème 5.10 s'énonce alors de la façon suivante :

Théorème 5.17 : *Un module de type fini sur un anneau artinien est de longueur finie.*

Théorème 5.18 : *Soient A un anneau noethérien, M un A -module de type fini et N un sous module de M . Alors*

$$l(M) = l(N) + l(M/N).$$

Démonstration :

Soient

$$N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_r$$

une suite strictement croissante de sous-modules de N et

$$F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_s$$

une suite strictement croissante de sous-modules de M/N .

Posons $M_i = N_i$ pour $i \leq r$ et soient M_{r+i} , pour $i = 1, \dots, s$, les sous-modules de M contenant N et tels que $M_{r+i}/N = F_i$. On a $M_i/M_{i-1} = N_i/N_{i-1}$, pour $i \leq r$, et $M_i/M_{i-1} = F_{i-r}/F_{i-1-r}$, pour $i > r$

La suite

$$M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_{r+s}$$

est strictement croissante. C'est une suite de composition de M si et seulement si les modules les suites $(N_i)_{0 \leq i \leq r}$ et $(F_j)_{0 \leq j \leq s}$ sont des suites de composition de N et M/N . Le Théorème est démontré.

Remarques :

(i) Rappelons qu'un corps est un anneau artinien. Si M est un module de type fini sur un corps, i.e. un espace vectoriel de dimension finie sur ce corps, alors $l(M)$ est la dimension de l'espace vectoriel.

(ii) Si A est artinien et M un A -module libre de rang n , alors $l(M) = nl(A)$.

Exercice (important) : Démontrer le résultat suivant.

Théorème 5.19 : *Soient k un corps et A une k -algèbre telle que pour tout idéal maximal \mathcal{M} de A l'application naturelle $k \rightarrow A/\mathcal{M}$ est un isomorphisme. Si M est un A -module (donc naturellement un k -espace vectoriel) de longueur finie, alors*

$$l_A(M) = \text{rg}_k(M).$$

5.3 Modules de type fini sur un anneau principal.

Théorème 5.20 : Soient A un anneau principal et L un A -module libre de type fini. Si M est un sous- A -module de L , alors

(i) M est libre,

(ii) il existe une base (e_i) de L , un entier $m \leq n$ et des éléments $a_i \in A$, avec $1 \leq i \leq m$, tels que $a_{i+1} \in a_i A$, pour tout i , et que $(a_1 e_1, a_2 e_2, \dots, a_m e_m)$ est une base de M .

Démonstration :

Démontrons d'abord (i) par récurrence sur le nombre maximum d'éléments linéairement indépendants de M . Si ce nombre est 0, alors $M = (0)$. Supposons maintenant $M \neq (0)$.

Soit aA un élément maximal de l'ensemble des idéaux de A qui sont de la forme $f(M)$ pour $f \in \text{Hom}_A(L, A)$. Soient $u \in \text{Hom}_A(L, A)$ tel que $aA = u(M)$ et $e' \in M$ tel que $u(e') = a$.

Si $f \in \text{Hom}_A(L, A)$, on a $f(e') \in aA$.

En effet, soit a' le pgcd de a et $f(e')$. On a $a' = ba + cf(e') = bu(e') + cf(e') = (bu + cf)(e')$, donc $a \in (bu + cf)(M)$ et $u(M) \subset (bu + cf)(M)$. D'après le choix de $aA = u(M)$, on en déduit $aA = u(M) = (bu + cf)(M)$ et $a' \in aA$.

Il en résulte qu'il existe $e \in L$ tel que $e' = ae$.

En effet, soit (f_1, \dots, f_n) une base de L . Soit $e' = \sum_1^n a_i f_i$. Les projections étant des formes linéaires sur L , nous venons de prouver $a_i \in aA$ pour tout i . On prend $e = \sum_1^n (a_i/a) f_i$.

On remarque ensuite que

$$L = Ae \oplus \text{Keru} \quad \text{et} \quad M = Ae' \oplus (\text{Keru} \cap M).$$

En effet, $Ae \cap \text{Keru} = (0)$ et si $x \in L$, on a $x = (u(x)e + (x - u(x)e)) \in Ae + \text{Keru}$.

$Ae' \cap (\text{Keru} \cap M) = (0)$ est clair. Si $z \in M$, on sait qu'il existe b tel que $u(z) = ba$, on a alors $z = be' + (z - be') \in Ae' + (\text{Keru} \cap M)$.

Le nombre maximum d'éléments linéairement indépendants de $(\text{Keru} \cap M)$ est évidemment strictement inférieur à celui de $M = Ae' \oplus (\text{Keru} \cap M)$.

Par hypothèse de récurrence, le sous-module $(\text{Keru} \cap M)$ de L est libre. On a démontré (i). En particulier le sous-module Keru de L est libre.

Démontrons maintenant (ii) par récurrence sur $n = \text{rg}(L)$.

Comme $\text{rg}(\text{Keru}) = \text{rg}(L) - 1$, il existe une base (e_2, \dots, e_n) de Keru , un entier $m \leq n$ et des éléments $a_i \in A$, avec $2 \leq i \leq m$, tels que $a_{i+1} \in a_i A$, pour tout $i \geq 2$, et que $(a_2 e_2, \dots, a_m e_m)$ est une base de $(\text{Keru} \cap M)$.

Rappelons que $M = Aae \oplus (\text{Keru} \cap M)$. Posons $e_1 = e$ et $a_1 = a$. Il suffit de prouver que $a_2 \in a_1 A$.

Soit alors $v \in \text{Hom}_A(L, A)$ la forme linéaire sur A définie par $v(e_i) = 1$ pour tout i . On a $v(a_1 e_1) = a_1$, donc $a_1 A \subset v(M)$. D'après le choix de $a_1 A = aA$, ceci implique $a_1 A = v(M)$. On en déduit $a_2 = v(a_2 e_2) \in v(M) = a_1 A$. Le Théorème est démontré.

Corollaire 5.21 : Si E est un module de type fini sur un anneau principal A , il existe des entiers m et r et des éléments non inversibles a_1, \dots, a_m de A vérifiant $a_{i+1} \in a_i A$ pour $i \geq 1$, tels que

$$E \simeq \left(\bigoplus_1^m A/a_i A \right) \oplus rA.$$

De plus, les nombres m et r et l'ensemble des idéaux $a_i A$ sont uniquement définis par M .

Démonstration : Soit (x_1, \dots, x_n) un système de générateurs de E . Si (f_1, \dots, f_n) est la base canonique de nA , considérons l'application surjective $v : nA \rightarrow E$ définie par $v(f_i) = x_i$.

Appliquons alors le Théorème au sous-module $\ker v$ du module libre nA . Soient donc (e_1, \dots, e_n) une base de nA et $a_1, \dots, a_m \in A$ vérifiant $a_{i+1} \in a_i A$ pour $i \geq 1$, tels que $(a_1 e_1, \dots, a_m e_m)$ est une base de $\ker v$. On pose $y_i = v(e_i)$. On a bien sûr $a_i y_i = 0$ pour $i = 1, \dots, m$, donc on peut définir

$$\phi : (\oplus_1^m A/a_i A) \oplus (n-m)A \rightarrow E \quad \text{par}$$

$$\phi(\text{cl}(b_1), \dots, \text{cl}(b_m), b_{m+1}, \dots, b_n) = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m + b_{m+1} y_{m+1}, \dots, b_n y_n.$$

On vérifie facilement que ϕ est un isomorphisme, ce qui montre l'existence de la décomposition annoncée.

Pour démontrer l'unicité, introduisons le sous-module de torsion de M .

Définition 5.22 : Si N est un module de type fini sur un anneau intègre A , on appelle torsion (sous-module de torsion) de N , et on note $T(N)$, le sous-module de N formé par l'ensemble des éléments de N dont l'annulateur est non nul.

Cette définition étant donnée, considérons deux décomposition de M :

$$M \simeq (\oplus_1^m A/a_i A) \oplus rA \simeq (\oplus_1^{m'} A/a'_i A) \oplus r'A.$$

Elles induisent naturellement des isomorphismes de sous-modules de torsion

$$T(M) \simeq \oplus_1^m A/a_i A \simeq \oplus_1^{m'} A/a'_i A,$$

et des quotients par ces sous-modules de torsion

$$M/T(M) \simeq rA \simeq r'A.$$

Cette dernière relation implique $r = r'$.

Soit maintenant \mathcal{M} un idéal maximal de A contenant a_1 (donc a_i pour tout i). Comme l'anneau est principal, il existe $a \in A$ tel que $\mathcal{M} = aA$.

Pour tout $b \in A$, on a $(A/bA)/a(A/bA) \simeq A/(aA+bA)$. En particulier, on a $(A/a_i A)/a(A/a_i A) \simeq A/aA$.

On en déduit

$$T(M)/aT(M) \simeq \oplus_1^m A/aA \simeq \oplus_1^{m'} A/(aA + a'_i A).$$

Comme $A/(aA + a'_i A)$ est un module quotient du module simple A/aA , il est nul si $a'_i \notin aA$ et égal à A/aA sinon. Comme $\oplus_1^m A/aA$ est un A/aA -espace vectoriel de rang m , il en résulte que $m \leq m'$ et que a divise m des a'_i .

En utilisant un diviseur irréductible de a'_1 , on démontre finalement que $m = m'$ et que a divise a'_i pour tout i .

Faisons maintenant une récurrence sur $l(T(M)) = \sum_1^m l(A/a_i A)$.

On a

$$\begin{aligned} aT(M) &\simeq \oplus_1^m aA/a_i A \simeq \oplus_1^m aA/a'_i A \\ &\simeq \oplus_1^m A/(a_i/a)A \simeq \oplus_1^m A/(a'_i/a)A. \end{aligned}$$

Mais $T(M)/aT(M) \neq 0$ et $l(T(M)) = l(aT(M)) + l(T(M)/aT(M))$ impliquent

$$l(aT(M)) < l(T(M)).$$

On a donc, par hypothèse de récurrence, $(a_i/a)A = (a'_i/a)A$, donc $a_i A = a'_i A$, pour tout i .

L'unicité est démontrée.

Chapter 6

Brève introduction à l'algèbre homologique.

6.1 Suites exactes.

L'ensemble formé par les modules sur un anneau A (les objets) et les homomorphismes de A -modules (les flèches) est une catégorie abélienne. De même les modules de type fini (rep. de longueur finie) sur un anneau noethérien A sont les objets d'une catégorie abélienne dont les flèches sont les homomorphismes de tels modules. On ne désire pas être plus précis.

Définition 6.1 : Soient $f : M' \rightarrow M$ et $g : M \rightarrow M''$ des homomorphismes de A -modules.

(i) Si $g \circ f = 0$, i.e. $f(M') \subset \text{Ker } g$, on dit que

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

est un complexe de A -modules. Le module d'homologie du complexe est $\text{Ker } g / \text{im } f$.

(ii) Si de plus $f(M') = \text{Ker } g$, i.e. son homologie est nulle, le complexe est une suite exacte.

Exemples et remarques : Soit $M \xrightarrow{f} N$ un homomorphisme.

(i) $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N$ est un complexe car $f(0) = 0$. C'est une suite exacte si f est injective.

(ii) $M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ est un complexe. C'est une suite exacte si g est surjective.

(iii) Par définition du noyau et du conoyau d'un homomorphisme, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} \text{Coker } f \rightarrow 0,$$

où i est l'inclusion, et $\pi : N \rightarrow N/f(M)$ la surjection naturelle.

(iv) Un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \xrightarrow{f'} & N' \end{array}$$

induit le diagramme commutatif suivant, dont les deux lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Ker}f & \rightarrow & M & \xrightarrow{f} & N & \rightarrow & \text{Coker}f & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \text{Ker}f' & \rightarrow & M' & \xrightarrow{f'} & N' & \rightarrow & \text{Coker}f' & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Définition 6.2 : Soit $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules. Si $f(M')$ est un facteur direct de M , on dit que la suite exacte est scindée.

Définition 6.3 : Une fonction λ définie dans la catégorie des A -modules (resp. des A -modules de type fini si A est noethérien), à valeurs dans un groupe abélien G , est additive si pour toute suite exacte

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0 \quad \text{ona} \quad \lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'').$$

Exemples :

(i) Le rang (la dimension), défini dans la catégorie des espaces vectoriels de type fini, à valeurs dans \mathbf{Z} , est une fonction additive.

(ii) La longueur, définie dans la catégorie des modules de longueur finie sur un anneau noethérien, à valeurs dans \mathbf{Z} , est une fonction additive.

Théorème 6.4 (Le Diagramme du Serpent) :

Soit

$$\begin{array}{ccccccc} M' & \xrightarrow{t} & M & \xrightarrow{u} & M'' & \rightarrow & 0 \\ g' \downarrow & & g \downarrow & & g'' \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & N' & \xrightarrow{v} & N & \xrightarrow{w} & N'' \end{array}$$

un diagramme commutatif dont les deux lignes sont exactes.

Il existe une suite exacte longue

$$\text{Ker}g' \rightarrow \text{Ker}g \rightarrow \text{Ker}g'' \rightarrow \text{Coker}g' \rightarrow \text{Coker}g \rightarrow \text{Coker}g''$$

dont les homomorphismes commutent avec les homomorphismes du diagramme.

Si de plus t est injective (resp. w est surjectif), l'application $\text{Ker}g' \rightarrow \text{Ker}g$ est injective (resp. l'application $\text{Coker}g \rightarrow \text{Coker}g''$ est surjective).

Démonstration : Compte-tenu des remarques faites plus haut, le diagramme commutatif donné se prolonge en un grand diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{Ker}g' & \rightarrow & \text{Ker}g & \rightarrow & \text{Ker}g'' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & M' & \xrightarrow{t} & M & \xrightarrow{u} & M'' & \rightarrow & 0 \\ & & g' \downarrow & & g \downarrow & & g'' \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & N' & \xrightarrow{v} & N & \xrightarrow{w} & N'' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \text{Coker}g' & \rightarrow & \text{Coker}g & \rightarrow & \text{Coker}g'' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

dont les colonnes sont exactes. L'exactitude des suites exactes

$$\text{Kerg}' \rightarrow \text{Kerg} \rightarrow \text{Kerg}'' \quad \text{et} \quad \text{Cokerg}' \rightarrow \text{Cokerg} \rightarrow \text{Cokerg}'',$$

se vérifie immédiatement.

La seule difficulté est de construire "l'homomorphisme de connection" $\text{Kerg}'' \xrightarrow{c} \text{Cokerg}'$ et de vérifier les propriétés d'exactitude qui le concernent. C'est une "chasse dans le diagramme".

Soit $x'' \in \text{Kerg}''$. On prend $x \in M$ tel que $x'' = u(x)$, puis $y = g(x)$. On remarque que $w(y) = g''(x'') = 0$. Il existe donc $y' \in N'$ tel que $y = v(y')$. On vérifie alors que la classe $\overline{y'}$ de y' dans $N'/g'(M') = \text{Cokerg}'$ ne dépend pas des choix faits, et on définit $c(x'') = \overline{y'} \in \text{Cokerg}'$.

Montrons par exemple l'exactitude de la suite

$$\text{Kerg} \rightarrow \text{Kerg}'' \xrightarrow{c} \text{Cokerg}'.$$

Il est clair que $\overline{y'} = 0$ est équivalent à l'existence de $x' \in M'$ tel que $y' = g'(x')$. Il reste à remarquer que $x'' = u(x - t(x'))$ et que $(x - t(x')) \in \text{Kerg}$.

Corollaire 6.5 :

- (i) Si g' et g'' sont injectifs, g est injectif.
- (ii) Si g est injectif et g' surjectif, g'' est injectif.
- (iii) Si g'' est injectif et g surjectif, g' est surjectif.
- (iv) Si g' et g'' sont surjectifs, g est surjectif.

Corollaire 6.6 (La suite exacte reliant intersection et somme) :

Si M_1 et M_2 sont deux sous-module d'un A -module M , il existe une suite exacte naturelle :

$$0 \rightarrow M/(M_1 \cap M_2) \rightarrow M/M_1 \oplus M/M_2 \rightarrow M/(M_1 + M_2) \rightarrow 0.$$

Démonstration : Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & M_1 \cap M_2 & \rightarrow & M_1 \oplus M_2 & \rightarrow & M_1 + M_2 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{f} & M \oplus M & \xrightarrow{g} & M & \rightarrow & 0, \end{array}$$

où $f(x) = (x, x)$ et $g(x, y) = x - y$ et les flèches verticales sont les inclusions naturelles. Il est clair que les deux lignes sont exactes. Le diagramme du serpent démontre alors l'existence de la suite exacte des conoyaux des flèches verticales, c'est à dire notre Corollaire.

Soulignons l'important cas particulier suivant :

Si \mathcal{I} et \mathcal{J} sont deux idéaux d'un anneau A , on a une suite exacte naturelle :

$$0 \rightarrow A/(\mathcal{I} \cap \mathcal{J}) \rightarrow A/\mathcal{I} \oplus A/\mathcal{J} \rightarrow A/(\mathcal{I} + \mathcal{J}) \rightarrow 0.$$

On en déduit (par une simple récurrence sur n) que si $(\mathcal{I}_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des idéaux deux à deux comaximaux, l'application naturelle

$$A/(\cap_1^n \mathcal{I}_i) \rightarrow \oplus_1^n A/\mathcal{I}_i$$

est un isomorphisme. En particulier l'application composée

$$A \rightarrow \oplus_1^n A/\mathcal{I}_i$$

est surjective, c'est le Théorème 1.52.

6.2 Appendice : Produits tensoriels et modules d'homomorphismes

Pour terminer cette première initiation à l'algèbre homologique, il me semble naturel de vous présenter ici le produit tensoriel de modules, de revenir sur les modules d'homomorphismes et de montrer certaines propriétés élémentaires des "foncteurs" qui leurs sont associés.

Définition 6.7 : Si M et N sont deux A -modules, le produit tensoriel $M \otimes_A N$, de M et N sur A , est le quotient du A -module $\bigoplus_{(x,y) \in M \times N} A(x,y)$ (le A -module libre ayant une base en bijection avec les éléments de $M \times N$) par le sous-module engendré par les éléments

$$\begin{aligned} &((x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y)), \quad ((x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2)), \\ &((ax, y) - a(x, y)) \quad \text{et} \quad ((x, ay) - a(x, y)). \end{aligned}$$

Si $N \xrightarrow{f} N'$, l'application linéaire $M \otimes_A f : (M \otimes_A N) \rightarrow (M \otimes_A N')$, définie par

$$(M \otimes_A f)(x \otimes_A y) = (x \otimes_A f(y))$$

est le produit tensoriel de M par f .

On vérifie sans difficulté la Proposition suivante selon laquelle le produit tensoriel est "solution universelle" d'un problème et son Corollaire.

Proposition 6.8 :

(i) L'application naturelle $M \times N \xrightarrow{b} M \otimes_A N$ est bilinéaire.

(ii) Pour toute application A -bilinéaire $f : M \times N \rightarrow P$ (où P est un A -module), il existe une unique factorisation $f = u \circ b$, où $u : M \otimes_A N \rightarrow P$ est une application A -linéaire.

Proposition 6.9 : Il existe des isomorphismes naturels

(i) $M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M$,

(ii) $N \otimes_A M \simeq M$,

(iii) $(M \otimes_A N) \otimes_A P \simeq M \otimes_A (N \otimes_A P)$,

(iv) $(M \oplus N) \otimes_A P \simeq (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P)$.

Théorème 6.10 : Soit $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ une suite exacte. Elle induit pour tout A -module N des suites exactes naturelles :

$$\begin{aligned} &M' \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes N} M \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes N} M'' \otimes_A N \rightarrow 0 \quad , \\ &0 \rightarrow \text{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{\text{Hom}_A(g, N)} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\text{Hom}_A(f, N)} \text{Hom}_A(M', N) \quad \text{et} \\ &0 \rightarrow \text{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{\text{Hom}_A(N, f)} \text{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{\text{Hom}_A(N, g)} \text{Hom}_A(N, M'') \quad . \end{aligned}$$

Si de plus la suite exacte $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ est scindée, elle induit des suites exactes scindées :

$$\begin{aligned} &0 \rightarrow M' \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes N} M \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes N} M'' \otimes_A N \rightarrow 0 \quad , \\ &0 \rightarrow \text{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{\text{Hom}_A(g, N)} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\text{Hom}_A(f, N)} \text{Hom}_A(M', N) \rightarrow 0 \quad \text{et} \\ &0 \rightarrow \text{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{\text{Hom}_A(N, f)} \text{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{\text{Hom}_A(N, g)} \text{Hom}_A(N, M'') \rightarrow 0 \quad . \end{aligned}$$

Autrement dit :

(i) Le "foncteur" $N \otimes_A \cdot$ de la catégorie des A -modules dans elle-même est covariant exact à droite.

(ii) Le "foncteur" $\text{Hom}_A(\cdot, N)$ est contravariant exact à gauche.

(iii) Le "foncteur" $\text{Hom}_A(N, \cdot)$ est covariant exact à gauche.

La démonstration de ce théorème est particulièrement fastidieuse. Le Lecteur qui doute est donc invité à en fournir une preuve.

Définition 6.11 : *Un A -module P est plat si pour toute suite exacte*

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0,$$

le complexe

$$0 \rightarrow M' \otimes_A P \rightarrow M \otimes_A P \rightarrow M'' \otimes_A P \rightarrow 0$$

est une suite exacte.

Exercice : Démontrer l'énoncé suivant et son Corollaire.

Proposition 6.12 : *Un A -module libre est plat.*

Corollaire 6.13 : *L'anneau de polynômes $A[X]$ est plat sur A .*

6.3 Appendice : Module dualisant sur un anneau artinien.

Définition 6.14 : *Soit A un anneau artinien. On dit qu'un A -module de type fini D est dualisant si l'application naturelle d'évaluation*

$$e_{D,M} : M \rightarrow \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, D), D) \quad , \quad e_{D,M}(x)(f) = f(x)$$

est un isomorphisme, pour tout A -module de type fini M .

Exemple : Soit k un corps. Les k -modules dualisants sont les k -espaces vectoriels de rang 1.

Théorème 6.15 : *Soient A un anneau artinien et D un A -module de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) D est un A -module dualisant.

(ii)

(a) L'annulateur $((0) : D)$ de D est nul.

(b) $A/\mathcal{M} \simeq \text{Hom}_A(A/\mathcal{M}, D)$ pour tout idéal maximal \mathcal{M} de A .

(iii)

(a) $l(D) = l(A)$.

(b) $A/\mathcal{M} \simeq \text{Hom}_A(A/\mathcal{M}, D)$ pour tout idéal maximal \mathcal{M} de A .

(iv) $l(\text{Hom}_A(M, D)) = l(M)$ pour tout A -module de type fini M .

Démonstration :

(i) \Rightarrow (ii). On suppose que D est un A -module dualisant.

L'isomorphisme

$$e_{D,A} : A \rightarrow \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(A, D), D)$$

montre évidemment que $((0) : D) \subset ((0) : A) = (0)$.

Soit \mathcal{M} un idéal maximal de A . Si $a \in \mathcal{M}$ et $f \in \text{Hom}_A(A/\mathcal{M}, D)$, on a

$$af(x) = f(ax) = f(0) = 0.$$

Donc $\text{Hom}_A(A/\mathcal{M}, D)$ est un A/\mathcal{M} -espace vectoriel. Soit r son rang. Comme

$$\text{Hom}_A(A/\mathcal{M}, D) \simeq r(A/\mathcal{M}),$$

on a

$$\text{Hom}_A(\text{Hom}_A(A/\mathcal{M}, D), D) \simeq \text{Hom}_A(r(A/\mathcal{M}), D) \simeq r(\text{Hom}_A(A/\mathcal{M}, D)) \simeq r(r(A/\mathcal{M})).$$

Mais D est dualisant, donc $A/\mathcal{M} \simeq \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(A/\mathcal{M}, D), D)$ et $r = 1$.

(ii) \Rightarrow (iii). Dégageons d'abord l'assertion suivante :

Si $A/\mathcal{M} \simeq \text{Hom}_A(A/\mathcal{M}, D)$ pour tout idéal maximal \mathcal{M} de A , alors $l(\text{Hom}_A(M, D)) \leq l(M)$ pour tout A -module de type fini M . (*)

On fait une récurrence sur $l(M)$.

Si $l(M) = 1$, il existe un idéal maximal \mathcal{M} tel que $M \simeq A/\mathcal{M}$. Donc

$$l(\text{Hom}_A(M, D)) = l(\text{Hom}_A(A/\mathcal{M}, D)) = l(A/\mathcal{M}) = 1.$$

Si $l(M) > 1$, soit $M' \subset M$ un sous-module stricte. On a $l(M') < l(M)$ et $l(M/M') < l(M)$. La suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M/M', D) \rightarrow \text{Hom}_A(M, D) \rightarrow \text{Hom}_A(M', D)$$

montre

$$l(\text{Hom}_A(M, D)) \leq l(\text{Hom}_A(M', D)) + l(\text{Hom}_A(M/M', D)).$$

Il reste $l(\text{Hom}_A(M, D)) \leq l(M') + l(M/M') = l(M)$.

On en déduit

$$l(A) \geq l(\text{Hom}_A(A, D)) = l(D) \geq l(\text{Hom}_A(D, D)).$$

Mais comme $((0) : D) = (0)$, l'application naturelle $A \rightarrow \text{Hom}_A(D, D)$ est injective. Donc $l(\text{Hom}_A(D, D)) \geq l(A)$. Il en résulte que

$$l(A) = l(\text{Hom}_A(A, D)) = l(D) = l(\text{Hom}_A(D, D)).$$

(iii) \Rightarrow (iv). On a vu plus haut ((*)) que $l(\text{Hom}_A(M, D)) \leq l(M)$ pour tout A -module de type fini M . Si M est un tel module, il existe un entier n et une surjection $nA \rightarrow M \rightarrow 0$. Si K est son noyau, il y a une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, D) \rightarrow \text{Hom}_A(nA, D) \rightarrow \text{Hom}_A(K, D) >$$

Elle montre

$$l(\text{Hom}_A(nA, D)) \leq l(\text{Hom}_A(M, D)) + l(\text{Hom}_A(K, D)).$$

Comme $\text{Hom}_A(nA, D) = nD$, on a

$$l(\text{Hom}_A(nA, D)) = nl(D) = nl(A) = l(M) + l(K).$$

Il reste

$$l(M) + l(K) \leq l(\text{Hom}_A(M, D)) + l(\text{Hom}_A(K, D)) \leq l(M) + l(K),$$

donc l'égalité annoncée.

(iv) \Rightarrow (i). Démontrons par récurrence sur $l(M)$ que l'homomorphisme d'évaluation $e_{D,M} : M \rightarrow \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, D), D)$ est un isomorphisme.

Remarquons d'abord que pour $M \neq (0)$, cet homomorphisme n'est jamais nul. Si $l(M) = 1$, on a $l(\text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, D), D)) = 1$, donc $e_{D,M}$ est nécessairement un isomorphisme.

Si $l(M) > 1$, soit $M' \subset M$ un sous-module stricte. On a $l(M') < l(M)$ et $l(M/M') < l(M)$. On considère alors le diagramme commutatif suivant (où on écrit N_D^{yv} pour $\text{Hom}_A(\text{Hom}_A(N, D), D)$)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & M' & \rightarrow & M & \rightarrow & M/M' & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & M_D^{\text{yv}} & \rightarrow & M_D^{\text{yv}} & \rightarrow & (M/M')_D^{\text{yv}} & \rightarrow & 0 \end{array} .$$

Par hypothèse de récurrence, les flèches verticales $e_{D,M'}$ et $e_{D,M/M'}$ sont des isomorphismes, donc $e_{D,M}$ aussi d'après le diagramme du serpent. Le Théorème est démontré.

Théorème 6.16 : *Soit A un anneau artinien. Si D et D' sont deux A -modules dualisants, il existe un isomorphisme $D \simeq D'$.*

Démonstration : Comme $l(D) = l(D')$, il suffit de montrer qu'il existe un homomorphisme injectif $D \rightarrow D'$.

Soient $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$ les idéaux maximaux de A .

L'application

$$\text{Hom}_A(A/\mathcal{M}_i, D) \rightarrow (0_D : \mathcal{M}_i) \quad , \quad f \rightarrow f(1)$$

est évidemment un isomorphisme. Donc $(0_D : \mathcal{M}_i) \simeq A/\mathcal{M}_i$.

Remarquons ensuite que $(0_D : \mathcal{M}_i) \cap (0_D : \cap_{j \neq i} \mathcal{M}_j) = (0)$.

En effet, si $x \in (0_D : \mathcal{M}_i) \cap (0_D : \cap_{j \neq i} \mathcal{M}_j)$, on a $x\mathcal{M}_i = x(\cap_{j \neq i} \mathcal{M}_j) = (0)$. Comme les idéaux \mathcal{M}_i et $\cap_{j \neq i} \mathcal{M}_j$ sont comaximaux, ceci implique $x = 0$. On en déduit un isomorphisme

$$\sum_1^n (0_D : \mathcal{M}_i) = \oplus_1^n (0_D : \mathcal{M}_i) \simeq \oplus_1^n A/\mathcal{M}_i.$$

De même, on a un isomorphisme

$$\sum_1^n (0_{D'} : \mathcal{M}_i) = \oplus_1^n (0_{D'} : \mathcal{M}_i) \simeq \oplus_1^n A/\mathcal{M}_i.$$

Remarquons enfin que pour tout sous-module $K \subset D$, avec $K \neq (0)$, on a

$$K \cap \left(\sum_1^n (0_D : \mathcal{M}_i) \right) \neq (0).$$

En effet, comme $K \neq (0)$, il existe i tel que $(0_K : \mathcal{M}_i) \neq (0)$. On a alors $(0_K : \mathcal{M}_i) \subset (0_D : \mathcal{M}_i)$. Comme $\sum_1^n (0_D : \mathcal{M}_i) \simeq \sum_1^n (0_{D'} : \mathcal{M}_i)$, il existe un homomorphisme injectif

$$f : \sum_1^n (0_D : \mathcal{M}_i) \rightarrow D'.$$

L'inclusion $\sum_1^n (0_D : \mathcal{M}_i) \subset D$ induit une surjection

$$Hom_A(D, D') \rightarrow Hom_A\left(\sum_1^n (0_D : \mathcal{M}_i), D'\right) = Hom_A\left(\bigoplus_1^n (0_D : \mathcal{M}_i), D'\right).$$

Donc il existe un homomorphisme $g : D \rightarrow D'$ dont la restriction à $\sum_1^n (0_D : \mathcal{M}_i)$ est f . On a évidemment

$$Ker g \cap \sum_1^n (0_D : \mathcal{M}_i) = Ker f = (0).$$

Il en résulte que $Ker g = (0)$, donc que g est injectif, et le Théorème est démontré.

Théorème 6.17 : Soient A un anneau artinien et A' une A -algèbre qui est un A -module de type fini. Si D est un A -module dualisant, alors $Hom_A(A', D)$ est un A' -module dualisant.

Remarque : $Hom_A(A', D)$ a une unique structure naturelle de A' -module.

Démonstration du Théorème 6.17: Il suffit de remarquer que si N est un A' -module et M un A -module il y a un isomorphisme naturel de foncteurs, définis dans la catégorie des A' -modules,

$$Hom_{A'}(N, Hom_A(A', M)) \simeq Hom_A(N, M)$$

(où la structure de A' -module de $Hom_A(N, M)$ est induite par N).

Définition 6.18 : Soit A un anneau artinien. Si A est un A -module dualisant, on dit que A est un anneau artinien de Gorenstein.

Théorème 6.19 : Soient A un anneau artinien et $(0) = \bigcap_1^n \mathcal{Q}_i$ une décomposition primaire minimale. Pour que A soit de Gorenstein, il faut et il suffit que \mathcal{Q}_i soit irréductible pour tout i .

Démonstration : Remarquons d'abord que l'application naturelle $A \rightarrow Hom_A(A, A)$ est évidemment un isomorphisme.

Soit $\mathcal{M}_i = \sqrt{\mathcal{Q}_i}$. C'est un idéal maximal de A et tout idéal maximal de A est ainsi obtenu. Compte tenu du Théorème 6.15, il suffit de montrer que \mathcal{Q}_i est irréductible si et seulement si $Hom_A(A/\mathcal{M}_i, A) \simeq A/\mathcal{M}_i$.

D'après le Théorème 1.52, on a $A \simeq \prod_1^n A/\mathcal{Q}_i$. Si $i \neq j$, il est clair que $\text{Hom}_A(A/\mathcal{M}_i, A/\mathcal{Q}_j) = (0)$ car les idéaux \mathcal{M}_i et \mathcal{Q}_j qui annulent ce module sont comaximaux. Il reste

$$\text{Hom}_A(A/\mathcal{M}_i, A) \simeq \text{Hom}_A(A/\mathcal{M}_i, A/\mathcal{Q}_i) \simeq (\mathcal{Q}_i : \mathcal{M}_i)/\mathcal{Q}_i.$$

Soit \mathcal{I} un idéal contenant \mathcal{Q}_i . Si $\mathcal{I}/\mathcal{Q}_i \neq (0)$, on a $\text{Hom}_A(A/\mathcal{M}_i, \mathcal{I}/\mathcal{Q}_i) \neq (0)$. Mais

$$\text{Hom}_A(A/\mathcal{M}_i, \mathcal{I}/\mathcal{Q}_i) \subset \text{Hom}_A(A/\mathcal{M}_i, A/\mathcal{Q}_i).$$

Si \mathcal{Q}_i est irréductible, (0) est irréductible dans $(\mathcal{Q}_i : \mathcal{M}_i)/\mathcal{Q}_i$. Donc ce (A/\mathcal{M}_i) -espace vectoriel est de rang 1.

Réciproquement, si $(\mathcal{Q}_i : \mathcal{M}_i)/\mathcal{Q}_i$ est un espace vectoriel de rang 1, tout idéal, qui contient \mathcal{Q}_i , contient $(\mathcal{Q}_i : \mathcal{M}_i)$, donc \mathcal{Q}_i est irréductible.

Corollaire 6.20 : *Si R est un anneau principal et x un élément non nul de R , alors R/xR est un anneau artinien de Gorenstein.*

Démonstration : Soit $x = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$ une décomposition de x en facteurs premiers. Alors

$$xR = \bigcap_1^r p_i^{n_i} R$$

est une décomposition primaire minimale de xR . Il suffit de démontrer que $p_i^{n_i} R$ est un idéal irréductible. C'est un excellent exercice.

Chapter 7

Anneaux et modules de fractions.

7.1 Anneaux de fractions.

Exemple : Considérons dans $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ la relation d'équivalence

$$(a, s) \sim (b, t) \quad \text{si} \quad at - bs = 0.$$

Notons a/s , la classe d'équivalence de (a, s) . Dans l'ensemble des classes d'équivalence on vérifie que les opérations

$$a/s + b/t = (at + bs)/st \quad \text{et} \quad (a/s)(b/t) = ab/st$$

sont bien définies. Elles font de cet ensemble un corps commutatif dont les éléments neutres sont $0/s$, pour l'addition, et $1/1$ pour la multiplication.

Ce corps est évidemment \mathbf{Q} . L'application $i : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$, définie par $i(a) = a/1$, est l'inclusion naturelle de \mathbf{Z} dans \mathbf{Q} .

Définition 7.1 : Une partie S d'un anneau A est multiplicativement stable si $1 \in S$ et si $s, s' \in S$ implique $ss' \in S$.

Définition 7.2 : Soit S est une partie multiplicativement stable de l'anneau A . On note $S^{-1}A$ l'ensemble des classes d'équivalence de $A \times S$ pour la relation

$$(a, s) \sim (b, t) \quad \text{si} \quad \exists \quad r \in S \quad \text{avec} \quad r(at - bs) = 0.$$

On note a/s la classe de (a, s) .

On démontre sans difficulté le Théorème suivant :

Théorème 7.3 : Les opérations $a/s + b/t = (at + bs)/st$ et $(a/s)(b/t) = ab/st$ sont bien définies dans $S^{-1}A$.

Elles donnent à $S^{-1}A$ une structure d'anneau commutatif telle que l'application naturelle (dite de localisation) $i : A \rightarrow S^{-1}A$, définie par $i(a) = a/1$, est un homomorphisme d'anneaux.

Le noyau de cette application naturelle est l'idéal $\cup_{s \in S} (0 : s)$ formé par les éléments de A qui sont annulés par un élément de S .

Remarques et exemples :

- (i) $S^{-1}A = 0$ si et seulement si $0 \in S$.
- (ii) Si A est intègre, la partie $S = A - \{0\}$ de A est multiplicativement stable et $S^{-1}A$ est un corps. C'est le corps des fractions de A (souvent noté $K(A)$). Tout anneau de fractions d'un anneau intègre est naturellement contenu dans son corps des fractions.
- (iii) Soit $s \in A$. Si $S = \{s^n\}_{n \geq 0}$, on écrit A_s plutôt que $S^{-1}A$. Si s est nilpotent, alors $A_s = (0)$.
- (iv) Vérifier que l'homomorphisme d'anneaux $A[X] \rightarrow A_s$, tel que $X \rightarrow 1/s$, induit un isomorphisme $A[X]/(sX - 1) \simeq A_s$.
- (v) Il est clair que si \mathcal{P} est un idéal premier de A , la partie $S = A - \mathcal{P}$ est multiplicativement stable. Attention, toutes les parties multiplicativement stables ne sont pas de ce type, $(A - S)$ n'est pas nécessairement un idéal.

Définition 7.4 : Si \mathcal{P} est un idéal premier de A et $S = A - \mathcal{P}$, on note $A_{\mathcal{P}}$ l'anneau $S^{-1}A$.

Proposition 7.5 : Pour tout idéal premier \mathcal{P} de A , on a $A_{\mathcal{P}} \neq (0)$.

C'est clair.

Exemple : Soit $\mathcal{M} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$. C'est l'idéal maximal de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ formé par les polynômes $P \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ tels que $P(a_1, \dots, a_n) = 0$. Alors l'anneau de fractions rationnelles $A_{\mathcal{M}}$ est l'anneau des fonctions rationnelles définies au point $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{C}^n$.

Théorème 7.6 : Soient S est une partie multiplicativement stable de l'anneau A et $l : A \rightarrow S^{-1}A$ l'application de localisation.

- (i) Pour tout $s \in S$, l'élément $l(s) \in S^{-1}A$ est inversible.
- (ii) Si $f : A \rightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux tel que $f(s)$ est inversible pour tout $s \in S$, il existe un unique homomorphisme d'anneaux $\bar{f} : S^{-1}A \rightarrow B$ tel que $f = \bar{f} \circ l$.

On a bien sûr $l(s)1/s = 1/1$, ce qui prouve (i). On pose $\bar{f}(a/s) = f(a)s^{-1}$ et on vérifie (ii).

Exemple : Si A est un anneau intègre et $f : A \rightarrow K$ un homomorphisme injectif à valeurs dans un corps, cet homomorphisme a une factorisation naturelle à travers le corps $K(A)$ des fractions de A . En effet, comme f est injectif, $f(s)$ est inversible pour $s \neq 0$. On peut appliquer le Théorème.

Proposition 7.7 : Si A est un anneau intègre et E l'ensemble des idéaux maximaux de A , on a

$$A = \bigcap_{\mathcal{M} \in E} A_{\mathcal{M}}.$$

Démonstration : Soit $x/y \in \bigcap_{\mathcal{M} \in E} A_{\mathcal{M}}$. Alors $x \in yA_{\mathcal{M}}$ pour tout idéal maximal \mathcal{M} . Donc le conducteur $yA : x$ n'est contenu dans aucun idéal maximal de A . On a donc $yA : x = A$, soit $x \in yA$ et $x/y \in A$.

7.2 Modules de fractions.

Définition 7.8 : Soient S est une partie multiplicativement stable de l'anneau A et M un A -module. On note $S^{-1}M$ l'ensemble des classes d'équivalence de $M \times S$ pour la relation

$$(x, s) \sim (y, t) \quad \text{si} \quad \exists \quad r \in S \quad \text{avec} \quad r(xt - ys) = 0.$$

On note x/s la classe de (x, s) .

On démontre sans difficulté le Théorème suivant :

Théorème 7.9 : Les opérations $x/s + y/t = (tx + sy)/st$ (pour $x, y \in M$ et $s, t \in S$) et $(a/s)(x/t) = ax/st$ (pour $x \in M$, $a \in A$ et $s, t \in S$) sont bien définies.

Elles donnent à $S^{-1}M$ une structure de $S^{-1}A$ -module (donc aussi de A -module).

L'application naturelle (dite de localisation) $l_M : M \rightarrow S^{-1}M$, définie par $l_M(x) = x/1$, vérifie $l_M(ax) = l_A(a)l_M(x)$.

Le noyau de cette application naturelle est le sous-module $\cup_{s \in S} (0_M : s)$, formé par les éléments de M qui sont annulés par un élément de S .

Remarques :

(i) Si $s \in A$ et $S = \{s^n\}_{n \geq 0}$, on écrit M_s plutôt que $S^{-1}M$.

(ii) Dans le cas $S = A - \mathcal{P}$ où \mathcal{P} est un idéal premier de A , on écrit à nouveau $M_{\mathcal{P}}$ pour $S^{-1}M$.

Le résultat suivant se passe de commentaires.

Théorème 7.10 : Si $\phi : M \rightarrow N$ est un homomorphisme de A -modules, l'application

$$S^{-1}\phi(x/s) = \phi(x)/s$$

de $S^{-1}M$ dans $S^{-1}N$ est bien définie.

C'est un homomorphisme de $S^{-1}A$ -modules.

On a $S^{-1}\phi(l_M(x)) = l_N(\phi(x))$.

Théorème 7.11 :

(i) Si ϕ et ψ sont deux homomorphismes composables de A -modules, on a

$$S^{-1}(\phi \circ \psi) = S^{-1}\phi \circ S^{-1}\psi.$$

(ii) Si $M \xrightarrow{\psi} N \xrightarrow{\phi} P$ est une suite exacte de A -modules, alors

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\psi} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}\phi} P$$

est une suite exacte de $S^{-1}A$ -modules.

Montrons (ii) ((i) est évident). Soit $x/s \in \text{Ker } S^{-1}\phi$. On a $\phi(x)/s = 0$. Donc, il existe $t \in S$ tel que $t\phi(x) = 0$, soit $\phi(tx) = 0$. Il existe alors $y \in M$ tel que $tx = \psi(y)$. On en déduit $x/s = \psi(y/st)$.

Pour conclure ces généralités, je vous laisse le soin de comprendre et démontrer les six énoncés qui suivent :

Proposition 7.12 : Soient $S \subset T$ deux parties multiplicativement stables de A et M (resp. B) un A -module (resp. une A -algèbre).

Si $l : A \rightarrow S^{-1}A$ est l'homomorphisme de localisation, il existe une identification naturelle de $T^{-1}A$ -modules (resp. $T^{-1}A$ -algèbres).

$$T^{-1}M \simeq l(T)^{-1}S^{-1}M \quad \text{resp.} \quad T^{-1}B \simeq l(T)^{-1}S^{-1}B$$

Corollaire 7.13 : Si \mathcal{P} est un idéal premier, $A_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$ est un corps.

Proposition 7.14 :

(i) Si N est un sous- A -module de M , alors $S^{-1}N$ est naturellement un sous- $S^{-1}A$ -module de $S^{-1}M$.

(ii) Dans ce cas, il y a une identification naturelle $S^{-1}M/S^{-1}N \simeq S^{-1}(M/N)$.

(iii) Si N' est un autre sous- A -module de M , on a

$$S^{-1}(N + N') = S^{-1}N + S^{-1}N' \quad \text{et} \quad S^{-1}(N \cap N') = S^{-1}N \cap S^{-1}N'.$$

(iv) Si F est un sous- $S^{-1}A$ -module de $S^{-1}M$, alors $F = S^{-1}(l_M^{-1}(F))$

Corollaire 7.15 :

Si M est noethérien, alors $S^{-1}M$ est noethérien. En particulier un anneau de fractions d'un anneau noethérien est noethérien.

Proposition 7.16 : Soit (x_1, \dots, x_n) un système de générateurs du A -module M , alors $(x_1/1, \dots, x_n/1)$ est un système de générateurs du $S^{-1}A$ -module $S^{-1}M$.

Corollaire 7.17 : Si M est un A -module de type fini et S une partie multiplicativement stable de A , les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $S^{-1}M = 0$.

(ii) Il existe $s \in S$ tel que $sM = 0$.

(iii) Il existe $s \in S$ tel que $M_s = 0$.

7.3 Support d'un module.

Définition 7.18 : le support $\text{Supp}(M)$ d'un A -module M est l'ensemble des idéaux premiers \mathcal{P} de A tels que $M_{\mathcal{P}} \neq (0)$.

Proposition 7.19 : (i) $\text{Supp}(A) = \text{Spec}A$.

(ii) Si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de A -modules, on a

$$\text{Supp}(M) = \text{Supp}(M') \cup \text{Supp}(M'').$$

Nous avons déjà vu (i).

Exercice : Démontrer (ii) en utilisant le Théorème 7.11.

Théorème 7.20 :

- (i) $M = 0$ si et seulement si $\text{Supp}(M) = \emptyset$.
- (ii) $M = 0$ si et seulement si pour tout idéal maximal \mathcal{M} de A , on a $M_{\mathcal{M}} = (0)$.
- (iii) Si M est un A -module de type fini, $\mathcal{P} \in \text{Supp}M$ si et seulement si \mathcal{P} contient l'idéal $0 : M$ annulateur de M .

Démonstration : Pour prouver (i) et (ii), il suffit évidemment de démontrer que si $M_{\mathcal{M}} = (0)$ pour tout idéal maximal \mathcal{M} de A , alors $M = (0)$.

Soit $x \in M$. Comme l'image de x dans $M_{\mathcal{M}}$ est nulle, il existe $s \notin \mathcal{M}$ tel que $sx = 0$. Donc l'annulateur $0 : x$ de x n'est contenu dans aucun idéal maximal de A . C'est donc "l'idéal unité", et $1x = 0$ (pour tout $x \in M$). Soit $M = (0)$.

Pour prouver (iii), remarquons d'abord que si $0 : M \not\subset \mathcal{P}$, il existe $s \in (A - \mathcal{P}) \cap 0 : M$. Donc M , qui est annulé par $s \in S = (A - \mathcal{P})$, est contenu dans le noyau de l'homomorphisme de localisation $M \rightarrow M_{\mathcal{P}}$. Ceci qui prouve que $M_{\mathcal{P}} = (0)$. Soit $\mathcal{P} \notin \text{Supp}(M)$.

Soit maintenant (x_1, \dots, x_n) un système de générateurs de M . Si $0 : M \subset \mathcal{P}$, il existe i tel que $0 : x_i \subset \mathcal{P}$ (car $0 : M = \bigcap_i (0 : x_i)$). Pour prouver $M_{\mathcal{P}} \neq (0)$, il suffit de vérifier $(Ax_i)_{\mathcal{P}} \neq (0)$.

L'application $A \rightarrow M$ définie par $a \rightarrow ax_i$ induit évidemment un isomorphisme $A/(0 : x_i) \simeq (Ax_i)_{\mathcal{P}}$. Comme $\mathcal{P}/(0 : x_i)$ est un idéal premier de l'anneau quotient $A/(0 : x_i)$, on sait que $(A/(0 : x_i))_{(\mathcal{P}/(0 : x_i))} \neq (0)$. On vérifie immédiatement que $(A/(0 : x_i))_{\mathcal{P}} = (A/(0 : x_i))_{(\mathcal{P}/(0 : x_i))}$.

Corollaire 7.21 : Si M est un A -module de type fini, $\text{Supp}(M)$ est un fermé de $\text{Spec}A$ (pour la topologie de Zariski).

C'est le fermé défini par l'annulateur de M .

Corollaire 7.22 : Si $f : M \rightarrow N$ est un homomorphisme de A -modules, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est injectif (resp. surjectif, bijectif).
- (ii) Pour tout idéal premier $\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)$ (resp. $\mathcal{P} \in \text{Supp}(N)$, $\mathcal{P} \in \text{Supp}(M) \cup \text{Supp}(N)$), l'homomorphisme localisé $f_{\mathcal{P}} : M_{\mathcal{P}} \rightarrow N_{\mathcal{P}}$ est injectif (resp. surjectif, bijectif).
- (iii) Pour tout idéal maximal $\mathcal{M} \in \text{Supp}(M)$ (resp. $\mathcal{M} \in \text{Supp}(N)$, $\mathcal{M} \in \text{Supp}(M) \cup \text{Supp}(N)$), l'homomorphisme localisé $f_{\mathcal{M}} : M_{\mathcal{M}} \rightarrow N_{\mathcal{M}}$ est injectif (resp. surjectif, bijectif).

Démonstration : Soit $K = \text{Ker}f$. Si $f_{\mathcal{M}}$ est injectif pour tout $\mathcal{M} \in \text{Supp}(M)$, alors $K_{\mathcal{M}} = (0)$ pour tout $\mathcal{M} \in \text{Supp}(K)$, donc $K = (0)$ d'après le Théorème, et f est injectif. On procède de manière identique pour étudier $\text{Coker}f$. On a donc démontré (iii) \Rightarrow (i), l'unique implication non triviale du Corollaire.

Théorème 7.23 : Soit M un A -module de type fini. La fonction

$$\{\mathcal{P}\} \rightarrow r_{g_{A_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}}}(M_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}M_{\mathcal{P}}),$$

définie sur $\text{Spec}A$, est semi-continue supérieurement.

Démonstration : Soient $\mathcal{P} \in \text{Spec}A$ et $r = \text{rg}_{A_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}}(M_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}M_{\mathcal{P}})$.

Il existe $x_1, \dots, x_r \in M$ tels que $cl(x_1/1), \dots, cl(x_r/1) \in M_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}M_{\mathcal{P}}$ engendrent $M_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}M_{\mathcal{P}}$.

D'après le Lemme de Nakayama, $x_1/1, \dots, x_r/1 \in M_{\mathcal{P}}$ engendrent ce $A_{\mathcal{P}}$ -module.

Soit N le sous-module de M engendré par x_1, \dots, x_r . Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0.$$

On a $(M/N)_{\mathcal{P}} = (0)$. D'après le Corollaire 7.17, il existe $s \notin \mathcal{P}$ tel que $(M/N)_s = (0)$. Autrement dit, pour tout idéal premier $\mathcal{Q} \in \text{Spec}A - V(sA)$, les éléments $x_1/1, \dots, x_r/1 \in M_{\mathcal{Q}}$ engendrent le $A_{\mathcal{Q}}$ -module $M_{\mathcal{Q}}$. Il en résulte que $cl(x_1/1), \dots, cl(x_r/1) \in M_{\mathcal{Q}}/\mathcal{Q}M_{\mathcal{Q}}$ engendrent ce $A_{\mathcal{Q}}/\mathcal{Q}A_{\mathcal{Q}}$ -espace vectoriel, dont le rang est donc ≤ 1 , ce qui démontre le Théorème.

Théorème 7.24 : Soient A un anneau noethérien et M un A -module de type fini. Alors M est de longueur finie si et seulement si tout idéal premier de $\text{Supp}(M)$ est maximal.

Démonstration :

Si M est de longueur finie, soit $(0) = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_l = M$ une suite de composition de M . Pour tout $i \geq 1$, il existe un idéal maximal \mathcal{M}_i tel que $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathcal{M}_i$. On a

$$\text{Supp}(M) = \cup_i \text{Supp}(M_i/M_{i-1}) = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_l\}.$$

Réciproquement, on sait (Théorème 5.8) qu'il existe une suite croissante finie $(0) = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_l = M$ de sous-modules de M et des idéaux premiers \mathcal{P}_i tels que $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathcal{P}_i$. Il est clair que $\mathcal{P}_i \in \text{Supp}(M)$. Si tout idéal premier de $\text{Supp}(M)$ est maximal, c'est une suite de composition, donc M est de longueur finie.

Théorème 7.25 : Soient M un A -module.

(i) L'application naturelle

$$f : M \rightarrow \prod_{\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)} M_{\mathcal{P}}, \quad f(x) = (x/1)_{\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)}$$

est injective.

(ii) On a

$$f(M) = \{(x_{\mathcal{P}}/s_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)}\}, \quad x_{\mathcal{P}}s_{\mathcal{P}'} = x_{\mathcal{P}'}s_{\mathcal{P}} \quad \forall \mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \text{Supp}(M).$$

(iii) Si tout idéal premier de $\text{Supp}(M)$ est maximal et si $\text{Supp}(M)$ est fini, on a

$$f(M) = \prod_{\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)} M_{\mathcal{P}}.$$

Démonstration : Soit $x \in M$ un élément de $\text{Ker}(f)$. Alors, pour tout $\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)$, il existe $s \notin \mathcal{P}$ tel que $sx = 0$. Donc $(Ax)_{\mathcal{P}} = (0)$ pour tout $\mathcal{M} \in \text{Supp}(M)$. Comme $\text{Supp}(Ax) \subset \text{Supp}(M)$, on a montré que $\text{Supp}(Ax) = \emptyset$, donc (Théorème 7.20) que $Ax = (0)$.

Il est clair que $f(M)$ est dans le sous-module décrit de $\prod_{\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)} (x_{\mathcal{P}}/s_{\mathcal{P}})$. Mais si $x = (x_{\mathcal{P}}/s_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)}$ est dans ce sous-module, on a $s_{\mathcal{P}}x \in f(M)$. Donc le conducteur $M : x = \text{ann}(M + Ax/M)$ de x dans M n'est contenu dans aucun idéal premier de $\text{Supp}(M + Ax)$. Ce conducteur est A et $x \in f(M)$.

Supposons maintenant que $\text{Supp}(M)$ est fini et ne contient que des idéaux premiers maximaux. Remarquons que si $\mathcal{N}, \mathcal{M} \in \text{Supp}(M)$, on a

$$(M_{\mathcal{M}})_{\mathcal{N}} = M_{\mathcal{M}} \quad \text{si } \mathcal{N} = \mathcal{M} \quad \text{et} \quad (M_{\mathcal{M}})_{\mathcal{N}} = (0) \quad \text{si } \mathcal{N} \neq \mathcal{M}.$$

Comme $\text{Supp}(M)$ est fini, on a

$$\left(\prod_{\mathcal{M} \in \text{Supp}(M)} M_{\mathcal{M}} \right)_{\mathcal{N}} = \prod_{\mathcal{M} \in \text{Supp}(M)} (M_{\mathcal{M}})_{\mathcal{N}} = M_{\mathcal{N}}.$$

L'application localisée

$$f_{\mathcal{N}} : M_{\mathcal{N}} \rightarrow \left(\prod_{\mathcal{M} \in E} M_{\mathcal{M}} \right)_{\mathcal{N}} = M_{\mathcal{N}}$$

est l'identité, pour tout $\mathcal{N} \in \text{Supp}(M)$, donc f est un isomorphisme (Théorème 7.20).

Exercices : Démontrer les résultats suivants.

(i) Dans le cas où $\text{Supp}(M)$ est fini et ne contient que des idéaux premiers maximaux, soient \mathcal{M}_i , avec $i = 1, \dots, n$, les idéaux du support de M . Si

$$K_i = \text{Ker}(M \rightarrow M_{\mathcal{M}_i}),$$

montrer

$$M_{\mathcal{M}_i} = M/K_i.$$

(ii)

Théorème 7.26 : Soient M un A -module et K_i , avec $i = 1, \dots, n$, des sous-modules de M tels que $(0) = \bigcap_i K_i$ et que $\text{Supp}(M/K_i) \cap \text{Supp}(M/K_j) = \emptyset$, pour $i \neq j$. L'homomorphisme naturel

$$M \rightarrow \bigoplus_i (M/K_i)$$

est un isomorphisme.

(iii)

Théorème 7.27 : Soit M un module de type fini sur un anneau artinien R . Si $M_{\mathcal{M}}$ est un $R_{\mathcal{M}}$ -module libre pour tout idéal maximal \mathcal{M} de R , alors M est un R -module libre.

7.4 Localisation et idéaux.

Soit \mathcal{I} est un idéal de A . On note $\mathcal{I}S^{-1}A$ l'idéal de $S^{-1}A$ engendré par l'image $l_A(\mathcal{I})$ de \mathcal{I} dans $S^{-1}A$ (par l'homomorphisme de localisation). On vérifie immédiatement que

$$\mathcal{I}S^{-1}A = \{a/s\} \quad \text{pour } a \in \mathcal{I} \quad \text{et } s \in S.$$

On a alors évidemment :

Lemme 7.28 : $(\mathcal{I} \cap \mathcal{I}')S^{-1}A = \mathcal{I}S^{-1}A \cap \mathcal{I}'S^{-1}A$.

Remarque : Si $\mathcal{I} \cap S \neq \emptyset$, alors $\mathcal{I}S^{-1}A = S^{-1}A$.

Si \mathcal{J} est un idéal de $S^{-1}A$, on note (c'est un abus de langage) $\mathcal{J} \cap A$ l'image inverse $l_A^{-1}(\mathcal{J})$ de \mathcal{J} par l'homomorphisme de localisation. C'est un idéal de A .

Si \mathcal{I} est un idéal de A , il est clair que $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}S^{-1}A \cap A$.

On a déjà démontré (dans le cas plus général des modules) l'énoncé qui suit :

Proposition 7.29 : $(\mathcal{J} \cap A)S^{-1}A = \mathcal{J}$ pour tout idéal de $S^{-1}A$.

Corollaire 7.30 : Si A est un anneau principal et S une partie multiplicativement stable de A , alors $S^{-1}A$ est un anneau principal.

Théorème 7.31 :

(i) Soit \mathcal{P} un idéal premier de A . Si $\mathcal{P} \cap S = \emptyset$, alors $\mathcal{P}S^{-1}A$ est un idéal premier de $S^{-1}A$ et $\mathcal{P}S^{-1}A \cap A = \mathcal{P}$.

(ii) Soit \mathcal{P}' un idéal premier de $S^{-1}A$. Alors $(\mathcal{P}' \cap A)S^{-1}A = \mathcal{P}'$.

On a ainsi définie une bijection respectant l'inclusion entre l'ensemble des idéaux premiers de A disjoints de S d'une part, et l'ensemble des idéaux premiers de $S^{-1}A$ d'autre part.

Démonstration :

(i) Si $(a/s)(a'/s') \in \mathcal{P}S^{-1}A$, il existe $t \in S$ tel que $taa' \in \mathcal{P}$. Comme $t \notin \mathcal{P}$, ceci implique $a \in \mathcal{P}$ ou $a' \in \mathcal{P}$.

Soit $a \in \mathcal{P}S^{-1}A \cap A$. Il existe $a' \in \mathcal{P}$ et $s \in S$ tels que $a/1 = a'/s$. Autrement dit, il existe $t \in S$ tel que $tsa \in \mathcal{P}$. Comme $ts \notin \mathcal{P}$, on a $a \in \mathcal{P}$, ce qui prouve $\mathcal{P}S^{-1}A \cap A \subset \mathcal{P}$, donc (i).

Comme (ii) est un cas particulier de la Proposition précédente, le Théorème est démontré.

Définition 7.32 : Si $a \in A$, on note $D(a)$ l'ouvert $\text{Spec}(A) - V(aA)$ de $\text{Spec}(A)$.

On a alors les deux conséquences suivantes immédiates du Théorème.

Corollaire 7.33 : Soit $a \in A$. L'application $\mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}' \cap A$, de $\text{Spec}(A_a)$ dans l'ouvert $D(a)$ de $\text{Spec}(A)$, est un homéomorphisme, pour la topologie de Zariski.

Corollaire 7.34 : Si \mathcal{P} est un idéal premier de A , l'idéal $\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$ est l'unique idéal maximal de l'anneau $A_{\mathcal{P}}$ (autrement dit, l'anneau $A_{\mathcal{P}}$ est local d'idéal maximal $\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$).

Signalons enfin l'énoncé bien commode qui suit.

Corollaire 7.35 : Soit $A \subset B$ une inclusion d'anneaux. Soient S une partie multiplicativement stable de A et \mathcal{P} un idéal premier de A disjoint de S . Si \mathcal{N} un idéal premier de B disjoint de S ,

$$\mathcal{N} \cap A = \mathcal{P} \iff \mathcal{N}S^{-1}B \cap S^{-1}A = \mathcal{P}S^{-1}A.$$

Démonstration :

Supposons $\mathcal{N} \cap A = \mathcal{P}$. On a $(\mathcal{N}S^{-1}B \cap B) \cap A = \mathcal{P}$, donc $(\mathcal{N}S^{-1}B \cap S^{-1}A) \cap A = \mathcal{P}$. Ceci implique $\mathcal{N}S^{-1}B \cap S^{-1}A = \mathcal{P}S^{-1}A$ d'après le Théorème.

Réciproquement, si $\mathcal{N}S^{-1}B \cap S^{-1}A = \mathcal{P}S^{-1}A$, on a $\mathcal{N}S^{-1}B \cap S^{-1}A \cap A = \mathcal{P}$, donc $\mathcal{N}S^{-1}B \cap B \cap A = \mathcal{P}$ et $\mathcal{N} \cap A = \mathcal{P}$ (en utilisant deux fois le Théorème).

7.5 Localisation et anneaux factoriels.

Théorème 7.36 : *Si A est un anneau factoriel et S une partie multiplicativement stable de A , alors $S^{-1}A$ est un anneau factoriel.*

Démonstration : Remarquons d'abord que si $a \in A$ est un élément irréductible tel que $aA \cap S = \emptyset$, alors $aS^{-1}A$ est un idéal premier de $S^{-1}A$ (Théorème 7.31) et a est un élément irréductible de $S^{-1}A$.

Montrons alors que tout élément de $S^{-1}A$ est produit de tels éléments et d'unités de $S^{-1}A$.

Soit $a/s \in S^{-1}A$. Soit $a = a_1 \dots a_n$ une décomposition de a en produit d'éléments irréductibles de A . Si $a_i A \cap S \neq \emptyset$, il est clair que a_i est une unité de $S^{-1}A$. Donc $a/s = (a_1/1) \dots (a_n/1)(1/s)$ est la décomposition annoncée.

Nous pouvons maintenant démontrer rapidement le Théorème 1.60.

Théorème 7.37 : *Si A est factoriel, l'anneau de polynômes $A[X]$ est factoriel.*

Les éléments irréductibles de $A[X]$ sont

(i) les scalaires irréductibles,

(ii) les polynômes $P \in A[X]$ tels que les coefficients de P sont sans facteur commun (de pgcd 1) et que P est un polynôme irréductible de $K[X]$, où K est le corps des fractions de A .

Démonstration :

Remarquons d'abord que si $P = QR$, où $P, Q, R \in A[X]$, et si Q et R sont sans facteurs scalaires irréductibles, alors P est sans facteur scalaire irréductible.

Soit $c \in A$ un scalaire irréductible. Alors $cA[X] = \text{Ker}(A[X] \rightarrow (A/cA)[X])$ est un idéal premier de $A[X]$. Donc si c divise PQ , on a $PQ \in cA[X]$ et $P \in cA[X]$ ou $Q \in cA[X]$.

Remarquons ensuite, c'est clair, que si P est sans facteur scalaire irréductible et si a et b sont deux scalaires non nuls tels que a divise bP , alors a divise b .

Montrons enfin que si $P \in A[X]$ est sans facteur scalaire irréductible et irréductible dans $K[X]$, alors $PA[X]$ est un idéal premier.

Supposons $QR \in PA[X]$, avec $Q, R \in A[X]$. Comme $QR \in PK[X]$ et comme $PK[X]$ est premier, on a, par exemple, $Q \in PK[X]$. Donc il existe $s \in A$, $s \neq 0$, tel que $sQ \in PA[X]$. Soit $sQ = PP_1$. Il existe $t \in A$, $t \neq 0$, tel que $P_1 = tP'$ où $P' \in A[X]$ est sans facteur scalaire irréductible. Comme $sQ = tPP'$, où PP' est un polynôme sans facteur scalaire irréductible, il est clair que s divise t et $Q = (t/s)PP' \in PA[X]$.

Les éléments irréductibles décrits dans l'énoncé engendrent donc tous des idéaux premiers. Il suffit de prouver que tout élément $P \in A[X]$ est produit de tels éléments. Démontrons le par récurrence sur le degré de P .

C'est clair si $d^0(P) = 0$. Supposons $d^0(P) > 0$.

Si P est irréductible, il n'a pas de facteur scalaire irréductible. Montrons que P est irréductible dans $K[X]$. Sinon, $P = RT$, avec $R, T \in K[X]$ et $0 < d^0(R), d^0(T)$. Il existe alors $s \in A$ tel que $sP = R'T'$, avec $R', T' \in A[X]$. Soient r (resp. t) un pgcd des coefficients de R' (resp. T'). On a alors $sP = rtR''T''$, où R'' et T'' sont sans facteurs scalaires irréductibles, donc $R''T''$ aussi. Il en résulte que s divise rt . Donc $P = (rt/s)R''T''$ est réductible, c'est une contradiction.

Si P est réductible, soient s un pgcd de ses coefficients et $P' = P/s$. Si P' est irréductible, nous venons de voir qu'il est irréductible dans $K[X]$. Si P' n'est pas irréductible, il existe $R, T \in A[X]$, avec $d^0(R), d^0(T) < d^0(P')$, tels que $P' = RT$. On conclut par récurrence. Le Théorème est démontré.

7.6 Localisation et décomposition primaire.

Théorème 7.38 : Soit A un anneau noethérien.

(i) Soit \mathcal{Q} un idéal primaire de A . Si $\mathcal{Q} \cap S = \emptyset$, alors $\mathcal{Q}S^{-1}A$ est un idéal primaire de $S^{-1}A$ et $\mathcal{Q}S^{-1}A \cap A = \mathcal{Q}$.

(ii) Soit \mathcal{Q}' un idéal primaire de $S^{-1}A$. Alors $(\mathcal{Q}' \cap A)$ est un idéal primaire de A disjoint de S .

On a ainsi définie une bijection respectant l'inclusion entre l'ensemble des idéaux primaires de A disjoints de S d'une part, et l'ensemble des idéaux primaires de $S^{-1}A$ d'autre part.

Démonstration : Elle est pratiquement identique à la précédente.

(i) Si $(a/s)(a'/s') \in \mathcal{Q}S^{-1}A$, il existe $t \in S$ tel que $taa' \in \mathcal{Q}$. Comme $t^n \notin \mathcal{Q}$ pour tout n , ceci implique $aa' \in \mathcal{Q}$, donc $a^n \in \mathcal{Q}$ ou $a'^n \in \mathcal{Q}$ pour n assez grand.

Soit $a \in \mathcal{Q}S^{-1}A \cap A$. Il existe $a' \in \mathcal{Q}$ et $s \in S$ tels que $a/1 = a'/s$. Autrement dit, il existe $t \in S$ tel que $tsa \in \mathcal{Q}$. Comme S est multiplicativement stable et disjointe de \mathcal{Q} , on sait que $(ts)^n \notin \mathcal{Q}$ pour tout $n \geq 0$. Mais \mathcal{Q} est primaire, donc ceci implique $a \in \mathcal{Q}$. On a montré l'inclusion $\mathcal{P}S^{-1}A \cap A \subset \mathcal{P}$, donc (i).

Pour (ii), supposons $ab \in \mathcal{Q}' \cap A$, donc $(a/1)(b/1) \in \mathcal{Q}'$. Si $a/1 \notin \mathcal{Q}'$, il existe n tel que $b^n/1 \in \mathcal{Q}'$, donc $b^n \in \mathcal{Q}' \cap A$.

Le Théorème est démontré.

Corollaire 7.39 : Soit A un anneau noethérien. Soient \mathcal{I} un idéal de A et $\mathcal{I} = \bigcap_1^n \mathcal{Q}_i$ une décomposition primaire de \mathcal{I} . Alors

$$(i) \quad \mathcal{I}S^{-1}A = \bigcap_{(\mathcal{Q}_i \cap S = \emptyset)} \mathcal{Q}_i S^{-1}A$$

est une décomposition primaire de $\mathcal{I}S^{-1}A$ (dans $S^{-1}A$).

$$(ii) \quad \mathcal{I}S^{-1}A \cap A = \bigcap_{(\mathcal{Q}_i \cap S = \emptyset)} \mathcal{Q}_i$$

est une décomposition primaire de $\mathcal{I}S^{-1}A \cap A$ (dans A).

Si la décomposition primaire de \mathcal{I} est minimale, ces deux décompositions primaires sont aussi minimales.

Démonstration : On sait que si $\mathcal{Q}_i \cap S \neq \emptyset$, alors $\mathcal{Q}_i S^{-1}A = S^{-1}A$. Sinon, d'après le Théorème précédent, $\mathcal{Q}_i S^{-1}A$ est un idéal primaire et $\mathcal{Q}_i S^{-1}A \cap A = \mathcal{Q}_i$. Le Corollaire se déduit alors du Lemme 7.28 pour (i) et du Lemme général suivant pour (ii) :

Lemme 7.40 : Soient \mathcal{I} et \mathcal{J} deux idéaux de A . On a $(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})S^{-1}A \cap A = (\mathcal{I}S^{-1}A \cap A) \cap (\mathcal{J}S^{-1}A \cap A)$.

Démonstration du Lemme : Il y a une inclusion évidente. Soit $a \in \mathcal{I}S^{-1}A \cap A \cap \mathcal{J}S^{-1}A \cap A$. Il existe $s, t \in S$, $b \in \mathcal{I}$ et $c \in \mathcal{J}$ tels que $a/1 = b/s = c/t$. On en déduit l'existence de $r \in S$ tel que $ra = a' \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$, donc $a/1 = a'/r \in (\mathcal{I} \cap \mathcal{J})S^{-1}A$ et $a \in (\mathcal{I} \cap \mathcal{J})S^{-1}A \cap A$.

Corollaire 7.41 : L'anneau A est noethérien. Soient \mathcal{I} un idéal de A et $\mathcal{I} = \bigcap_1^n \mathcal{Q}_i$ une décomposition primaire minimale de \mathcal{I} . Si l'idéal premier $\mathcal{P}_i = \sqrt{\mathcal{Q}_i}$ est un idéal premier minimal de \mathcal{I} , alors

$$\mathcal{Q}_i = \mathcal{I}A_{\mathcal{P}_i} \cap A.$$

Démonstration du Corollaire : C'est une conséquence immédiate du Corollaire précédent. Si \mathcal{P} est un idéal premier associé à \mathcal{I} différent de \mathcal{P}_i , on a $\mathcal{P} \not\subset \mathcal{P}_i$ car \mathcal{P}_i est minimal. On en déduit $\mathcal{Q}_j \not\subset \mathcal{P}_i$ pour $j \neq i$, et on applique alors le Corollaire précédent.

Remarque : Rappelons que les idéaux premiers associés à \mathcal{I} (ou A/\mathcal{I}) sont uniquement déterminés par \mathcal{I} . Nous venons de prouver qu'il en allait de même des composantes primaires de \mathcal{I} suivant un idéal premier minimal de \mathcal{I} . Autrement dit,

Théorème 7.42 :

Soient $\mathcal{I} = \cap_1^n \mathcal{Q}_i$ et $\mathcal{I} = \cap_1^n \mathcal{Q}'_i$ deux décompositions primaires minimales de \mathcal{I} ordonnées telles que $R(\mathcal{Q}_i) = R(\mathcal{Q}'_i)$.

Si $R(\mathcal{Q}_i) = R(\mathcal{Q}'_i)$ est un idéal premier minimal de \mathcal{I} , on a $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}'_i$.

Si $\mathcal{P} = R(\mathcal{Q}_i) = R(\mathcal{Q}'_i)$, on a $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}'_i = I_{A_{\mathcal{P}}} \cap A$.

7.7 Retour sur les idéaux premiers minimaux.

Définition 7.43 : *Soient M un A -module et $\mathcal{P} \in \text{Supp}M$. On dit que \mathcal{P} est un idéal premier minimal de M si $\text{Supp}(M_{\mathcal{P}}) = \{\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}\}$.*

Remarque : On vérifie immédiatement que cette définition est compatible avec la Définition 3.28 donnée dans le cas où A est noethérien et M de la forme A/\mathcal{I} .

Proposition 7.44 : *Si \mathcal{P} est un idéal premier minimal de A et si $a \in \mathcal{P}$, il existe un entier positif r et un élément $s \notin \mathcal{P}$ tels que $a^r s = 0$.*

Démonstration : Soit a' l'image de a dans $A_{\mathcal{P}}$ par l'application de localisation. Comme $\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$ est le nilradical de $A_{\mathcal{P}}$, il existe r tel que $a'^r = 0$. Il existe donc $s \notin \mathcal{P}$ tel que $a^r s = 0$. Le Corollaire est démontré.

Définition 7.45 (*puissances symboliques d'un idéal premier*) :

Soient A un anneau (non nécessairement noethérien) et \mathcal{P} un idéal premier de A . La puissance symbolique n -ième de \mathcal{P} est l'idéal

$$\mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}^n A_{\mathcal{P}} \cap A.$$

Exercice : Démontrer les deux Propositions suivantes.

Proposition 7.46 : *Si \mathcal{M} est un idéal maximal, alors $\mathcal{M}^{(n)} = \mathcal{M}^n$.*

Proposition 7.47 : *Si $\mathcal{P} = aA$, alors $\mathcal{P}^{(n)} = a^n A = \mathcal{P}^n$.*

Comme il est clair que \mathcal{P} est un idéal premier minimal de \mathcal{P}^n , on a l'énoncé suivant.

Proposition 7.48 : *Si A est noethérien, $\mathcal{P}^{(n)}$ est la composante \mathcal{P} -primaire de \mathcal{P}^n .*

7.8 Localisation et idéaux premiers associés.

Théorème 7.49 : Soient A un anneau noethérien et M un A -module de type fini. Alors

$$\mathcal{P}S^{-1}A \in \text{Ass}(S^{-1}M) \iff \mathcal{P} \in \text{Ass}(M) \quad \text{et } \mathcal{P} \cap S = \emptyset.$$

Démonstration : Soit \mathcal{P} un idéal premier de A tel que $\mathcal{P} \cap S = \emptyset$. Si $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M)$, il existe $x \in M$ tel que $\mathcal{P} = 0 : x$, soit $A/\mathcal{P} \simeq Ax$. Ceci induit un isomorphisme

$$S^{-1}A/\mathcal{P}S^{-1}A \simeq S^{-1}Ax \subset S^{-1}M,$$

donc $\mathcal{P}S^{-1}A = 0 : x$, où on a confondu x avec son image dans $S^{-1}M$. Nous avons prouvé

$$\mathcal{P}S^{-1}A \in \text{Ass}(S^{-1}M).$$

Réciproquement, supposons $\mathcal{P}S^{-1}A \in \text{Ass}(S^{-1}M)$. Il existe $x \in M$ et $s \in S$ tels que

$$\mathcal{P}S^{-1}A = (0 : (x/s)).$$

On en déduit d'abord $\mathcal{P}S^{-1}A = 0 : (x/1)$ et ensuite qu'il existe $t \in S$ tel que $\mathcal{P} = (0 : tx)$.

Corollaire 7.50 : Soient A un anneau noethérien et M un A -module de type fini. Les idéaux premiers minimaux de M sont en nombre fini, tous associés à M .

Démonstration : Si $\text{Supp}(M_{\mathcal{P}}) = \{\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}\}$, on a évidemment $\text{Ass}(M_{\mathcal{P}}) = \{\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}\}$, donc $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M)$, d'après le Théorème 7.49. Comme $\text{Ass}(M)$ est fini, la démonstration aussi.

Chapter 8

Extensions entières d'anneaux.

8.1 Eléments algébriques, éléments transcendants, éléments entiers.

Définition 8.1 : Soient A un sous-anneau d'un anneau B et x un élément de B .

On dit que x est algébrique sur A s'il existe un polynôme non nul $P \in A[X]$ tel que $P(x) = 0$. Si x n'est pas algébrique sur A , on dit que x est transcendant sur A .

On dit que x est entier sur A s'il existe un polynôme unitaire $P \in A[X]$ tel que $P(x) = 0$.

Remarques :

- (i) Entier implique évidemment algébrique.
- (ii) Si A est un corps, entier et algébrique sont équivalents

Définition 8.2 : Si $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ est une relation non triviale, à coefficients $a_i \in A$, on dit que c'est une relation de dépendance algébrique de x sur A . Si $a_0 = 1$, c'est une relation de dépendance intégrale sur A .

Définition 8.3 : Si K est un corps et si x est algébrique sur K , le polynôme minimal de x sur K est l'unique polynôme unitaire engendrant l'idéal maximal de $K[X]$ noyau de l'homomorphisme de K -algèbres $K[X] \rightarrow K[x]$ tel que $X \rightarrow x$.

Proposition 8.4 : Le degré du polynôme minimal de x sur K est le rang du K -espace vectoriel $K[x]$.

Démonstration : Soit $P = X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n$ le polynôme minimal de x sur K . On a $K[X]/(P) \simeq K[x]$. Il est clair que $(1, x, \dots, x^{n-1})$ est une base de $K[x]$ sur K .

ATTENTION : Il n'y a pas de polynôme minimal pour un élément x entier sur un anneau A . De plus, si $A[x]$ est clairement un A -module de type fini (voir le Théorème qui suit), ce n'est pas en général un A -module libre.

Théorème 8.5 : Soient A un sous-anneau d'un anneau B et x un élément de B . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) x est entier sur A .

(ii) La A -algèbre $A[x]$ est un A -module de type fini.

(iii) Il existe un $A[x]$ -module M , d'annulateur nul, qui est un A -module de type fini pour sa structure induite.

Démonstration : Si x est entier sur A , il existe un polynôme unitaire $P \in A[X]$ tel que $P(x) = 0$, donc une relation

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

à coefficients $a_i \in A$. Il en résulte que x^n est contenu dans le sous- A -module de B engendré par $1, x, \dots, x^{n-1}$. Les relations

$$x^{n+m} + a_1x^{n+m-1} + \dots + a_{n-1}x^{m+1} + a_nx^m = 0,$$

montrent que x^{n+m} appartient au sous- A -module de B engendré par $1, x, \dots, x^{n+m-1}$. Une récurrence évidente montre alors que toutes les puissances de x sont contenues dans le sous- A -module de B engendré par $1, x, \dots, x^{n-1}$. On a prouvé (i) \Rightarrow (ii).

(ii) \Rightarrow (iii) est évident en prenant $M = A[x]$.

Pour (iii) \Rightarrow (i), on utilise le Théorème de Cayley-Hamilton revisité.

Soit (z_1, \dots, z_n) un système de générateurs de M comme A -module. Il existe $a_{ij} \in A$ tels que $xz_i = \sum_1^n a_{ij}x_j$. Le polynôme $P(X) = \det(XI_{n \times n} - (a_{ij}))$, à coefficients dans A , est unitaire, et on sait que l'endomorphisme $P(x)$ de M , i.e. la multiplication par $P(x)$ dans M , est nul (Cayley-Hamilton). Donc $P(x)$ est dans l'annulateur du $A[x]$ -module M que nous avons supposé nul. Il reste $P(x) = 0$, donc x est entier sur A .

Corollaire 8.6 : Si x est entier sur A , alors tout élément de $A[x]$ est entier sur A .

Démonstration : Si $y \in A[x]$, alors $A[x]$ est évidemment un $A[y]$ -module qui est un A -module de type fini. De plus, comme $1 \in A[x]$, son annulateur est (0).

Remarque : En démontrant le Théorème 8.5, nous avons aussi prouvé le résultat "plus précis" suivant :

Proposition 8.7 : Soit \mathcal{I} un idéal de A . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une relation $x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n = 0$, avec $b_i \in \mathcal{I}$ pour tout i .

(ii) La A -algèbre $A[x]$ est un A -module de type fini et il existe un entier m tel que $x^m A[x] \subset \mathcal{I}A[x]$.

(iii) Il existe un $A[x]$ -module M , d'annulateur nul, qui est un A -module de type fini pour sa structure induite et un entier m tel que $x^m M \subset \mathcal{I}M$.

Démonstration :

Les implications (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) sont tout aussi évidentes que pour le Théorème 8.5. Pour (iii) \Rightarrow (i), il suffit de prouver que x^m est racine d'une équation de dépendance intégrale à coefficients non dominants dans \mathcal{I} . Autrement dit on peut supposer $xM \subset \mathcal{I}M$. On revient à la démonstration du Théorème 8.5 en remarquant qu'on peut prendre $a_{ij} \in \mathcal{I}$. Dans ce cas les coefficients non dominants du polynôme $P(X) = \det(XI_{n \times n} - (a_{ij}))$ sont dans \mathcal{I} .

8.2 Extensions finies, extensions entières, extensions algébriques d'anneaux.

Définition 8.8 : Si tout élément de B est algébrique (resp. entier) sur A , on dit que B est algébrique (resp. entier) sur A , ou que $A \subset B$ est une extension algébrique (resp. entière) d'anneaux.

Si $f : A \rightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux tels que B est algébrique (resp. entier) sur $f(A)$, on dit que l'homomorphisme f est algébrique (resp. entier) (et parfois que B est algébrique (resp. entier) sur A , par abus de langage).

Définition 8.9 : On dit qu'une extension $A \subset B$ d'anneaux est finie si B est un A -module de type fini.

Proposition 8.10 :

(i) Si B est entier (resp. fini) sur A et si \mathcal{J} est un idéal de B , alors B/\mathcal{J} est entier (resp. fini) sur $A/(\mathcal{J} \cap A)$.

(ii) Si B est entier (resp. fini) sur A et si S est une partie multiplicativement stable de A , alors $S^{-1}B$ est entier (resp. fini) sur $S^{-1}A$.

Démonstration : (i) est évident. Pour (ii), considérons $x/s \in S^{-1}B$. Comme x est entier sur A , il existe une relation $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, à coefficients $a_i \in A$. Elle induit une relation

$$(x/s)^n + (a_1/s)(x/s)^{n-1} + \dots + (a_{n-1}/s^{n-1})(x/s) + a_n/s^n = 0,$$

qui montre que x/s est entier sur $S^{-1}A$. Si de plus (x_1, \dots, x_n) est un système de générateurs du A -module B , on sait que $(x_1/1, \dots, x_n/1)$ est un système de générateurs du $S^{-1}A$ -module $S^{-1}B$.

Le Théorème 8.5 a la conséquence immédiate suivante :

Théorème 8.11 : Une extension finie d'anneaux est entière.

Théorème 8.12 : Si $A \subset B$ et $B \subset C$ sont deux extensions finies, alors $A \subset C$ est une extension finie.

Démonstration : Soient (b_1, \dots, b_r) un système de générateurs de B comme A -module, et (c_1, \dots, c_m) un système de générateurs de C comme B -module. Si $z \in C$, il existe des éléments $y_i \in B$ tels que $z = \sum y_i c_i$. Mais il existe des éléments $x_{ij} \in A$ tels que $y_i = \sum x_{ij} b_j$. On en déduit $z = \sum x_{ij} b_j c_i$, donc $(b_j c_i)_{i,j}$ est un système fini de générateurs du A -module C .

Corollaire 8.13 : Si $A \subset B$ et $B \subset C$ sont deux extensions entières, alors $A \subset C$ est une extension entière.

Démonstration : Soit $z \in C$. Si $z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n = 0$ est une relation de dépendance intégrale de z sur B , il est clair que z est entier sur la sous- A -algèbre $B' = A[b_1, b_2, \dots, b_n]$ de B . D'après la Proposition B' est une extension finie de A . Comme $B'[z]$ est finie sur B' , on en déduit que $B'[z]$ est finie sur A , donc $B'[z]$ est entier sur A et z est entier sur A .

Corollaire 8.14 : *L'ensemble des éléments de B entiers sur A est une sous- A -algèbre de B . C'est la fermeture intégrale de A dans B .*

Démonstration : Si x et y sont deux éléments de B entiers sur A , il suffit de montrer $A[x, y]$ est fini sur A .

Mais $A[x]$ est fini sur A . Comme y est entier sur A , il est entier sur $A[x]$. Donc $A[x, y]$ est fini sur $A[x]$ qui est fini sur A . Alors $A[x, y]$ est fini sur A d'après la Proposition.

Exercice : Démontrer la Proposition suivante :

Proposition 8.15 : *Si A' est la fermeture intégrale de A dans B et si S est une partie multiplicativement stable de A , alors $S^{-1}A'$ est la fermeture intégrale de $S^{-1}A$ dans $S^{-1}B$.*

Définition 8.16 : *Si tout élément de B entier sur A est dans A , on dit que A est intégralement fermé dans B .*

Définition 8.17 : *Si un anneau intègre A est intégralement fermé dans son corps des fractions, on dit que A est intégralement clos.*

Exercice : Démontrer le Théorème suivant :

Théorème 8.18 : *Un anneau factoriel est intégralement clos.*

L'énoncé qui suit sera démontré en travaux dirigés.

Théorème 8.19 : *Si A est un anneau intègre et intégralement clos, l'anneau de polynômes $A[X]$ est intégralement clos.*

Proposition 8.20 :

(i) *Si A est intégralement fermé dans B et si S est une partie multiplicativement stable de A , alors $S^{-1}A$ est intégralement fermé dans $S^{-1}B$. En particulier, si A est intégralement clos, alors $S^{-1}A$ est intégralement clos.*

(ii) *Réciproquement, soit $A \subset B$ est une extension d'anneaux. Pour que A soit intégralement fermé dans B , il faut et il suffit que pour tout idéal maximal \mathcal{M} de A l'anneau local $A_{\mathcal{M}}$ soit intégralement fermé dans $S^{-1}B$, où on a posé $S = A - \mathcal{M}$. En particulier, si A est intègre et si $A_{\mathcal{M}}$ est intégralement clos pour tout idéal maximal \mathcal{M} de A , alors A est intégralement clos.*

Démonstration : (i) se déduit immédiatement de la Proposition 8.15.

Pour (ii), soit $x \in B$ un élément entier sur A . Alors pour tout idéal maximal \mathcal{M} de A , il existe $a \in A$ et $s \in A - \mathcal{M}$ tels que $x/1 = a/s \in A_{\mathcal{M}}$. Il en résulte que l'idéal "conducteur" $A : x$ de x dans A n'est contenu dans aucun idéal maximal de A . C'est donc l'idéal unité et $x \in A$.

8.3 Les Théorèmes de relèvement

Dégageons d'abord l'énoncé suivant, dont nous saisissons rapidement l'importance.

Théorème 8.21 : *Si $A \subset B$ est une extension entière d'anneaux intègres, A est un corps si et seulement si B est un corps.*

Démonstration : Supposons d'abord que A est un corps. Soit $x \in B$, $x \neq 0$.

Soit $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ est une relation de dépendance intégrale de degré minimum, de x sur A . Alors $a_n \neq 0$, sinon on peut diviser par x et on trouve une relation de degré $(n-1)$. On en déduit $x(x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1})a_n^{-1} = -1$, donc x est inversible.

Réciproquement, supposons que B est un corps. Soit $a \in A$, $a \neq 0$. Alors $a^{-1} \in B$. Donc il existe une relation $a^{-n} + a_1a^{1-n} + \dots + a_{n-1}a^{-1} + a_n = 0$, avec $a_i \in A$. En multipliant cette relation par a^{n-1} , on en déduit

$$a^{-1} = -(a_1 + a_2a + \dots + a_{n-1}a^{n-2} + a_na^{n-1}) \in A.$$

Donc a est inversible dans A .

Corollaire 8.22 : *Soient $K \subset L$ est une extension de corps et $x \in L$. Alors x est algébrique sur K si et seulement si $K[x]$ est un corps.*

Démonstration : Si x est algébrique sur K , alors $K[x]$ est une extension entière intègre du corps K , donc un corps d'après le Théorème. Sinon, $K[x]$ est isomorphe à l'anneau de polynômes $K[X]$, donc $x^{-1} \notin K[x]$.

Corollaire 8.23 (du Théorème 8.21) : *Si $A \subset B$ est une extension entière d'anneaux et si \mathcal{P} est un idéal premier de B , alors \mathcal{P} est maximal si et seulement si l'idéal $\mathcal{P} \cap A$ de A est maximal.*

Démonstration : Comme $A/(\mathcal{P} \cap A) \subset B/\mathcal{P}$ est une extension entière d'anneaux intègres, c'est le Théorème précédent.

Théorème 8.24 : *Soit $A \subset B$ une extension entière d'anneaux.*

- (i) *Si \mathcal{P} est un idéal premier de A , il existe un idéal premier \mathcal{P}' de B tel que $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$.*
- (ii) *Si \mathcal{P}' et \mathcal{P}'' sont deux idéaux premiers de B tels que*

$$\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}'' \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}'' \cap A,$$

alors $\mathcal{P}' = \mathcal{P}''$

Démonstration : Supposons d'abord que \mathcal{P} est l'unique idéal maximal de A . Alors on sait, d'après le Corollaire précédent, que si \mathcal{M} est un idéal maximal de B , on a $\mathcal{M} \cap A = \mathcal{P}$, ce qui démontre (i) dans ce cas.

Dans le cas général, considérons la partie multiplicativement stable $S = A - \mathcal{P}$. Alors $S^{-1}B$ est entier sur l'anneau $S^{-1}A = A_{\mathcal{P}}$. Mais nous savons que ce dernier anneau est local d'idéal maximal $\mathcal{P}S^{-1}A$, i.e. $\mathcal{P}S^{-1}A$ est son unique idéal maximal. D'après le cas précédemment étudié, il existe un idéal premier (nécessairement maximal) \mathcal{M} de $S^{-1}B$ tel que $\mathcal{M} \cap S^{-1}A = \mathcal{P}S^{-1}A$. Prenons alors $\mathcal{P}' = \mathcal{M} \cap B$. On a

$$\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{M} \cap B \cap A = \mathcal{M} \cap S^{-1}A \cap A = \mathcal{P}S^{-1}A \cap A = \mathcal{P}.$$

Pour (ii), posons $S = A - \mathcal{P}$, où $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}'' \cap A$. Comme $\mathcal{P}S^{-1}A$ est un idéal maximal se $S^{-1}A$, les idéaux premiers $\mathcal{P}'S^{-1}B$ et $\mathcal{P}''S^{-1}B$ de $S^{-1}B$ sont maximaux. L'inclusion $\mathcal{P}'S^{-1}B \subset \mathcal{P}''S^{-1}B$ démontre l'égalité annoncée.

Corollaire 8.25 (*Le premier Théorème de relèvement*) :

Si $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1$ est une suite croissante d'idéaux premiers de A et si \mathcal{P}'_0 est un idéal premier de B tel que $\mathcal{P}'_0 \cap A = \mathcal{P}_0$, il existe un idéal premier \mathcal{P}'_1 de B tel que $\mathcal{P}'_0 \subset \mathcal{P}'_1$ et que $\mathcal{P}'_1 \cap A = \mathcal{P}_1$.

Démonstration : Comme $A/\mathcal{P}_0 \subset B/\mathcal{P}'_0$ est une extension entière, il existe un idéal premier \mathcal{N} de B/\mathcal{P}'_0 tel que $\mathcal{N} \cap (A/\mathcal{P}_0) = \mathcal{P}_1/\mathcal{P}_0$. Si \mathcal{P}'_1 est l'idéal premier de B tel que $\mathcal{P}'_1/\mathcal{P}'_0 = \mathcal{N}$, il est clair qu'il a les propriétés annoncées.

Théorème 8.26 (*Le deuxième Théorème de relèvement*) :

Soient A un anneau intégralement clos et $A \subset B$ une extension entière d'anneaux intègres. Si $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1$ est une suite croissante d'idéaux premiers de A et si \mathcal{P}'_1 est un idéal premier de B tel que $\mathcal{P}'_1 \cap A = \mathcal{P}_1$, il existe un idéal premier \mathcal{P}'_0 de B tel que $\mathcal{P}'_0 \subset \mathcal{P}'_1$ et que $\mathcal{P}'_0 \cap A = \mathcal{P}_0$.

La démonstration de ce résultat est singulièrement plus délicate que celle du précédent. Elle repose sur les deux Lemmes suivants :

Lemme 8.27 : Soit $A \subset B$ une extension d'anneaux. Si \mathcal{P} un idéal premier de A tel que $\mathcal{P}B \cap A = \mathcal{P}$, il existe un idéal premier \mathcal{P}' de B tel que $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$.

Démonstration du Lemme : Supposons d'abord que \mathcal{P} est un idéal maximal de A . Comme $\mathcal{P}B$ est un idéal de B , il existe un idéal maximal \mathcal{P}' de B contenant $\mathcal{P}B$. On a nécessairement $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$.

En général, soit $S = A - \mathcal{P}$. C'est une partie multiplicativement stable de A et de B . On vérifie facilement $\mathcal{P}S^{-1}B \cap S^{-1}A = \mathcal{P}S^{-1}A$.

Compte tenu du cas précédent, il existe un idéal maximal \mathcal{N} de $S^{-1}B$ tel que $\mathcal{N} \cap S^{-1}A = \mathcal{P}S^{-1}A$. Si $\mathcal{P}' = \mathcal{N} \cap B$, on a $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$, d'après le Corollaire 7.35.

Lemme 8.28 : Soient A un anneau intégralement clos et $A \subset B$ une extension entières d'anneaux intègres. Soient $x \in B$ et $P \in K(A)[X]$ le polynôme minimal de x sur le corp des fractions $K(A)$ de A .

(i) Les coefficients de P sont dans A .

(ii) Si \mathcal{P} est un idéal premier de A tel que $x \in \mathcal{P}B$, les coefficients non dominants de P sont dans \mathcal{P} .

Démonstration du Lemme : Nous admettons que le corps des fractions de B est contenu dans un corps algébriquement clos L . Il existe alors des éléments $x_1, x_2, \dots, x_n \in L$ tels que $P = \prod_1^n (X - x_i)$. Le polynôme P est donc de la forme

$$P(X) = X^n - \left(\sum_1^n x_i \right) X^{n-1} + \left(\sum_{i < j} x_i x_j \right) X^{n-2} + \dots + (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n.$$

Soit $x^r + b_1 x^{r-1} + \dots + b_r = 0$ une relation de dépendance intégrale de x sur A . Le polynôme $Q = X^r + b_1 X^{r-1} + \dots + b_r$, à coefficients dans A , donc dans $K(A)$, est un multiple de P dans

$K(A)[X]$. On en déduit $Q(x_i) = 0$. Les éléments x_i sont donc entiers sur A . Les coefficients de P aussi, compte-tenu de la description faite plus haut, ce qui démontre (i).

Supposons de plus $x \in \mathcal{P}B$. On sait (Proposition 8.7), qu'il existe une relation de dépendance intégrale $x^r + b_1x^{r-1} + \dots + b_r = 0$, avec $b_i \in \mathcal{P}$. On a, pour tout i ,

$$x_i^r + b_1x_i^{r-1} + \dots + b_r = 0.$$

Si $B' = A[x_1, \dots, x_n]$, on en déduit $x_i^r \in \mathcal{P}B'$ pour tout i . Comme B' est entier sur A , il existe \mathcal{P}' un idéal premier de B' tel que $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$. Alors $x_i^r \in \mathcal{P}'$ implique $x_i \in \mathcal{P}'$. Les coefficients non dominants de P sont donc dans $\mathcal{P}' \cap A = \mathcal{P}$, et (ii) est démontré.

Démonstration du Théorème 8.26 : Les idéaux premiers de B contenus dans \mathcal{P}_1 sont en bijection naturelle avec les idéaux premiers de $B_{\mathcal{P}'_1}$. Compte-tenu du Lemme 8.27, on doit donc prouver $\mathcal{P}_0B_{\mathcal{P}'_1} \cap A = \mathcal{P}_0$.

Soit $x/s \in \mathcal{P}_0B_{\mathcal{P}'_1} \cap A$, avec $x \in \mathcal{P}_0B$ et $s \in (B - \mathcal{P}'_1)$. Comme $a = x/s \in A \subset K(A)$, on a $K(A)[x] = K(A)[sa] = K(A)[s]$. Les polynômes minimaux de x et s sur $K(A)$ ont donc même degrés (Proposition 8.4).

Soit $P = X^n + b_1X^{n-1} + \dots + b_n$ le polynôme minimal de x . D'après le Lemme 8.28, on a $b_i \in \mathcal{P}_0$ pour tout i . Comme $X^n + (b_1/a)X^{n-1} + \dots + (b_n/a^n)$ est le polynôme minimal de s , on a $(b_i/a^i) \in A$ pour tout i (Lemme 8.28). Si $a \notin \mathcal{P}_0$, $a^i(b_i/a^i) \in \mathcal{P}_0$ implique $(b_i/a^i) \in \mathcal{P}_0$, donc $s^n \in \mathcal{P}_0B \subset \mathcal{P}'_1$. C'est une contradiction et le Théorème est démontré.

Chapter 9

Lemme de normalisation. Théorèmes des zéros.

9.1 Degré de transcendance.

Définition 9.1 : Soient A un anneau et R une A -algèbre. Des éléments x_1, \dots, x_s de R sont dits algébriquement libres (ou indépendants) sur A si l'application de A -algèbres

$$A[X_1, \dots, X_s] \rightarrow A[x_1, \dots, x_s] \quad P \rightarrow P(x_1, \dots, x_n)$$

est un isomorphisme.

Définition 9.2 : Soit $K \subset L$ une extension de corps. On dit que des éléments $x_1, \dots, x_n \in L$ forment une base de transcendance de L sur K si :

- (i) x_1, \dots, x_n sont algébriquement libres sur K .
- (ii) L est algébrique sur le corps des fractions $K(x_1, \dots, x_n)$.

Théorème 9.3 : Soit $K \subset L$ une extension de corps. Si L a une base de transcendance à n éléments sur K et si $x_1, \dots, x_n \in L$ sont algébriquement libres sur K , alors L est algébrique sur le corps des fractions $K(x_1, \dots, x_n)$.

En particulier, toutes les bases de transcendance de L sur K ont n éléments.

Démonstration :

On suppose que n est le plus petit entier m tel qu'il existe une base de transcendance à m éléments, de L sur K . On fait une récurrence sur n , l'énoncé étant évident pour $n = 0$.

Soit $(z_1, \dots, z_n) \in L$ une base de transcendance de L sur K . Comme x_1 est algébrique sur $K(z_1, \dots, z_n)$, il existe un polynôme $f \in K[Z_1, \dots, Z_n, X_1]$, non nul, tel que $f(z_1, \dots, z_n, x_1) = 0$. Comme x_1 est transcendant sur K , le polynôme f dépend des z_i , par exemple de z_1 . On en déduit que x_1 est algébrique sur $K(z_2, \dots, z_n, x_1)$, donc que L est algébrique sur ce corps. D'après le choix minimal de n , les éléments z_2, \dots, z_n, x_1 forment une base de transcendance de L sur K . Donc z_2, \dots, z_n est une base de transcendance de L sur $K(x_1)$, et on conclut évidemment par récurrence sur n .

Définition 9.4 : Soit $K \subset L$ une extension de corps.

Si L admet une base de transcendance à n éléments sur K , on dit que L est de degré de transcendance n sur K et on écrit $n = \text{trd}_K^0(L)$.

Si L n'admet pas de base de transcendance finie, on écrit $\text{trd}_K^0(L) = \infty$.

Si $A \subset B$ est une extension d'anneaux intègres, de corps des fractions respectifs $K(A)$ et $K(B)$, on pose $\text{trd}_A^0(B) = \text{trd}_{K(A)}^0(K(B))$.

9.2 Le Lemme de normalisation.

Théorème 9.5 (Lemme de Normalisation) :

Soit $A = K[x_1, \dots, x_n]$ une algèbre de type fini sur un corps infini K . Il existe $(y_1, \dots, y_r) \in A$ tels que:

- (i) Les éléments y_i sont algébriquement libres sur K .
- (ii) A est entier sur l'anneau $K[y_1, \dots, y_r]$.
- (iii) Les éléments y_i sont des combinaisons linéaires, à coefficients dans K , des x_j .

Lemme 9.6 : Soit $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme non nul. Si K est infini, il existe $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ tel que $F(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

Ce résultat, intuitivement clair, mérite une preuve par récurrence sur n . Il est classique pour $n \leq 1$.

On peut supposer que F dépend de la variable X_n . On ordonne F par rapport à cette variable. On a $F = G_0(X_1, \dots, X_{n-1})X_n^r + \dots + G_r(X_1, \dots, X_{n-1})$, où $G_0(X_1, \dots, X_{n-1}) \neq 0$. Par hypothèse de récurrence, il existe $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in K^{n-1}$ tel que $G_0(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq 0$. Le polynôme en une variable $G_0(a_1, \dots, a_{n-1})X_n^r + \dots + G_r(a_1, \dots, a_{n-1})$ n'est donc pas nul. Il existe $a_n \in K$ qui n'est pas racine de ce polynôme.

Définition 9.7 : On rappelle qu'un polynôme $F \in K[X_1, \dots, X_n]$ est homogène de degré r s'il est combinaison de monômes de degré r .

Il est clair que si F est un polynôme homogène de degré r , on a

$$F(ax_1, ax_2, \dots, ax_n) = a^r F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Lemme 9.8 : Soient K un corps infini et $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ un élément non nul et non inversible. Il existe $Y_1, \dots, Y_{n-1} \in K[X_1, \dots, X_n]$ telles que

- (i) Y_i est une combinaison linéaire des X_j pour tout i ,
- (ii) les classes $\overline{Y_i}$ des éléments Y_i dans $K[X_1, \dots, X_n]/(f)$ sont algébriquement libres,
- (iii) $K[X_1, \dots, X_n]/(f)$ est entier sur $K[\overline{Y_1}, \dots, \overline{Y_{n-1}}]$.

Démonstration du Lemme : Soit $f = F_r + \dots + F_0$, où F_i est homogène de degré i et $F_r \neq 0$. Il existe un élément $(b_1, \dots, b_n) \neq (0, \dots, 0)$ de K^n tel que $F_r(b_1, \dots, b_n) \neq 0$. Quitte à permuter les X_i , on peut supposer $b_n \neq 0$. On pose $a_i = b_i/b_n$, et on a $F_r(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) \neq 0$.

Posons $Y_i = X_i - a_i X_n$, pour $1 \leq i \leq (n-1)$. Clairement $K[X_1, \dots, X_n] = K[Y_1, \dots, Y_{n-1}, X_n]$.

On a bien sûr

$$F_i(X_1, \dots, X_n) = F_i(Y_1 + a_1 X_n, \dots, Y_{n-1} + a_{n-1} X_n, X_n) = F_i(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) X_n^i + G_i(Y_1, \dots, Y_{n-1}, X_n),$$

où G_i est un polynôme homogène de degré i dont le degré par rapport à la variable X_n est $< i$. Il en résulte

$$f(X_1, \dots, X_{n-1}, X_n) = F_r(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) X_n^r + g(Y_1, \dots, Y_{n-1}, X_n),$$

où $d_{X_n}^0(g) < r$. Ceci prouve bien que $K[X_1, \dots, X_n]/(f)$ est entier sur $K[\overline{Y_1}, \dots, \overline{Y_{n-1}}]$.

Il reste à démontrer que les éléments

$$\overline{Y_1}, \dots, \overline{Y_{n-1}} \in K[X_1, \dots, X_n]/(f)$$

sont algébriquement libres. Soit $h \in K[Y_1, \dots, Y_{n-1}]$ tel que $h(\overline{Y_1}, \dots, \overline{Y_{n-1}}) = 0$. Autrement dit, le polynôme h est dans l'idéal $fK[Y_1, \dots, Y_{n-1}, X_n]$ de l'anneau de $K[Y_1, \dots, Y_{n-1}, X_n]$. Comme h ne dépend pas de la variable X_n et comme f en dépend, on a $h = 0$. Le Lemme est démontré.

Démonstration du Théorème (Lemme de Normalisation), par récurrence sur n :

Si les éléments x_1, \dots, x_n de A sont algébriquement libres sur K , il n'y a rien à prouver. Sinon, montrons qu'il existe des combinaisons linéaires x'_1, \dots, x'_{n-1} des x_i tels que A est entier sur le sous-anneau $K[x'_1, \dots, x'_{n-1}]$.

Considérons donc une relation $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ où $f(X_1, \dots, X_n)$ est un polynôme non nul. D'après le Lemme 9.8, il existe $X'_1, \dots, X'_{n-1} \in K[X_1, \dots, X_n]$, des combinaisons linéaires des X_i , tels que $K[X_1, \dots, X_n]/(f)$ est entier sur $K[\overline{X'_1}, \dots, \overline{X'_{n-1}}]$, où $\overline{X'_i} = cl(X - i) \in K[X_1, \dots, X_n]/(f)$.

Si $x'_i = cl(\overline{X'_i}) \in K[x_1, \dots, x_n]$, il est clair que $K[x_1, \dots, x_n]$ est entier sur $K[x'_1, \dots, x'_{n-1}]$

Par hypothèse de récurrence, il existe des éléments algébriquement libres $y_1, \dots, y_r \in K[x'_1, \dots, x'_{n-1}]$, combinaisons linéaires des x'_i , tels que $K[x'_1, \dots, x'_{n-1}]$ est entier sur $K[y_1, \dots, y_r]$. Lemme de normalisation est démontré.

9.3 Les Théorèmes des zéros.

Corollaire 9.9 (*Théorème des zéros*) :

Soit $K \subset L$ une extension de corps. On suppose que K est un corps infini et que L est une K -algèbre de type fini. Alors L est algébrique sur K (tout élément de L est algébrique sur K).

Démonstration : Il existe un entier $r \geq 0$ et des éléments y_1, \dots, y_r de L , algébriquement libres sur K , tels que L est entier sur $K[y_1, \dots, y_r]$. Si $r > 0$, soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ une chaîne stricte d'idéaux premiers de $K[y_1, \dots, y_r]$. Elle se relève en en une chaîne stricte d'idéaux premiers de L (premier Théorème de relèvement). C'est idiot car L est un corps. Donc $r = 0$, i.e. le corps L est entier sur K (donc algébrique).

Corollaire 9.10 : *Soient K un corps algébriquement clos.*

(i) Si $a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$, l'idéal maximal $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ de l'anneau de polynômes $K[X_1, \dots, X_n]$ est le noyau de l'homomorphisme d'évaluation

$$e_a : K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow K \quad , \quad e_a(P) = P(a_1, \dots, a_n).$$

(ii) Tout idéal maximal de l'anneau de polynômes $K[X_1, \dots, X_n]$ est de cette forme, i.e.

$$(a_1, \dots, a_n) \rightarrow (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$$

est une bijection entre les points de K^n et les idéaux maximaux de $K[X_1, \dots, X_n]$.

(iii) Soit \mathcal{I} un idéal de $K[X_1, \dots, X_n]$. Alors $F(a_1, \dots, a_n) = 0$ pour tout $F \in \mathcal{I}$ si et seulement si l'idéal maximal $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ de $K[X_1, \dots, X_n]$ contient \mathcal{I} , i.e.

$$(a_1, \dots, a_n) \rightarrow (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)/\mathcal{I}$$

est une bijection entre les points (a_1, \dots, a_n) de K^n tels que $F(a_1, \dots, a_n) = 0$ pour tout $F \in \mathcal{I}$ et les idéaux maximaux de $K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}$.

Démonstration : Comme $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ est un idéal maximal, évidemment contenu dans le noyau de l'homomorphisme (non nul) d'anneaux e_a , (i) est clair.

Pour (ii), soit \mathcal{M} un idéal maximal. Le corps $K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{M}$ est une K -algèbre de type fini. C'est donc une extension algébrique de K . Comme K est algébriquement clos, l'application composée

$$K \rightarrow K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{M}$$

est un isomorphisme. Donc, pour tout i , il existe $a_i \in K$ ayant la même image que X_i dans $K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{M}$. Ceci démontre $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \subset \mathcal{M}$, donc l'égalité annoncée car $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ est un idéal maximal.

(iii) se déduit immédiatement de (ii).

Théorème 9.11 (Théorème des zéros fort) :

Soient K un corps algébriquement clos, \mathcal{I} un idéal de $K[X_1, \dots, X_n]$. Soit $V(\mathcal{I}) \subset K^n$ l'ensemble des points $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ tels que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{I}$.

Si $g \in K[X_1, \dots, X_n]$, alors $g(a_1, \dots, a_n) = 0$ pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in V(\mathcal{I})$ si et seulement si $g \in \sqrt{\mathcal{I}}$.

Démonstration : Si $g \in \sqrt{\mathcal{I}}$, alors il existe r tel que $g^r \in \mathcal{I}$ et $g(a_1, \dots, a_n) = 0$ pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in V(\mathcal{I})$.

Si $g \notin \sqrt{\mathcal{I}}$, l'idéal \mathcal{I} est disjoint de la partie multiplicativement stable $\{g^n\}_{n \geq 0}$. Dans ce cas, $\mathcal{I}K[X_1, \dots, X_n]_g$ est un idéal de l'anneau localisé $K[X_1, \dots, X_n]_g$. Soit alors \mathcal{M} un idéal maximal de $K[X_1, \dots, X_n]_g$ contenant $\mathcal{I}K[X_1, \dots, X_n]_g$.

Rappelons qu'on a un isomorphisme naturel $K[X_1, \dots, X_n]_g \simeq K[X_1, \dots, X_n, T]/(Tg - 1)$. Il en résulte que $K[X_1, \dots, X_n]_g$ est une algèbre de type fini sur K . L'anneau quotient $K[X_1, \dots, X_n]_g/\mathcal{M}$ est donc aussi une K -algèbre de type fini. Comme c'est un corps, c'est une extension algébrique de K (Théorème des zéros faible). Comme K est algébriquement clos, on a $K = K[X_1, \dots, X_n]_g/\mathcal{M}$.

Si $\mathcal{N} = \mathcal{M} \cap K[X_1, \dots, X_n]$, on en déduit

$$K \subset K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{N} \subset K[X_1, \dots, X_n]_g/\mathcal{M} = K.$$

Il en résulte que \mathcal{N} est un idéal maximal de $K[X_1, \dots, X_n]$. Il existe donc $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ tel que $\mathcal{N} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$. Comme $g \notin \mathcal{N}$, on a $g(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

D'autre part $IK[X_1, \dots, X_n]_g \subset \mathcal{M}$ implique $\mathcal{I} \subset \mathcal{N}$. Donc, $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{I}$, i.e. $(a_1, \dots, a_n) \in V(\mathcal{I})$. Le Théorème est démontré.

Corollaire 9.12 : *Dans une algèbre de type fini sur un corps K , le radical d'un idéal \mathcal{I} est l'intersection des idéaux maximaux qui contiennent cet idéal.*

Démonstration :

Il suffit bien sûr de démontrer le résultat pour un anneau de polynômes $K[X_1, \dots, X_n]$. Soient \mathcal{I} un idéal de $K[X_1, \dots, X_n]$ et

$$g \in \bigcap_{\mathcal{I} \subset \mathcal{M}} \mathcal{M}.$$

Supposons d'abord que K est algébriquement clos. On sait que les idéaux maximaux contenant \mathcal{I} sont les idéaux $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$, avec $(a_1, \dots, a_n) \in V(\mathcal{I})$. Donc, on a $g(a_1, \dots, a_n) = 0$ pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in V(\mathcal{I})$. Le Théorème des zéros fort implique $g^n \in \mathcal{I}$ pour n assez grand.

Si K n'est pas algébriquement clos, soit L une extension algébrique de K qui est algébriquement close. $L[X_1, \dots, X_n]$ est une extension entière de $K[X_1, \dots, X_n]$.

Si \mathcal{M} est un idéal maximal de $L[X_1, \dots, X_n]$ contenant $\mathcal{I}L[X_1, \dots, X_n]$, alors $\mathcal{M} \cap K[X_1, \dots, X_n]$ est un idéal maximal de $K[X_1, \dots, X_n]$ contenant \mathcal{I} . Il en résulte que g est dans l'intersection des idéaux maximaux de $L[X_1, \dots, X_n]$ qui contiennent $\mathcal{I}L[X_1, \dots, X_n]$. Donc $g^n \in \mathcal{I}L[X_1, \dots, X_n]$ pour n assez grand. Comme $\mathcal{I}L[X_1, \dots, X_n] \cap K[X_1, \dots, X_n] = \mathcal{I}$ (à vérifier), le Corollaire est démontré.

9.4 Anneaux de Jacobson.

Définition 9.13 : *Un anneau dans lequel tout idéal premier est intersection d'idéaux maximaux est un anneau de Jacobson.*

Remarque : Il est clair qu'un anneau est de Jacobson si et seulement si le radical d'un idéal est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.

Exercice : Démontrer l'énoncé suivant.

Proposition 9.14 : *Si A est un anneau de Jacobson, un fermé (resp. un ouvert) de $\text{Spec}A$ est déterminé par son intersection avec le sous-ensemble de $\text{Spec}A$ formé par les idéaux maximaux de A .*

Plus précisément, si $F \subset \text{Spec}A$ est fermé et si \mathcal{I} est l'intersection des idéaux maximaux $\mathcal{M} \in F$, on a

$$F = V(\mathcal{I}).$$

9.5 Chaînes d'idéaux premiers d'une algèbre de type fini sur un corps.

Théorème 9.15 : Soient K un corps infini et A une K -algèbre intègre de type fini. Soient $x_1, \dots, x_n \in A$ des éléments algébriquement libres sur K tels que A est entier sur $K[x_1, \dots, x_n]$.

(i) Toute chaîne strictement croissante

$$\mathcal{P}_0 \subset \dots \subset \mathcal{P}_l$$

d'idéaux premiers de A est de longueur $\leq n$.

(ii) Toute chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de A se prolonge en une chaîne de longueur n .

Démonstration : Pour $n = 0$, (i) et (ii) sont évidents. Faisons une récurrence sur n .

Posons $\mathcal{Q}_i = \mathcal{P}_i \cap K[x_1, \dots, x_n]$. C'est une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de $K[x_1, \dots, x_n]$ (d'après le Théorème 8.24 (ii)).

Soit $f \in \mathcal{Q}_1$ un élément irréductible (on rappelle qu'un anneau de polynômes sur un corps est factoriel). Alors

$$\mathcal{Q}_1/(f) \subset \dots \subset \mathcal{Q}_l/(f)$$

est une chaîne strictement croissante, de longueur $(l - 1)$, d'idéaux premiers de l'anneau intègre $K[x_1, \dots, x_n]/(f)$. D'après le Lemme 9.8, cet anneau est entier sur un sous-anneau de polynômes $K[\overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_{n-1}]$. Donc, par hypothèse de récurrence, on a $(l - 1) \leq (n - 1)$.

Supposons maintenant que la chaîne $(\mathcal{P}_i)_{0 \leq i \leq l}$ n'est pas prolongeable. On a $\mathcal{P}_0 = (0)$. Comme $fK[x_1, \dots, x_n] \subset \mathcal{P}_1 \cap K[x_1, \dots, x_n]$ et comme $K[x_1, \dots, x_n]$ est intégralement clos, on sait, d'après le second Théorème de relèvement, qu'il existe un idéal premier $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}_1$ de A tel que $\mathcal{N} \cap K[x_1, \dots, x_n] = fK[x_1, \dots, x_n]$. Comme la chaîne $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1$ n'est pas prolongeable, on a nécessairement $\mathcal{N} = \mathcal{P}_1$.

On en déduit que $K[x_1, \dots, x_n]/(f)$ est un sous-anneau de l'anneau A/\mathcal{P}_1 sur lequel celui-ci est entier. Finalement, $K[\overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_{n-1}]$ est un sous-anneau de polynômes de l'anneau A/\mathcal{P}_1 sur lequel celui-ci est entier.

Comme

$$(0) \subset \mathcal{P}_2/\mathcal{P}_1 \subset \dots \subset \mathcal{P}_l/\mathcal{P}_1$$

est une chaîne non prolongeable d'idéaux premiers de l'anneau intègre A/\mathcal{P}_1 , elle est de longueur $(n - 1)$ par hypothèse de récurrence. Le Théorème est démontré.

Corollaire 9.16 : Soient K un corps infini et A une K -algèbre de type fini. Soient $x_1, \dots, x_n \in A$ des éléments algébriquement libres sur K tels que A est entier sur $K[x_1, \dots, x_n]$.

(i) Toute chaîne strictement croissante

$$\mathcal{P}_0 \subset \dots \subset \mathcal{P}_l$$

d'idéaux premiers de A est de longueur $\leq n$.

(ii) Une chaîne strictement croissante et non prolongeable

$$\mathcal{P}_0 \subset \dots \subset \mathcal{P}_l$$

d'idéaux premiers de A est de longueur n si et seulement si $\mathcal{P}_0 \cap K[x_1, \dots, x_n] = (0)$.

Démonstration : C'est un exercice à faire.

Définition 9.17 : La dimension d'une algèbre de type fini A sur un corps infini est la longueur d'une chaîne strictement croissante et non prolongeable d'idéaux premiers de A de longueur maximale.

On a donc démontré les énoncés suivants.

Théorème 9.18 : Soit A est une algèbre intègre de type fini sur un corps infini K .

(i) $\dim(A) = \text{trd}_K^0(A)$.

(ii) Toute chaîne strictement croissante et non prolongeable d'idéaux premiers de A est de longueur $\dim(A)$.

Théorème 9.19 : Soit A une algèbre de type fini sur un corps infini K . Soient \mathcal{Q} et \mathcal{P} deux idéaux premiers de A tels que $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$.

Si

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \dots \subset \mathcal{P}_l = \mathcal{P}$$

est une chaîne non prolongeable d'idéaux premiers, on a

$$l = \text{trd}_K^0(A/\mathcal{Q}) - \text{trd}_K^0(A/\mathcal{P}) = \dim(A/\mathcal{Q}) - \dim(A/\mathcal{P}).$$

En particulier toutes les chaînes non prolongeables d'idéaux premiers joignant \mathcal{Q} à \mathcal{P} ont même longueur.

9.6 Appendice : Le "main theorem" de Zariski

Définition 9.20 : Soient B un A -algèbre et \mathcal{N} un idéal premier de B . On dit que \mathcal{N} est isolé au dessus de $\mathcal{N} \cap A$ s'il est maximal et minimal parmi les idéaux premiers \mathcal{P} de B tels que $\mathcal{P} \cap A = \mathcal{N} \cap A$.

Théorème 9.21 ("main theorem" de Zariski):

Soit S une R -algèbre de type fini. Si \mathcal{N} un idéal premier de S isolé au dessus de $\mathcal{P} = \mathcal{N} \cap R$, il existe une sous- R -algèbre finie R' de S et un élément $t \in R' - (\mathcal{N} \cap R')$ tels que $R'_t = S_t$.

Il suffit de démontrer l'énoncé suivant :

Proposition 9.22 Soit B une algèbre de type fini sur un sous-anneau local A , d'idéal maximal \mathcal{P} . On suppose que A est intégralement fermé dans B . Si \mathcal{N} un idéal premier de B isolé au dessus de $\mathcal{P} = \mathcal{N} \cap A$, alors $A = B$.

En effet, soient $S = R[x_1, \dots, x_n]$ et C la fermeture intégrale de R dans S . L'idéal premier \mathcal{N} de S est évidemment isolé au dessus de $\mathcal{N} \cap C$ et $S = C[x_1, \dots, x_n]$. Si la Proposition est démontrée, il existe $y_i \in C$ et $t_i \in C - (\mathcal{N} \cap C)$ tels que $x_i = y_i/t_i$. Si $t = \prod_1^n t_i$, il est clair que $R[y_1, \dots, y_n, t]$ est une R -algèbre finie et que $S_t = R[y_1, \dots, y_n, t]_t$.

Démonstration de la Proposition 9.22 dans le cas $B = A[x]$:

$\mathcal{N}/\mathcal{P}A[x]$ est un idéal premier de $A[x]/\mathcal{P}A[x]$ isolé au dessus de l'idéal premier (0) du corps A/\mathcal{P} . Le quotient $A[x]/\mathcal{P}A[x]$ de l'anneau de polynôme $(A/\mathcal{P})[X]$ ayant un idéal premier minimal et maximal est nécessairement strict. Il existe donc une relation

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathcal{P}A[x].$$

Supposons d'abord que $cl(x)$ est un élément inversible de $A[x]/\mathcal{P}A[x]$. Multipliant s'il le faut notre relation par une puissance de l'inverse de $cl(x)$, nous pouvons supposer que $a_0 \in A - \mathcal{P}$, donc que a_0 est inversible. La relation peut se préciser sous la forme

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = b_0 + b_1x + \dots + b_sx^s,$$

avec $b_i \in \mathcal{P}$. Elle montre que x divise $(a_0 - b_0)$ qui est un élément inversible de A , donc x est inversible dans $A[x]$.

Soit $t = \max(n, s)$. On en déduit une relation

$$(a_0 - b_0)x^{-t} + (a_1 - b_1)x^{1-t} + \dots = 0.$$

Elle démontre que $x^{-1} \in A[x]$ est entier sur A . Comme A est intégralement fermé dans $A[x]$, on a $x^{-1} \in A$. Comme x est inversible dans $A[x]$, on a $x^{-1} \notin \mathcal{N}$, donc $x^{-1} \notin \mathcal{P}$ et x^{-1} est inversible dans A . Il reste $A = A[x]$.

Si $cl(x)$ n'est pas un élément inversible de $A[x]/\mathcal{P}A[x]$, posons

$$y = 1 + x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0.$$

Remarquons que x est entier sur $A[y]$, et que la classe de y dans $A[x]/\mathcal{P}A[x]$ est 1.

Posons $\mathcal{M} = \mathcal{N} \cap A[y]$. Montrons que \mathcal{M} est isolé au dessus de \mathcal{P} et que $cl(y) \in A[y]/\mathcal{P}A[y]$ est inversible.

Comme $A[x]$ est entier sur le sous-anneau $A[y]$, une chaîne stricte d'idéaux premiers de $A[y]$ au dessus de \mathcal{P} se relève en une chaîne stricte d'idéaux premiers de $A[x]$ au dessus de \mathcal{P} (premier Théorème de relèvement). Elle induit évidemment une chaîne stricte d'idéaux premiers de $A[x]/\mathcal{P}A[x]$. Nous avons vu que ce dernier anneau est un quotient stricte de l'anneau de polynôme $(A/\mathcal{P})[X]$, donc ses idéaux premiers sont minimaux et maximaux, et une telle chaîne n'existe pas.

Si $cl(y) \in A[y]/\mathcal{P}A[y]$ n'est pas inversible, il existe un idéal premier \mathcal{M}' de $A[y]$ tel que $\mathcal{M}' \cap A = \mathcal{P}$ et que $y \in \mathcal{M}'$. D'après la premier Théorème de relèvement, cet idéal se relève en un idéal premier \mathcal{N}' de $A[x]$ tel que $\mathcal{N}' \cap A = \mathcal{P}$ et que $y \in \mathcal{N}'$. Mais ceci est impossible car nous avons vu que la classe de y dans $A[x]/\mathcal{P}A[x]$ est 1.

Il reste que $A = A[y]$. Comme x est entier sur $A[y]$, on en déduit $A = A[x]$.

Lemme 9.23 : Soient $R \subset S$ une extension d'anneaux telle que R est intégralement fermé dans S , et $t \in S$ un élément tel que S est fini sur $R[t]$. Si $F \in R[X]$ est tel que $F(t)S \subset R[t]$ (i.e. $F(t)$ est dans le conducteur de S dans $R[t]$) et si a est le coefficient dominant de F , il existe un entier r tel que $a^r S \subset R[t]$ (i.e. a^r est dans le conducteur de S dans $R[t]$).

Démonstration du Lemme 9.23 :

Supposons d'abord que F est unitaire ($a = 1$).

Si $d^0 F = 0$, alors $F = 1$ et $S = R[t]$.

Si $F(t) = 0$, alors t est entier sur R , donc S aussi et $R = R[t] = S$.

Si $F(t) \neq 0$, soit $x \in S$. Il existe $G \in R[X]$ tel que $xF(t) = G(t)$. Il existe $H, Q \in R[X]$ tels que $G = QF + H$, avec $d^0 H < d^0 F$. Posant $y = x - Q(t)$, on a $yF(t) - H(t) = 0$. Ceci induit la relation

$$F(t) - y^{-1}H(t)$$

dans l'anneau S_y . Il en résulte que t est entier sur l'anneau $R[y^{-1}]$ (abus de langage). Comme $y \in S_y$ est entier sur $R[t]$, il est entier sur $R[y^{-1}]$. Multipliant une relation de dépendance intégrale de y sur $R[y^{-1}]$ par une puissance suffisante de y , on trouve que y est entier sur R . Donc $y = x - Q(t) \in R$ et $x \in R[t]$. Finalement $R[t] = S$ et le Lemme est démontré dans ce cas.

Dans le cas où F n'est pas unitaire, on sait d'après le cas précédent que $R_a[t] = S_a$. Soit (x_1, \dots, x_n) un système de générateurs de S comme $R[t]$ -module. Il existe un entier r tel que $a^r x_i \in R[t]$. Ceci implique $a^r S \subset R[t]$ et le Lemme est démontré.

Lemme 9.24 : *Si $A \subset C \subset B$ est une sous-extension d'anneaux, l'idéal $\mathcal{M} = \mathcal{N} \cap C$ est un idéal maximal de C .*

Démonstration du Lemme 9.24 :

Comme \mathcal{N} est isolé au dessus de l'idéal maximal \mathcal{P} de A , il est nécessairement maximal. Comme B/\mathcal{N} est une A/\mathcal{P} -algèbre de type fini, l'extension de corps $A/\mathcal{P} \subset B/\mathcal{N}$ est finie (Théorème des zéros). La double inclusion $A/\mathcal{P} \subset C/\mathcal{M} \subset B/\mathcal{N}$ montre alors que C/\mathcal{M} est une sous-extension finie (de corps) et \mathcal{M} est un idéal maximal de C .

Démonstration de la Proposition 9.22 dans le cas où il existe $x \in B$ tel que B est fini sur $A[x]$:

Soit \mathcal{I} le conducteur de B dans $A[x]$, i.e. l'idéal des éléments $f \in A[x]$ tels que $fB \subset A[x]$ (remarquer que \mathcal{I} est aussi un idéal de B). Soit $\mathcal{M} = \mathcal{N} \cap A[x]$.

Si $\mathcal{I} \not\subset \mathcal{M}$, on a $A[x]_{\mathcal{M}} = B_{\mathcal{N}}$. Montrons que dans ce cas \mathcal{M} est un idéal premier de $A[x]$ isolé au dessus de \mathcal{P} .

En effet, \mathcal{M} est un idéal maximal de $A[x]$ d'après le Lemme 9.24. D'autre part, $A[x]_{\mathcal{M}} = B_{\mathcal{N}}$ montre que \mathcal{M} est minimal au dessus de \mathcal{P} .

Compte tenu du cas déjà étudié, nous savons que $A = A[x]$. Comme B est entier sur $A[x]$, la Proposition est démontrée dans ce cas.

Si $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$, cherchons une contradiction.

Soit \mathcal{Q} un idéal premier de B tel que $\mathcal{I} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{M}$ et que \mathcal{Q} est minimal parmi les idéaux premiers contenant \mathcal{I} (comme B n'est pas supposé noethérien, l'existence d'un tel \mathcal{Q} (minimal) n'a pas été démontrée; c'est une variation sur le thème de Zorn). Notons $A', B', x', \mathcal{N}', \dots$ les images de $A, B, x, \mathcal{N}, \dots$ dans B/\mathcal{Q} et montrons que x' est transcendant sur A' .

Sinon il existe un polynôme non nul $G' \in A'[X]$ tel que $G'(x') = 0$. Autrement dit, il existe un polynôme $G \in A[X]$, de coefficient dominant $a \notin \mathcal{Q}$, tel que $G(x) \in \mathcal{Q}$. D'après le Corollaire 7.44, il

existe $y \notin \mathcal{Q}$ et un entier r tels que $yG(x)^r \in \mathcal{I}$. On a donc $yG(x)^r B \subset A[x]$. Il en résulte que $G(x)^r$ est contenu dans le conducteur de l'anneau $A[x][yB]$ dans $A[x]$. Il est clair que l'anneau $A[x][yB]$ est un $A[x]$ -module de type fini dans lequel A est intégralement fermé. On peut appliquer le Lemme 9.23 et il existe un entier s tel que $a^s y B \subset A[x]$. Mais ceci implique $a^s y \in \mathcal{I} \subset \mathcal{Q}$. Comme $y \notin \mathcal{Q}$, on en déduit $a^s \in \mathcal{Q}$, ce qui contredit notre hypothèse sur a , donc on a démontré que x' est transcendant sur A' .

Pour conclure la preuve de ce cas clef, il nous suffit de démontrer le Lemme général suivant :

Lemme 9.25 : *Soient B un anneau intègre, $x \in B$ et A un sous-anneau de B tels que B est entier sur $A[x]$ et que x est transcendant sur A . Si \mathcal{N} est un idéal premier de B , il n'est pas isolé au dessus de $\mathcal{N} \cap A$.*

Démonstration du Lemme :

Supposons d'abord que A est intégralement clos. Alors $A[x]$ est intégralement clos (Théorème 8.19). Soit $\mathcal{M} = \mathcal{N} \cap A[x]$.

Comme $A[x]$ est un anneau de polynômes sur A , l'idéal premier \mathcal{M} n'est pas isolé au dessus de $\mathcal{M} \cap A = \mathcal{N} \cap A$. Appliquant le premier ou le deuxième Théorème de relèvement suivant que \mathcal{M} est minimal ou maximal au dessus de $\mathcal{M} \cap A$, on voit que \mathcal{N} n'est pas isolé non plus au dessus de $\mathcal{N} \cap A$.

Si A n'est pas intégralement clos, soient A' sa clôture intégrale et B' la . clôture intégrale de B . Il est clair que B' est entier sur $A'[x]$ et que x est transcendant sur A' . Si \mathcal{N}' est un idéal premier de B' tel que $\mathcal{N}' \cap B = \mathcal{N}$, il n'est pas isolé au dessus de $\mathcal{N}' \cap A'$. On en déduit aisément que \mathcal{N} n'est pas isolé au dessus de $\mathcal{N} \cap A = \mathcal{N}' \cap A' \cap A$.

Démonstration de la Proposition 9.22 dans le cas général :

Supposons que B est fini sur la sous- A -algèbre $A[x_1, \dots, x_n]$ et faisons une récurrence sur n .

Soit C la fermeture intégrale de $A[x_1, \dots, x_{n-1}]$ dans B . Comme B est fini sur $C[x_n]$ est comme \mathcal{N} est isolé au dessus de $\mathcal{M} = \mathcal{N} \cap C$, on déduit du cas précédemment traité que $B_{\mathcal{N}} = C_{\mathcal{M}}$.

Montrons qu'il existe une sous- $A[x_1, \dots, x_{n-1}]$ -algèbre finie B' de C telle que

$$B'_{\mathcal{N}'} = C_{\mathcal{M}} \quad \text{pour} \quad \mathcal{N}' = \mathcal{N} \cap B' = \mathcal{M} \cap B'.$$

Soient z_1, \dots, z_r un système de générateurs du $A[x_1, \dots, x_n]$ -module de type fini B .

Comme $B = A[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n, z_1, \dots, z_r]$ et comme $B_{\mathcal{N}} = C_{\mathcal{M}}$, il existe $t \in C - \mathcal{M}$ tel que $tx_n, tz_1, \dots, tz_r \in C$.

Si B' est la $A[x_1, \dots, x_{n-1}]$ -algèbre finie engendrée par $t, tx_n, tz_1, \dots, tz_r$ et si $\mathcal{N}' = \mathcal{M} \cap B'$, on a évidemment

$$B'_{\mathcal{N}'} = C_{\mathcal{M}} = B_{\mathcal{N}}.$$

Pour pouvoir conclure par récurrence sur n , il nous reste à démontrer que \mathcal{N}' est isolé au dessus de $\mathcal{P} = \mathcal{N}' \cap A$.

D'après le Lemme 9.24, nous savons que \mathcal{N}' est maximal, donc évidemment maximal au dessus de \mathcal{P} . D'autre part l'égalité $B'_{\mathcal{N}'} = B_{\mathcal{N}}$ montre clairement qu'il est minimal au dessus de \mathcal{P} .

La Proposition 9.22 est démontrée, le "main theorem" de Zariski est démontré.

Chapter 10

Anneaux noethériens intégralement clos.

10.1 Anneaux noethériens réduits.

Théorème 10.1 : *Si A est un anneau noethérien, les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *A est réduit (i.e. de nilradical (0)).*
- (ii) *Pour tout idéal premier \mathcal{P} associé à A , l'anneau local $A_{\mathcal{P}}$ est un corps.*
- (iii) *Pour tout idéal premier \mathcal{P} associé à A , l'anneau local $A_{\mathcal{P}}$ est intègre.*

Démonstration :

Supposons d'abord A réduit. Dans ce cas (0) est intersection d'idéaux premiers. Comme tout idéal premier contient un idéal premier minimal de (0) , il est intersection de ses idéaux premiers minimaux. Soient \mathcal{P}_i , avec $i = 1, \dots, n$ ces idéaux premiers minimaux (ils sont en nombre fini d'après le Théorème 3.29).

$(0) = \cap_1^n \mathcal{P}_i$ est une décomposition primaire minimale de (0) et les \mathcal{P}_i sont les idéaux premiers associés à (0) . Il résulte alors du Corollaire 7.39 (i) que $0_{A_{\mathcal{P}_i}} = \mathcal{P}_i A_{\mathcal{P}_i}$ pour $i = 1, \dots, n$. Donc $A_{\mathcal{P}_i}$ est un corps pour tout i , et (i) implique (ii).

Il est évident que (ii) implique (iii).

Montrons que (iii) implique (i). Soit a un élément nilpotent de A . Soit \mathcal{P} un idéal premier associé à A . Alors $a/1 \in A_{\mathcal{P}}$ est nilpotent donc nul (car $A_{\mathcal{P}}$ est un intègre). On en déduit $(0 : a) \not\subset \mathcal{P}$ pour tout idéal premier \mathcal{P} associé à A . D'après le Lemme d'évitement, il existe $s \in (0 : a)$ tel que $s \notin \mathcal{P}$ pour tout idéal premier \mathcal{P} associé à A . On sait que l'ensemble des diviseurs de zéro de A est la réunion des idéaux premiers associés à A . Donc s n'est pas diviseur de zéro et $sa = 0$ implique $a = 0$.

Théorème 10.2 : *Soit A un anneau noethérien qui n'est pas le produit de deux anneaux.*

Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) *A est intègre.*
- (ii) *Pour tout élément $x \in A$ et pour tout idéal premier \mathcal{N} associé à A/xA , l'anneau local $A_{\mathcal{N}}$ est intègre.*

Démonstration : Tout localisé d'un anneau intègre est évidemment intègre, donc (i) implique (ii).

Réciproquement, nous savons, d'après le Théorème précédent, que A est réduit. Supposons que A n'est pas intègre et montrons qu'il existe $x \in A$ et $\mathcal{N} \in \text{Ass}(A/xA)$ tel que $A_{\mathcal{N}}$ n'est pas intègre.

Considérons la décompositiom primaire minimale $(0) = \cap_1^n \mathcal{P}_i$, avec $n > 1$, de l'idéal (0) . Posons $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ et $\mathcal{Q} = \cap_2^n \mathcal{P}_i$. On a $(0) = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

Si $(\mathcal{P} + \mathcal{Q}) = A$, les idéaux \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont comaximaux. L'application naturelle $A \rightarrow A/\mathcal{P} \times A/\mathcal{Q}$ est alors surjective (d'après le Théorème 1.52). Comme son noyau est $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = (0)$, elle est aussi injective. On en déduit $A \simeq A/\mathcal{P} \times A/\mathcal{Q}$, ce qui contredit l'hypothèse.

Si $(\mathcal{P} + \mathcal{Q})$ est un idéal strict, soit alors $\mathcal{N} \in \text{Ass}(A/(\mathcal{P} + \mathcal{Q}))$.

Montrons que $A_{\mathcal{N}}$ n'est pas intègre. Comme $\cap_2^n \mathcal{P}_i = \mathcal{Q} \subset \mathcal{N}$, il existe $i > 1$ tel que $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{N}$. D'autre part $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{N}$, donc \mathcal{N} contient au moins deux idéaux premiers minimaux distincts, de A . Rappelant la bijection, respectant l'inclusion, entre les idéaux premiers de A contenus dans \mathcal{N} et les idéaux premiers de $A_{\mathcal{N}}$, on en déduit que $A_{\mathcal{N}}$ a au moins deux idéaux premiers minimaux distincts, donc que $A_{\mathcal{N}}$ n'est pas intègre.

Soient maintenant a et b des éléments de A tels que $a \in \mathcal{P}$ et $a \notin \mathcal{P}_i$ pour $i > 1$ d'une part, et $b \in \mathcal{Q}$ et $b \notin \mathcal{P}$ d'autre part. Remarquons qu'on a

$$aA \cap bA \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = (0) \quad , \quad (0) : a = \cap_2^n \mathcal{P}_i = \mathcal{Q} \quad \text{et} \quad (0) : b = \mathcal{P}.$$

Montrons que $\mathcal{N} \in \text{Ass}(A/(a+b)A)$.

On a $(a+b)A : a = (\mathcal{P} + \mathcal{Q})$. En effet,

$$ax = (a+b)y \Leftrightarrow a(x-y) = by \Leftrightarrow a(x-y) = by = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \in \mathcal{Q} \text{ et } y \in \mathcal{P} \Leftrightarrow x = (x-y) + y \in (\mathcal{P} + \mathcal{Q}).$$

Comme $\mathcal{N} \in \text{Ass}(A/(\mathcal{P} + \mathcal{Q}))$, il existe $c \in A$ tel que $\mathcal{N} = (\mathcal{P} + \mathcal{Q}) : c$. Mais alors

$$acz \in (a+b)A \Leftrightarrow cz \in (\mathcal{P} + \mathcal{Q}) \Leftrightarrow z \in \mathcal{N},$$

donc $\mathcal{N} = (a+b)A : ac$, soit $\mathcal{N} \in \text{Ass}(A/(a+b)A)$ et le Théorème est démontré.

10.2 Anneaux noethériens intégralement clos.

Théorème 10.3 : *Soit A un anneau noethérien qui n'est pas le produit de deux anneaux. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *A est intégralement clos.*

(ii) *Pour tout élément $x \in A$ et pour idéal premier \mathcal{N} associé à A/xA , l'anneau local $A_{\mathcal{N}}$ est intégralement clos.*

(iii) *Pour tout élément $x \in A$ et pour idéal premier \mathcal{N} associé à A/xA , l'anneau local $A_{\mathcal{N}}$ est un corps ou un anneau principal.*

Démonstration : Rappelons que tout localisé d'un anneau intégralement clos est intégralement clos, donc (i) implique (ii).

Montrons que (ii) implique (i). D'après le Théorème précédent, on sait déjà que A est intègre. De plus il est clair qu'un anneau intersection (dans son corps des fractions) d'anneaux intégralement clos est intégralement clos. (ii) \Rightarrow (i) est donc une conséquence du Lemme plus général suivant :

Lemme 10.4 : Soit A un anneau intègre. Soit E l'ensemble des idéaux premiers \mathcal{N} de A tels qu'il existe $x \in A$ avec $\mathcal{N} \in \text{Ass}(A/xA)$. Alors

$$A = \bigcap_{\mathcal{N} \in E} A_{\mathcal{N}}.$$

Démonstration du Lemme : $A \subset \bigcap_{\mathcal{N} \in E} A_{\mathcal{N}}$ est clair.

Soit $y/x \in \bigcap_{\mathcal{N} \in E} A_{\mathcal{N}}$. En particulier, on a $y/x \in \bigcap_{\mathcal{N} \in \text{Ass}(A/xA)} A_{\mathcal{N}}$. Il en résulte que $y \in xA_{\mathcal{N}}$ pour $\mathcal{N} \in \text{Ass}(A/xA)$. On en déduit que $xA : y \not\subset \mathcal{N}$ pour tout idéal premier $\mathcal{N} \in \text{Ass}(A/xA)$. Appliquant le Lemme d'évitement, on sait qu'il existe $s \in xA : y$ tel que $s \notin \mathcal{N}$ pour tout idéal premier $\mathcal{N} \in \text{Ass}(A/xA)$. Nous savons alors que la classe de s dans A/xA n'est pas diviseur de 0. Donc $sy \in xA$ implique $y \in xA$ et $y/x \in A$ et le Lemme est démontré.

Comme un anneau principal est intégralement clos, (iii) implique (ii). Le Lemme suivant prouve que (ii) implique (iii), donc le Théorème.

Lemme 10.5 : Soit R un anneau intègre, noethérien, local d'idéal maximal \mathcal{M} , qui n'est pas un corps. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) R est intégralement clos et il existe un élément non nul $x \in R$ tel que $\mathcal{M} \in \text{Ass}(R/xR)$.
- (ii) \mathcal{M} est un idéal principal.
- (iii) R est principal.
- (iv) R est intégralement clos et \mathcal{M} est l'unique idéal premier non nul de R .

Démonstration du Lemme :

Supposons (i). On sait qu'il existe $a \in R$ tel que $\mathcal{M} = (xR : a)$.

Si $a\mathcal{M} \subset x\mathcal{M}$, ceci implique $(a/x)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Donc \mathcal{M} est un $R[a/x]$ -module d'annulateur nul qui est un R -module de type fini, et a/x est entier sur R , d'après le Théorème 8.5. Comme R est intégralement clos, on a $a/x \in R$, donc $a \in xR$. Mais ceci contredit évidemment la relation $\mathcal{M} = (xR : a)$.

Si $a\mathcal{M} \not\subset x\mathcal{M}$, on a $x \in a\mathcal{M}$, donc il existe $b \in \mathcal{M}$ tel que $x = ab$. Dans ce cas, on a $\mathcal{M} = (xR : a) = bR$. On a donc prouvé (ii).

Supposons maintenant $\mathcal{M} = xR$ et montrons que R est principal. Sinon, soit \mathcal{I} un idéal de R maximal parmi les idéaux non principaux. Comme $\mathcal{I} \subset \mathcal{M} = xR$, il existe un idéal \mathcal{J} tel que $\mathcal{I} = x\mathcal{J}$.

Montrons que \mathcal{I} est strictement inclus dans \mathcal{J} . Sinon $\mathcal{I} = x\mathcal{I}$, donc $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}\mathcal{I}$, et $\mathcal{I} = (0)$, d'après le Lemme de Nakayama. Il en résulte que \mathcal{J} est principal. Mais si $\mathcal{J} = aR$, on a $\mathcal{I} = xaR$. Donc (ii) \implies (iii).

(iii) \implies (iv) est bien connu.

Enfin (iv) \implies (i) car \mathcal{M} est associé à tout idéal principal de R .

On déduit immédiatement du Théorème et du Lemme 10.4 l'énoncé qui suit que nous voulons souligner.

Corollaire 10.6 (du Théorème 10.3) : Un anneau intègre noethérien R est intégralement clos si et seulement si pour tout $x \in R$ et pour tout idéal premier \mathcal{P} associé à xR , l'anneau $R_{\mathcal{P}}$ est local principal.

Si cette condition est réalisée, R est l'intersection (dans son corps des fractions) de ces anneaux locaux principaux.

10.3 Valuations discrètes. Anneaux de Dedekind.

Définition 10.7 : Un anneau local principal est un anneau de valuation discrète.

Proposition 10.8 : Un anneau noethérien intègre local R , d'idéal maximal \mathcal{M} est de valuation discrète si et seulement si $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ est un R/\mathcal{M} -espace vectoriel de rang 1.

Démonstration :

Comme $\mathcal{M}(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2) = (0)$, le R -module $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ est un R/\mathcal{M} -espace vectoriel. D'après le Lemme de Nakayama, \mathcal{M} est principal si et seulement si $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ est engendré par 1 éléments.

Exercice : Démontrer le résultat suivant.

Corollaire 10.9 : Soient $P \in \mathbf{C}[X, Y] = R$, un point $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ tel que $P(a, b) = 0$ et $\mathcal{M} = (X - a, Y - b)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $(R/PR)_{\mathcal{M}}$ est un anneau de valuation discrète.

(ii) $P \notin \mathcal{M}^2$.

(iii) $(P, \partial P/\partial X, \partial P/\partial Y) \notin \mathcal{M}$.

Proposition 10.10 : Si V est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal uV , tout idéal non nul de V est de la forme $u^n V$, avec $n \geq 0$.

Démonstration :

Comme V est de valuation discrète, uV est l'unique idéal premier non nul. Donc tout élément irréductible de l'anneau principal V est de la forme us , où s est inversible. Un élément non nul $a \in V$ a donc une unique décomposition $a = u^n s$, avec s inversible. Comme V est principal, la Proposition est démontrée.

Définition 10.11 : Une valuation discrète sur un corps K est un homomorphisme surjectif v du groupe multiplicatif K^* dans le groupe additif \mathbf{Z} , tel que $v(a + b) \geq \inf(v(a), v(b))$.

Théorème 10.12 :

(i) Si v est une valuation discrète sur K , l'ensemble R formé de $\{0\}$ et des éléments $a \in K^*$ tels que $v(a) \geq 0$ est un anneau de valuation discrète.

(ii) Si V est un anneau de valuation discrète, il existe une valuation discrète v sur son corps des fractions K telle que $V - \{0\}$ est l'ensemble des éléments $a \in K^*$ tels que $v(a) \geq 0$.

Démonstration :

(i) La relation $v(a + b) \geq \inf(v(a), v(b))$ montre que R est un sous-groupe commutatif de K . La relation $v(ab) = v(a) + v(b)$ montre alors que c'est un anneau.

Soit \mathcal{I} un idéal de R . Soit $a \in \mathcal{I}$ tel que $v(b) \geq v(a)$ pour tout $b \in \mathcal{I}$. Si $b \in \mathcal{I}$, on a $b = a(b/a)$. Or $v(b/a) = v(b) - v(a) \geq 0$, donc $b/a \in R$. Il en résulte $aR \subset \mathcal{I} \subset aR$, donc \mathcal{I} est principal.

D'autre part si $v(x) = 0$, alors $v(x^{-1}) = 0$ et $x \in R$ est inversible dans R . Soit alors $u \in R$ tel que $v(u) = 1$. Si $y \in R$ n'est pas inversible, on a $v(y) \geq 1 = v(u)$, donc $v(y/u) \geq 0$ et $y = u(y/u) \in uR$. Ceci montre que uR est l'unique idéal maximal de l'anneau principal R , qui est donc de valuation discrète.

(ii) Si $a \in V$ est non nul, il existe un unique entier r tel que $aV = u^rV$. Posons $v(a) = r$. Si $a/b = a'/b'$, on vérifie immédiatement que $v(a) - v(b) = v(a') - v(b')$. On peut donc poser $v(a/b) = v(a) - v(b)$. La fonction $v : K^* \rightarrow \mathbf{Z}$ ainsi définie est clairement une valuation discrète et il est tout aussi clair que $V - \{0\}$ est l'ensemble des éléments de K^* dont la valuation est positive.

Définition 10.13 : Soit A un anneau noethérien intègre. Si pour tout idéal premier non nul \mathcal{P} , de A , l'anneau local $A_{\mathcal{P}}$ est de valuation discrète, on dit que A est un anneau de Dedekind.

Un anneau principal est évidemment de Dedekind.

Théorème 10.14 : Soit R un anneau noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) R est de Dedekind.
- (ii) R est intégralement clos et tout idéal premier non nul est maximal.

Démonstration :

Soit R est de Dedekind. Comme $R = \bigcap_{\mathcal{M}} R_{\mathcal{M}}$, pour \mathcal{M} maximal, et comme $R_{\mathcal{M}}$ est principal, donc intégralement clos, pour tout idéal maximal \mathcal{M} , il est clair que R est intégralement clos.

Soit \mathcal{P} un idéal premier non nul de R et \mathcal{M} un idéal maximal tel que $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$. Comme $R_{\mathcal{M}}$ est principal, on a $\mathcal{P}R_{\mathcal{M}} = \mathcal{M}R_{\mathcal{M}}$, donc $\mathcal{P} = \mathcal{M}$.

Réciproquement, soit R un anneau intégralement clos dont tout idéal premier non nul est maximal. Si \mathcal{P} est un idéal premier de R , alors $R_{\mathcal{P}}$ est principal, donc de valuation discrète, d'après le Lemme 10.5. Donc R est de Dedekind.

Théorème 10.15 : Dans un anneau de Dedekind,

- (i) tout idéal premier non nul est maximal
- (ii) tout idéal primaire non nul est une puissance d'un idéal maximal,
- (iii) tout idéal non nul a une unique décomposition comme produit d'idéaux maximaux.

Démonstration :

(i) Soit $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ une chaîne stricte d'idéaux premiers de l'anneau de Dedekind D . Alors $\mathcal{P}'D_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}D_{\mathcal{P}}$ est une chaîne stricte d'idéaux premiers de l'anneau de valuation discrète $D_{\mathcal{P}}$. Un anneau de valuation discrète est principal, donc tout idéal premier non nul est maximal. On en déduit $\mathcal{P}'D_{\mathcal{P}} = (0)$, donc $\mathcal{P}' = (0)$ (car l'homomorphisme de localisation est injectif).

(ii) Soit \mathcal{Q} un idéal \mathcal{P} -primaire. Comme $D_{\mathcal{P}}$ est un anneau de valuation discrète, on sait (Proposition 10.10) qu'il existe un entier positif n tel que $\mathcal{Q}D_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^n D_{\mathcal{P}}$. Mais \mathcal{P}^n , comme \mathcal{Q} , est un idéal \mathcal{P} -primaire (car \mathcal{P} est l'unique idéal premier contenant \mathcal{P}^n). Utilisant le Théorème 7.38 (i), on en déduit

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}A_{\mathcal{P}} \cap A = \mathcal{P}^n A_{\mathcal{P}} \cap A = \mathcal{P}^n.$$

(iii) Soit $\mathcal{I} = \bigcap_1^r \mathcal{P}_i^{n_i}$ une décomposition primaire minimale de l'idéal non nul \mathcal{I} . Les idéaux premiers \mathcal{P}_i sont tous maximaux. Ils sont donc tous minimaux parmi les idéaux premiers associés à \mathcal{I} , et il y a unicité de la décomposition primaire minimale.

Comme les idéaux $\mathcal{P}_i^{n_i}$ sont deux à deux comaximaux, on a $\mathcal{I} = \mathcal{P}_1^{n_1} \dots \mathcal{P}_r^{n_r}$ et le Théorème est démontré.

Proposition 10.16 : Dans un anneau de Dedekind D , tout idéal est engendré par deux éléments.

Démonstration : Soit $\mathcal{I} = \mathcal{P}_1^{n_1} \dots \mathcal{P}_r^{n_r}$. D'après le Lemme d'évitement, il existe $a_i \in \mathcal{P}_i^{n_i}$ tel que $a_i \notin \mathcal{P}_j$ pour $j \neq i$ et que $a_i \notin \mathcal{P}_i^{n_i+1}$. Soit $a = a_1 a_2 \dots a_r$. On a $aD = \mathcal{P}_1^{n_1} \dots \mathcal{P}_r^{n_r} \mathcal{J}$, où \mathcal{J} est un produit d'idéaux premiers tous distincts des \mathcal{P}_j . Soient $(\mathcal{P}'_l)_{1 \leq l \leq k}$ les idéaux premiers associés à \mathcal{J} . Comme $\mathcal{I} \not\subset \mathcal{P}'_l$ pour tout l , il existe $b \in \mathcal{I}$ tel que $b \notin \mathcal{P}'_l$ pour tout l . La décomposition primaire de l'idéal engendré par a et b ne peut être que $\cap_1^r \mathcal{P}_i^{n_i}$.

Proposition 10.17 : *Si un anneau de Dedekind D n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers non nuls, il est principal.*

Démonstration : Il suffit de montrer que tout idéal premier non nul est principal. Soient $(\mathcal{P}_i)_{1 \leq i \leq n}$, les idéaux premiers non nuls de l'anneau. D'après le Lemme d'évitement, il existe $a_i \in \mathcal{P}_i$ tel que $a_i \notin \mathcal{P}_j$ pour $j \neq i$ et que $a_i \notin \mathcal{P}_i^2$. L'idéal $a_i D$ est \mathcal{P}_i -primaire et n'est pas contenu dans \mathcal{P}_i^2 .

Comme $D_{\mathcal{P}_i}$ est de valuation discrète et $a_i \in \mathcal{P}_i$,

$$a_i D_{\mathcal{P}_i} \not\subset \mathcal{P}_i^2 D_{\mathcal{P}_i} \Rightarrow a_i D_{\mathcal{P}_i} = \mathcal{P} D_{\mathcal{P}_i}.$$

Comme $a_i D$ est \mathcal{P}_i -primaire, ceci implique $a_i D = \mathcal{P}_i$

Exercice : Démontrer l'énoncé suivant.

Théorème 10.18 : *Si $P \in \mathbf{C}[X, Y]$, l'anneau $\mathbf{C}[X, Y]/\mathcal{P}\mathbf{C}[X, Y]$ est de Dedekind si et seulement si $(P, \partial P/\partial X, \partial P/\partial Y) = \mathbf{C}[X, Y]$.*

Utiliser la Proposition 10.9.

10.4 Groupe des diviseurs et groupe des classes de diviseurs.

Proposition 10.19 : *Soient R un anneau noethérien intégralement clos et \mathcal{P} un idéal premier non nul de R . Les conditions suivantes sont équivalentes*

- (i) *Il n'y a pas d'idéal premier non nul strictement contenu dans \mathcal{P} .*
- (ii) *Il existe un élément $x \in R$ tel que $\mathcal{P} \in \text{Ass}(R/xR)$.*
- (iii) *$R_{\mathcal{P}}$ est un anneau de valuation discrète.*

Démonstration : Montrons (i) \Rightarrow (ii). Si $x \in \mathcal{P}$ est non nul, \mathcal{P} est un idéal premier minimal de xR , donc $\mathcal{P} \in \text{Ass}(R/xR)$.

Si $\mathcal{P} \in \text{Ass}(R/xR)$, alors $\mathcal{P}R_{\mathcal{P}} \in \text{Ass}(R_{\mathcal{P}}/xR_{\mathcal{P}})$, donc $R_{\mathcal{P}}$ est un anneau de valuation discrète d'après le Lemme 10.5.

Enfin, si $R_{\mathcal{P}}$ est un anneau de valuation discrète, $\mathcal{P}R_{\mathcal{P}}$ est le seul idéal premier non nul de $R_{\mathcal{P}}$, ce qui implique (i).

Définition 10.20 : *Soit R un anneau noethérien intégralement clos. Si \mathcal{P} est un idéal premier de R tel que $R_{\mathcal{P}}$ est un anneau de valuation discrète, on dit que \mathcal{P} est un diviseur irréductible de R .*

Rappelons, c'est le Corollaire 10.6, que $R = \cap R_{\mathcal{P}}$ pour \mathcal{P} parcourant l'ensemble des diviseurs irréductibles de R .

Définition 10.21 : Soit R un anneau noethérien intégralement clos.

(i) Le groupe additif libre engendré par les diviseurs irréductibles de R est le groupe des diviseurs de R .

(ii) Un diviseur $\sum_1^r n_i \mathcal{P}_i$ est dit positif si $n_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, r$.

(iii) Un diviseur positif $\sum_1^r n_i \mathcal{P}_i$ est principal si l'idéal $\mathcal{I} = \mathcal{P}_1^{(n_1)} \cap \dots \cap \mathcal{P}_r^{(n_r)}$ est principal.

(iii) Le quotient du groupe des diviseurs de R par le sous-groupe engendré par les diviseurs positifs principaux est le groupe des classes de diviseurs de R .

Remarque : Si R est un anneau de Dedekind, on a vu que

$$\mathcal{P}_1^{(n_1)} \cap \dots \cap \mathcal{P}_r^{(n_r)} = \mathcal{P}_1^{n_1} \dots \mathcal{P}_r^{n_r}.$$

Théorème 10.22 : Si \mathcal{P} est un diviseur irréductible de l'anneau R , soit $v_{\mathcal{P}}$ la valuation discrète d'anneau $R_{\mathcal{P}}$, sur le corps des fractions K de R .

(i) Si x est un élément non nul du corps des fractions K de R , les diviseurs irréductibles \mathcal{P} tels que $v_{\mathcal{P}}(x) \neq 0$ sont en nombre fini.

(ii) L'application $x \rightarrow \text{div}(x) = \sum_{\mathcal{P}} v_{\mathcal{P}}(x) \mathcal{P}$, définie dans le groupe multiplicatif K^* et à valeurs dans le groupe des diviseurs de R , est un homomorphisme de groupes.

$x \in K^* \cap R$ si et seulement si $\text{div}(x) \geq 0$.

(iii) Le noyau de cette application est le groupe multiplicatif des unités de R et son conoyau le groupe des classes de diviseurs.

Démonstration : L'assertion (i) nécessite une explication. Nous l'avons en fait déjà démontrée en définissant $v_{\mathcal{P}}$. En effet, si $a/b = a'/b'$, où $a, b, a', b' \in R_{\mathcal{P}}$, on a vu $v_{\mathcal{P}}(a) - v_{\mathcal{P}}(b) = v_{\mathcal{P}}(a') - v_{\mathcal{P}}(b')$. On en déduit que si $a, b \in R$ et si $v_{\mathcal{P}}(a/b) \neq 0$, on a nécessairement $v_{\mathcal{P}}(a) \neq 0$ ou $v_{\mathcal{P}}(b) \neq 0$.

Autrement dit $a \in \mathcal{P}R_{\mathcal{P}}$ ou $b \in \mathcal{P}R_{\mathcal{P}}$. Mais si $a \in \mathcal{P}R_{\mathcal{P}}$, l'idéal premier $\mathcal{P}R_{\mathcal{P}}$ de $R_{\mathcal{P}}$ est associé à $aR_{\mathcal{P}}$, donc l'idéal premier \mathcal{P} de R est associé à aR . L'idéal premier \mathcal{P} est donc associé à aR ou à bR . Comme les idéaux premiers associés à ces idéaux de R sont en nombre fini (i) est démontrée..

(ii) Comme $v_{\mathcal{P}}(xy) = v_{\mathcal{P}}(x) + v_{\mathcal{P}}(y)$, pour tout \mathcal{P} , il est clair que $\text{div}(\cdot)$ est un homomorphisme de groupes. Si $x \in K^*$, on a

$$\text{div}(x) \geq 0 \Leftrightarrow v_{\mathcal{P}}(x) \geq 0 \quad \forall \mathcal{P} \Leftrightarrow x \in R_{\mathcal{P}} \quad \forall \mathcal{P}.$$

Mais $R = \bigcap_{\mathcal{P}} R_{\mathcal{P}}$, pour \mathcal{P} diviseur irréductible de R , donc (ii) est démontrée.

(iii) $\text{div}(x) = 0$ si et seulement si $x \in R$ et $x^{-1} \in R$, i.e. x est une unité de R . Enfin, le conoyau de $\text{div}(\cdot)$ est le groupe des classes de diviseurs par définition de ce groupe.

Théorème 10.23 : Soit R un anneau noethérien intégralement clos. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) R est factoriel.

(ii) Tout diviseur irréductible est un idéal premier principal.

(iii) Le groupe des classes de diviseurs de R est nul.

Démonstration :

Supposons R factoriel. Soient \mathcal{P} un diviseur irréductible et $x \in \mathcal{P}$ un élément non nul. Comme x est produit de facteurs irréductibles, il existe un élément irréductible $a \in \mathcal{P}$. Comme aR est un idéal premier non nul contenu dans \mathcal{P} , on a $aR = \mathcal{P}$ (Proposition 10.19), donc (i) \Rightarrow (ii).

Soit $\mathcal{I} = \mathcal{P}_1^{(n_1)} \cap \dots \cap \mathcal{P}_r^{(n_r)}$ l'idéal du diviseur positif $\sum_1^r n_i \mathcal{P}_i$. Si $\mathcal{P}_i = a_i R$, on sait (Proposition 7.47) que $a_i^{n_i} R = \mathcal{P}_i^{(n_i)}$. On a alors $\mathcal{I} = a_1^{n_1} \dots a_r^{n_r} R$, donc \mathcal{I} est principal et le groupe des classes de diviseurs est nul. Réciproquement si tout diviseur positif est principal, tout diviseur irréductible est principal. On a montré (ii) \iff (iii).

Enfin, montrons (ii) \implies (i). Considérons $xR = \cap_1^r \mathcal{Q}_i$ une décomposition primaire minimale d'un idéal principal non nul xR , où \mathcal{Q}_i est \mathcal{P}_i -primaire. D'après le Théorème 10.3 (iii), les idéaux premiers \mathcal{P}_i sont des diviseurs irréductibles, donc ils sont principaux.

Si $\mathcal{P}_i = a_i R$, il existe n_i tel que $\mathcal{Q}_i = a_i^{n_i} R$. En effet, on a $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_i R_{\mathcal{P}_i} \cap R$ (Corollaire 7.41), et il existe n_i tel que $\mathcal{Q}_i R_{\mathcal{P}_i} = a_i^{n_i} R_{\mathcal{P}_i}$ (Proposition 10.10). Comme $a_i^{n_i} R$ est \mathcal{P}_i -primaire, on a

$$a_i^{n_i} R = a_i^{n_i} R_{\mathcal{P}_i} \cap R = \mathcal{Q}_i R_{\mathcal{P}_i} \cap R = \mathcal{Q}_i.$$

On en déduit facilement $xR = a_1^{n_1} \dots a_r^{n_r} R$.

Si x est irréductible, on a $r = n_1 = 1$, donc xR est premier. Sinon, x est évidemment produit d'éléments irréductibles. Donc R est factoriel.

Corollaire 10.24 : *Soit R un anneau de Dedekind. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) R est principal.
- (ii) Tout idéal premier est principal.
- (iii) Le groupe des classes de diviseurs de R est nul.

Il suffit de démontrer qu'un anneau de Dedekind est principal si et seulement si il est factoriel. C'est un excellent exercice à faire.

Chapter 11

Extensions algébriques de corps.

11.1 Extensions finies.

Nous avons déjà démontré le Théorème suivant.

Théorème 11.1 : Soient $K \subset L$ une extension de corps et $x \in L$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) x est algébrique sur K ,
- (ii) $K[x]$ est un K -espace vectoriel de dimension finie.
- (iii) $K[x] = K(x)$.

(i) \Leftrightarrow (ii) est un cas particulier du Théorème 8.5 et (i) \Leftrightarrow (iii) est le Corollaire 8.22.

Rappelons aussi le Corollaire suivant :

Corollaire 11.2 : Si $K \subset L$ une extension finie de corps, alors L est algébrique sur K .

Définition 11.3 : Si $K \subset L$ est une extension finie, on note $[L : K]$ le rang du K -espace vectoriel L , qu'on appelle le degré de l'extension.

Définition 11.4 : Si $K \subset F$ est une extension de corps et si $x \in F$ est algébrique sur K , on appelle degré de x sur K et on note $d_K^0(x)$ le rang $[K[x] : K]$ du K -espace vectoriel $K[x]$.

Proposition 11.5 : Si P est le polynôme minimal de x sur K , on a

$$K[X]/(P) \simeq K[x] \quad \text{et} \quad d_K^0(x) = d^0 P.$$

C'est la Proposition 8.4.

Théorème 11.6 : Soient $K \subset L \subset F$ des extensions de corps.

- (i) Si L est algébrique sur K et si F est algébrique sur L , alors F est algébrique sur K .
- (ii) Si les extensions sont finies on a $[F : K] = [F : L][L : K]$.

Démonstration : (i) est un cas particulier de la Proposition 8.13.

Pour (ii), on vérifie immédiatement que si (e_i) est une base de F sur L et (f_j) une base de L sur K , alors $(e_i f_j)$ est une base de F sur K .

Corollaire 11.7 : Si $x \in L$ et si $K \subset L$ est une extension finie, alors $d_K^0(x)$ divise $[L : K]$.

Théorème 11.8 : Soient K un corps de caractéristique 0 et P un polynôme irréductible de $K[X]$. Si L est une extension de K telle que P se décompose en un produit de polynômes de degré 1 à coefficients dans L , les racines de P dans L sont simples.

Démonstration : Soit $x \in L$ une racine de P . Si x est une racine multiple de P , c'est aussi une racine du polynôme dérivé P' de P . Comme P est irréductible, c'est (à un élément inversible près) le polynôme minimal de x sur K , donc $P' \in PK[X]$. Ceci implique évidemment $P' = 0$ car $d^0 P' = d^0 P - 1$ (nous sommes en caractéristique 0). C'est impossible.

Rappelons qu'un corps K est algébriquement clos si tout polynôme irréductible de $K[X]$ est de degré 1.

Définition 11.9 : Si $K \subset \Omega$ est une extension algébrique de corps et si Ω est algébriquement clos, on dit que Ω est une clôture algébrique de K .

Définition 11.10 : Soient Ω une clôture algébrique de K et $P \in K[X]$.

Si $P = u \prod_{i=1}^n (X - x_i)$ (où $u \in K$) est la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles dans $\Omega[X]$, le corps $K[x_1, \dots, x_n]$ est le corps de décomposition de P dans Ω .

Il est clair que le corps de décomposition de P dans Ω est le plus petit sous-corps de Ω contenant K et dans lequel P admet une décomposition en facteurs de degré 1.

On admet les deux Théorèmes qui suivent;

Théorème 11.11 : Tout corps a une clôture algébrique.

Définition 11.12 : Si L et F sont deux extensions de K , un K -isomorphisme de L dans F est un homomorphisme (nécessairement injectif) de corps $f : L \rightarrow F$ tel que $f(a) = a$ pour tout $a \in K$.

Théorème 11.13 : Soient Ω une clôture algébrique de K et $L \subset L'$ des extensions algébriques de K . Si $u : L \rightarrow \Omega$ est un K -isomorphisme, il existe un K -isomorphisme $u' : L' \rightarrow \Omega$ tel que la restriction u'/L de u' à L est u (on dit que u' prolonge u).

Remarque : Ce dernier résultat se démontre facilement si l'extension $L \subset L'$ est finie et fastidieusement en général.

Le Théorème 11.8 implique le résultat suivant.

Théorème 11.14 : Soient K un corps de caractéristique 0 et Ω une clôture algébrique de K . Si $P \in K[X]$ est un polynôme irréductible de degré n , alors P admet n racines distinctes dans Ω .

Dans la suite de ce texte, tous les corps considérés sont de caractéristique 0. Certains des résultats présentés sont vrais sans cette restriction, mais nous voulons aller vite.

Définition 11.15 : Soit Ω une clôture algébrique du corps K . Si L et F sont deux extensions de K contenues dans Ω , on dit qu'elles sont conjuguées s'il existe un K -isomorphisme $u : L \rightarrow F$ tel que $u(L) = F$.

Remarque : D'après ce qu'on a admis plus haut, u se prolonge en un K -isomorphisme de Ω dans lui-même.

Définition 11.16 : Deux éléments $x, y \in \Omega$ sont conjugués sur K s'il existe un K -isomorphisme $u : K[x] \rightarrow K[y]$ tel que $u(x) = y$.

Proposition 11.17 : x et y sont conjugués sur K si et seulement si ils ont le même polynôme minimal sur K .

Démonstration : Soient P le polynôme minimal de x sur K et Q le polynôme minimal de y sur K .

Supposons que x et y sont conjugués par le K -isomorphisme u . On a

$$0 = u(0) = u(P(x)) = P(u(x)) = P(y).$$

Donc Q divise P . Mais P divise Q pour la même raison, donc $P = Q$.

Réciproquement, si $P = Q$, on a $K[x] \simeq K[X]/(P) \simeq K[y]$. Cet isomorphisme est un K -isomorphisme. L'image de x est y .

Corollaire 11.18 : Soient K un corps et Ω une clôture algébrique de K .

Si $K \subset L$ est une extension de corps et si $x \in L$ est un élément algébrique sur K , le nombre de K -isomorphismes distincts $K[x] \rightarrow \Omega$ est exactement $[K[x] : K]$.

Démonstration : Le polynôme minimal de x sur K a n racines distinctes dans Ω (Théorème 11.14).

Lemme 11.19 : Si $[L : K] = n$, il existe n K -isomorphismes distincts de L dans Ω .

Démonstration : Faisons une récurrence sur n . Soit $x \in L$ avec $x \notin K$. Posons $F = K[x]$, $m = [F : K]$ et $d = [L : F]$. On a $n = md$ avec $d < n$.

D'après l'énoncé précédent, il existe m K -isomorphismes distincts $u_i, i = 1, \dots, m$, de F dans Ω .

Nous savons (Théorème 11.13) que pour tout i il existe un prolongement v_i de u_i à L . On a $v_i(F) \subset v_i(L)$ et $[v_i(L) : v_i(F)] = d$.

Par hypothèse de récurrence, il existe des $v_i(F)$ -isomorphismes distincts $s_{ij} : v_i(L) \rightarrow \Omega$, avec $j = 1, \dots, d$.

Posons $t_{ij} = s_{ij} \circ v_i$, pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq d$, et montrons que ces K -isomorphismes de L dans Ω sont deux à deux distincts.

$t_{ij}/F = v_i$, donc $i \neq i'$ implique $t_{ij} \neq t_{i'j'}$ pour tous (j, j') , d'une part. D'autre part $j \neq j'$ implique $s_{ij} \neq s_{ij'}$, donc $t_{ij} \neq t_{ij'}$, et la proposition.

Corollaire 11.20 (Théorème de l'élément primitif) : Si L est une extension finie de K , il existe $x \in L$ tel que $L = K[x]$ (rappelons que K est de caractéristique 0).

Démonstration : Posons $n = [L : K]$. Il suffit de trouver $x \in L$ tel que $[K[x] : K] = n$, autrement dit $x \in L$ ayant n conjugués distincts.

Soient u_i , avec $i = 1, \dots, n$, des K isomorphismes distincts de L dans Ω . On cherche $x \in L$ tel que $i \neq j$ implique $u_i(x) \neq u_j(x)$. Considérons pour tous (i, j) , avec $i \neq j$, le K -sous-espace vectoriel strict $L_{ij} = \text{Ker}(u_i - u_j)$, de L . Il suffit de prouver $L \neq \cup L_{ij}$. C'est le Lemme général suivant:

Lemme 11.21 (*Lemme d'évitement pour les espaces vectoriels*) : Soient k un corps infini et E un k -espace vectoriel de dimension finie. Si E_i , avec $i = 1, \dots, n$, sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $E \neq E_i$, pour tout i , alors $E \neq \cup_i E_i$.

Démonstration : C'est évident pour $n = 1$. Faisons une récurrence sur n .

Il existe $x \in E$ tel que $x \notin \cup_1^{n-1} E_i$. Si $x \notin E_n$, le Lemme est démontré. Sinon, soit $y \notin E_n$. Alors $ax + y \notin E_n$, pour tout $a \in k$. Si le Lemme est faux, il existe, pour tout $a \in k$, un entier $i \leq n - 1$ tel que $ax + y \in E_i$. Comme k est infini, il existe $i \leq n - 1$ et $a \neq b$ tels que $ax + y \in E_i$ et $bx + y \in E_i$. Ceci implique $x \in E_i$, soit une contradiction.

11.2 Extensions normales.

Définition 11.22 : Une extension $K \subset L$ est normale si tout polynôme irréductible $P \in K[X]$ ayant une racine dans L est décomposable en produit de polynômes de degré 1 dans $L[X]$.

Exemples :

(i) Si $[L : K] = 2$, l'extension L de K est normale. En effet, soit $x \in L$ et $P \in K[X]$ son polynôme minimal sur K . Comme $d^0 P \leq 2$, il est clair que $K[x]$ est un corps de décomposition de P .

(ii) Une clôture algébrique Ω de K est une extension normale de K .

Proposition 11.23 : Si L est une extension normale de K et si $K \subset F \subset L$, alors L est une extension normale de F .

A vérifier.

Théorème 11.24 : Soit Ω une clôture algébrique de K . Si $L \subset \Omega$, alors L est une extension normale de K si et seulement si pour tout K -isomorphisme $u : L \rightarrow \Omega$, on a $u(L) \subset L$.

Démonstration : Soit $x \in L$ et soit $P \in K[X]$ son polynôme minimal.

Si $K \subset L$ est une extension normale, toutes les racines de P dans Ω sont dans L . Si $u : L \rightarrow \Omega$ est un K -isomorphisme, $u(x)$ est une racine de P , donc $u(x) \in L$.

Réciproquement pour tout racine y de P dans Ω , on sait (Théorème 11.13) qu'il existe un K -isomorphisme $u : L \rightarrow \Omega$ tel que $u(x) = y$, donc $y \in L$.

Corollaire 11.25 : Le corps de décomposition dans Ω d'un polynôme $P \in K[X]$ est une extension normale de K .

Démonstration : Soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega$ les racines de P . Alors $L = K[x_1, \dots, x_n]$ est le corps de décomposition de P . Soit u est un K -isomorphisme de L dans Ω . Pour tout i il existe j tel que $u(x_i) = x_j$, donc $u(L) \subset L$. On applique le Théorème.

Théorème 11.26 : Soit L une extension finie de K et soit G le groupe des K -automorphismes de L . Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) L'extension $K \subset L$ est normale.
- (ii) L'ordre de G est $\geq [L : K]$.
- (iii) $g(x) = x$ pour tout $g \in G$ implique $x \in K$.

De plus, si ces conditions sont réalisées l'ordre de G est $[L : K]$.

Démonstration : Le nombre de K -isomorphismes distincts de L dans Ω est $[L : K]$ (Corollaire 11.18 et Théorème de l'élément primitif). Si L est une extension normale de K , ils sont tous à valeurs dans L . Un K -isomorphisme de L dans L est injectif donc surjectif (car L est un K -espace vectoriel de dimension finie), donc c'est un K -automorphisme de L . On a montré que (i) implique (ii).

Soit F le sous-corps de L formé par les éléments $x \in L$ tels que $g(x) = x$. Il est clair que $K \subset F$. D'après le Théorème de l'élément primitif, il existe $y \in L$ tel que $L = F[y]$. Les éléments de G sont des F -isomorphismes de L dans L , donc dans Ω . Le nombre de F -isomorphismes distincts de L dans Ω est précisément $[L : F]$ (Corollaire 11.18). On a donc $[L : F] \geq \text{ord}(G) \geq [L : K]$. Comme $[L : K] = [L : F][F : K]$, on en déduit $F = K$, donc (ii) implique (iii), et $\text{ord}(G) = [L : K]$.

Supposons maintenant (iii). Soient g_1, \dots, g_n les éléments de G . Si $x \in L$, posons $x_i = g_i(x)$ et montrons que les conjugués de x dans Ω sont tous parmi les x_i , donc dans L , ce qui démontrera (i). Considérons le polynôme $P = \sum_{i=0}^n a_i X^{n-i} = \prod_{i=1}^n (X - x_i)$, de $L[X]$. Remarquons que ses coefficients

$$a_1 = - \sum_{i=1}^n x_i, \quad a_2 = \sum_{i \neq j} x_i x_j, \dots$$

sont tous invariants sous l'action de G , i.e. $g_k(a_i) = a_i$ pour tout (k, i) . Donc, compte tenu de (iii), $P \in K[X]$. Comme x est une racine de P , le polynôme minimal de x divise P . Les racines du polynôme minimal de x sont donc racines de P .

Le Théorème est démontré.

Définition 11.27 : Le groupe $G = \text{Aut}_K(L)$ des K -isomorphismes de L est le Groupe de Galois $\text{Gal}(L/K)$ de l'extension normale $K \subset L$. Il est d'ordre $[L : K]$.

Théorème 11.28 Soit L une extension normale finie de K et soit $G = \text{Gal}(L/K)$ le groupe de Galois de cette extension.

(i) Si G' est un sous-groupe de G , l'ensemble $L^{G'}$ des éléments de L tels que $g'(x) = x$ pour tout $g' \in G'$ est un sous-corps de L contenant K .

(ii) Si $K \subset F \subset L$ est une sous extension de L , le groupe de Galois $\text{Gal}(L/F)$ de l'extension normale $F \subset L$ est un sous-groupe de G .

(iii) On a $\text{Gal}(L/L^{G'}) = G'$ et $L^{\text{Gal}(L/F)} = F$ (c'est la correspondance de Galois).

Le sous-groupe G' de G est distingué si et seulement si l'extension $K \subset L^{G'}$ est normale.

Démonstration : (i) et (ii) sont évidents.

Comme l'extension $F \subset L$ est normale, l'égalité $L^{\text{Gal}(L/F)} = F$ est incluse dans le Théorème 11.26..

G' est évidemment un sous-groupe de $Gal(L/L^{G'})$. Ce dernier groupe est d'ordre $[L : L^{G'}]$. Pour montrer qu'ils sont égaux, il suffit de prouver $[L : L^{G'}] \leq ord(G')$.

Soit $x \in L$ tel que $L = L^{G'}[x]$ (Théorème de l'élément primitif). Soient g_1, \dots, g_r les éléments de G' et $x_i = g_i(x)$.

Les coefficients du polynôme $P = \prod_{i=1}^r (X - x_i)$ de $L[X]$ sont invariants sous l'action de G' , donc $P \in L^{G'}[X]$. Comme x est racine de P , le polynôme minimal de x sur $L^{G'}$ divise P . Il est donc de degré $\leq r$, ce qui démontre

$$[L : L^{G'}] = d_{L^{G'}}^0(x) \leq ord(G'),$$

soit l'inégalité annoncée.

Il reste à démontrer que G' est un sous-groupe distingué de G si et seulement si $K \subset L^{G'}$ est normale.

Supposons G' distingué dans G . Si $g \in G$ et $g' \in G'$, on a $g^{-1}g'g \in G'$. Donc $g^{-1}g'g(x) = x$ pour tout $x \in L^{G'}$; soit $g'(g(x)) = g(x)$ pour tout $g \in G$, $g' \in G'$ et $x \in L^{G'}$. Ceci implique $g(x) \in L^{G'}$ pour tout $g \in G$ et $x \in L^{G'}$. Autrement dit, $g(L^{G'}) \subset L^{G'}$ pour tout $g \in G$, donc l'extension $K \subset L^{G'}$ est normale.

Supposons maintenant que $L^{G'}$ est une extension normale de K . On a $g(L^{G'}) \subset L^{G'}$ pour tout $g \in G$. Donc, pour tout $g \in G$, la restriction $g/L^{G'}$ de g à $L^{G'}$ est dans $Aut_K(L^{G'}) = Gal(L^{G'}/K)$. L'application de restriction $G \rightarrow Gal(L^{G'}/K)$ que nous venons de définir est un homomorphisme de groupe dont $Gal(L/L^{G'})$ est le noyau. Ce sous-groupe de G est donc distingué.

11.3 Trace et norme.

Définition 11.29 : Soient $K \subset L$ une extension finie normale de corps de caractéristique 0 et G son groupe de Galois. La trace et la norme, sur K , d'un élément $x \in L$ sont définis par

$$Tr_{L/K}(x) = \sum_{g \in G} g(x) \quad \text{et} \quad N_{L/K}(x) = \prod_{g \in G} g(x).$$

Comme $g(Tr_{L/K}(x)) = Tr_{L/K}(x)$ et $g(N_{L/K}(x)) = N_{L/K}(x)$ pour tout $x \in L$, il est clair que $Tr_{L/K}$ et $N_{L/K}$ sont à valeurs dans K .

L'énoncé suivant est évident (les automorphismes g sont K -linéaires).

Proposition 11.30 : (i) $Tr_{L/K}(\cdot)$ est un forme linéaire sur le K -espace vectoriel L .

(ii) $N_{L/K}(xy) = N_{L/K}(x)N_{L/K}(y)$.

Théorème 11.31 Soient $K \subset L$ une extension finie normale de corps de caractéristique 0 et G son groupe de Galois. Pour $x \in L$, soient P son polynôme minimal sur K et $P_{x,L}$ le polynôme caractéristique de la multiplication par x dans le K -espace vectoriel L . Si $d = d_K^0(x)$ et $n = [L : K]$, on a

$$\prod_{g \in G} (X - g(x)) = P^{n/d} = P_{x,L}.$$

Démonstration : Soit H le groupe de Galois de l'extension normale $K[x] \subset L$. Si $g \in G$, alors $g \in H \Leftrightarrow g(x) = x$. Posons $m = [L : K[x]]$. On a $dm = n$.

Montrons d'abord $\prod_{g \in G} (X - g(x)) = P^m$.

Soient x_1, \dots, x_d les racines deux à deux distinctes de P et $g_1, \dots, g_d \in G$ tels que $g_i(x) = x_i$. Alors $g(x) = x_i \Leftrightarrow g \in g_i H$. On sait que G est la réunion disjointe des $(g_i H)_{i=1}^d$ et que $g_i H$ a m éléments pour tout i . On a alors

$$\prod_{g \in G} (X - g(x)) = \prod_{i=1}^d \left(\prod_{g \in g_i H} (X - g(x)) \right) = \prod_{i=1}^d (X - x_i)^m = \left(\prod_{i=1}^d (X - x_i) \right)^m = P^m.$$

Montrons ensuite $P_{x,L} = P^m$.

La multiplication par x dans le K -espace vectoriel $K[x]$ a son polynôme caractéristique de degré d . C'est un multiple du polynôme minimal de x qui a le même degré, donc il est égal au polynôme minimal de x .

Soit (e_1, \dots, e_m) une base de L sur $K[x]$. Il est clair que le K -espace vectoriel $K[x]e_i$ est stable pour la multiplication par x . De plus, le $K[x]$ -isomorphisme naturel $K[x] \simeq K[x]e_i$ montre que P est aussi le polynôme caractéristique de ce K -endomorphisme de $K[x]e_i$. La décomposition $L = \bigoplus_{i=1}^m K[x]e_i$, en somme directe de sous-espace stable pour la multiplication par x , montre alors $P_{x,L} = P^m$.

Corollaire 11.32 : Si $P = X^d - a_1 X^{d-1} + \dots + (-1)^d a_d$ est le polynôme minimal de x sur K , on a

$$Tr_{L/K}(x) = [L : K[x]]a_1 \quad \text{et} \quad N_{L/K}(x) = a_d^{[L:K[x]]}.$$

Théorème 11.33 : Soit $K \subset L$ une extension finie normale de corps de caractéristique 0.

$$(x, y) \rightarrow Tr_{L/K}(xy)$$

est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur le K -espace vectoriel L .

Démonstration : C'est évidemment une forme bilinéaire symétrique. La non dégénérescence se déduit du Lemme suivant :

Lemme 11.34 : Si (z_1, \dots, z_n) est une base du K -espace vectoriel L et si g_1, \dots, g_n sont les éléments du groupe de Galois de l'extension, on a une égalité de matrices

$$(Tr_{L/K}(z_i z_j))_{i,j} = ({}^t(g_i(z_j))_{i,j})((g_i(z_j))_{i,j}).$$

Démonstration du Lemme : On a

$$\sum_l g_l(z_i) g_l(z_j) = \sum_l g_l(z_i z_j) = Tr_{L/K}(z_i z_j).$$

Démonstration du Théorème :

Soient x un élément primitif de l'extension $K \subset L$ et $x_i = g_i(x)$, pour $i = 1, \dots, n$, ses conjugués deux à deux distincts. La matrice $(g_i(x^j))_{i,j}$ associée à la base $(1, x, \dots, x^{n-1})$ du K -espace vectoriel L est la matrice de Vandermonde $(x_i^j)_{0 \leq i, j \leq (n-1)}$, dont le déterminant $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$ est évidemment non nul.

11.4 Appendice : Racines de l'unité et groupes de galois cycliques.

K est un corps de caractéristique 0 et Ω une clôture algébrique de K .

Proposition 11.35 : *Les racines de $X^n - 1 = 0$ sont simples.*

C'est clair car l'unique racine de $nX^{n-1} = 0$ n'est pas racine de $X^n - 1 = 0$.

L'énoncé qui suit est immédiat.

Proposition 11.36 : *Les racines de $X^n - 1 = 0$ forment un sous-groupe du groupe multiplicatif Ω^* .*

Définition 11.37 : *Si $a \in \Omega^*$ est tel que $a^d = 1$ et que $a^m \neq 1$ pour $m < d$, c'est une racine primitive d -ième de 1.*

Proposition 11.38 : *Une racine primitive d -ième de 1 dans Ω^* engendre le groupe des racines de $X^d = 1$.*

Démonstration : Une racine primitive d -ième de 1 engendre un groupe d'ordre d contenu dans le groupe, à d éléments, des racines de $X^d = 1$.

Lemme 11.39 : *S'il existe une racine primitive d -ième de 1 dans Ω^* , il en existe exactement $\phi(d)$, où $\phi(d)$ est le nombre des entiers premiers à d contenus dans $[0, \dots, d - 1]$ (on pose $\phi(1) = 1$).*

Démonstration : S'il existe dans Ω^* une racine primitive d -ième de 1, les racines de $X^d - 1 = 0$ forment un sous-groupe cyclique d'ordre d de G . Ce sous-groupe est isomorphe à $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$. Par cet isomorphisme les racines primitives d -ièmes de 1 correspondent aux générateurs du groupe cyclique $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ dont nous savons que ce sont les classes des éléments premiers à d .

Théorème 11.40 : *Un sous-groupe fini de Ω^* dont les éléments sont des racines de 1 est cyclique.*

Démonstration : Soit G un tel groupe. Si n est l'ordre de G , tout élément de G est racine n -ième de 1. Montrons que G contient une racine primitive n -ième de 1, qui engendrera nécessairement G .

Si $a \in G$, il existe un entier positif d qui divise n et tel que a est une racine primitive d -ième de 1. Soit E_d l'ensemble des racines primitives d -ièmes de 1 contenues dans G . Il est clair que G est la réunion disjointe des E_d (pour d diviseur de n). Comme on a vu que chaque E_d contient 0 ou $\phi(d)$ éléments, on conclut à l'aide du Lemme suivant:

Lemme 11.41 $\sum_{d|n} \phi(d) = n$.

Démonstration laissée aux soins du Lecteur.

Corollaire 11.42 (du Théorème 11.40) : *Les racines de $X^n - 1 = 0$ forment un sous-groupe cyclique d'ordre n de Ω^* .*

Théorème 11.43 : On suppose que le corps K contient toutes les racines n -ièmes de 1.

(i) Soit $x \in \Omega$ tel que $x^n = a \in K$. L'extension $K[x]$ de K est normale et son groupe de Galois est cyclique. L'ordre d de ce groupe divise n et $x^d \in K$.

(ii) Si $K \subset L$ est une extension normale telle que $d = [L : K]$ divise n et dont le groupe de Galois est cyclique, il existe $x \in L$ tel que $x^d \in K$ et que $L = K[x]$.

Démonstration :

(i) Soit $\eta \in K$ une racine primitive n -ième de 1. Il est clair que les éléments $\eta^i x$ (pour $i < n$) sont des racines deux à deux distinctes de $X^n = a$. Donc l'extension $K[x]$ de K est normale. Si G est le groupe de Galois de cette extension et si $g \in G$, il existe $i < n$ tel que $g(x) = \eta^i x$. L'application $g \rightarrow \eta^i = g(x)x^{-1}$ est évidemment un homomorphisme injectif de G dans le groupe des racines n -ièmes de 1. Donc G est isomorphe à un sous-groupe de ce groupe. Comme tous ces sous-groupes sont cycliques, (i) est démontré.

(ii) Soit $\eta \in K$ une racine primitive d -ième de 1. Si τ est un générateur du groupe de Galois G de l'extension, on va montrer qu'il existe un élément non nul $x \in L$ tel que $\tau(x) = \eta x$. Le Théorème se déduit immédiatement de l'existence d'un tel x , car $\tau^i(x) = \eta^i x$ prouve d'une part que x a d conjugués distincts, donc $L = K[x]$, et d'autre part que $x^d = \prod_{i=0}^{d-1} \tau^i(x) \in K$.

Proposition 11.44 : Il existe $x \in L$, $x \neq 0$ tel que $\tau(x) = \eta x$.

Démonstration : On cherche un élément $x \in L$ tel que $\eta^{-1}\tau(x) = x$.

Remarquons d'abord que $\eta^{-1} \in K$ implique $\tau(\eta^{-1}) = \eta^{-1}$, donc $\prod_{i=1}^d \tau^i(\eta^{-1}) = (\eta^{-1})^d = 1$.

Soit $a \in L$ un élément tel que $\prod_{i=1}^d \tau^i(a) = 1$. Montrons qu'il existe $b \in L$ tel que $a\tau(b) = b$.

Posons $e_i = a\tau(a)\dots\tau^i(a)$. On vérifie facilement que

$$a\tau\left(\sum_{i=0}^{d-1} e_i \tau^i(c)\right) = \sum_{i=0}^{d-1} e_i \tau^i(c)$$

pour tout $c \in L$. En effet, on a

$$a\tau(e_i \tau^i(c)) = e_{i+1} \tau^{i+1}(c) \quad \text{pour } 0 \leq i < d-1 \quad \text{et}$$

$$a\tau(e_{d-1} \tau^{d-1}(c)) = a \prod_{i=1}^d \tau^i(a) \tau^d(c) = ac.$$

Pour conclure, il reste à démontrer qu'il existe $c \in L$ tel que $\sum_{i=0}^{d-1} e_i \tau^i(c) \neq 0$. Mais ceci se déduit du résultat plus général suivant :

Lemme 11.45 (Théorème de Dedekind): Soit $K \subset L$ une extension. Si g_1, \dots, g_n sont des K -isomorphismes distincts de L dans Ω et si $z_i \in \Omega$ pour $i = 1, \dots, n$, alors $\sum_{i=1}^n z_i g_i = 0$ implique $z_i = 0$ pour $i = 1, \dots, n$.

Démonstration : On peut faire une récurrence sur n et supposer le résultat vrai pour $n - 1$ K -isomorphismes distincts. Si $\sum_{i=1}^n z_i g_i = 0$, on a pour tout $x \in L$ et $y \in L$ la relation

$$\sum_{i=1}^n z_i g_i(xy) = \sum_{i=1}^n z_i g_i(x) g_i(y) = 0.$$

On en déduit pour tout $x \in L$ la relation

$$\sum_{i=1}^n z_i g_i(x) g_i = 0.$$

Combinant avec la relation $g_n(x) \sum_{i=1}^n z_i g_i = 0$, on trouve une nouvelle relation

$$\sum_{i=1}^{n-1} z_i (g_i(x) - g_n(x)) g_i = 0.$$

Ceci implique $z_i (g_i(x) - g_n(x)) = 0$ pour $i = 1, \dots, n-1$. Mais comme $g_i \neq g_n$, pour $i < n$, il existe $x \in L$ tel que $g_i(x) \neq g_n(x)$. On en déduit $z_i = 0$, pour $i < n$, et $z_n = 0$. Le Théorème de Dedekind est démontré.

Chapter 12

Extensions entières d'anneaux noethériens.

12.1 Extensions entières d'un anneau intègre noethérien.

Théorème 12.1 : Soit $A \subset B$ une extension entière d'anneaux intègres de caractéristique 0, telle que le corps des fractions L de B est une extension finie du corps des fractions K de A .

Si A est noethérien et intégralement clos, alors B est fini sur A .

Démonstration : Soit $z \in L$ un élément primitif de l'extension $K \subset L$. Si L' est le corps de décomposition du polynôme minimal de z sur K , dans une clôture algébrique de L , il suffit de démontrer que la fermeture intégrale de A dans L' est un A -module de type fini. En effet, B est un sous- A -module de cet anneau et A est noethérien. Autrement dit, on peut supposer que l'extension $K \subset L$ est normale.

Soit $S = A - \{0\}$. Comme $L = S^{-1}B$, il existe une base (x_1, \dots, x_n) du K -espace vectoriel L telle que $x_i \in B$ pour $i = 1, \dots, n$.

Rappelons que $(x, y) \rightarrow Tr_{L/K}(xy)$ est une forme bilinéaire non dégénérée sur L (Théorème 11.33). Soit (y_1, \dots, y_n) la base duale de L pour cette forme ($Tr_{L/K}(x_i y_j) = \delta_{ij}$).

Montrons que B est un sous- A -module du A -module de type fini engendré par y_1, \dots, y_n . Soit $v \in B \subset L$. Il existe $a_i \in K$ tels que $v = a_1 y_1 + \dots + a_n y_n$. On a

$$Tr_{L/K}(x_i v) = \sum_j a_j Tr_{L/K}(x_i y_j) = a_i.$$

Mais $x_i, v \in B$ implique $x_i v \in B$. On en déduit que le polynôme minimal de $x_i v$ sur K est à coefficients dans A (Lemme 8.28), donc que $a_i = Tr_{L/K}(x_i v) \in A$ (Corollaire 11.32). Le Théorème est démontré.

Corollaire 12.2 : Soient K un corps de caractéristique 0 et A une K -algèbre intègre de type fini. Si L est une extension finie du corps des fractions de A , la fermeture intégrale de A dans L est finie sur A .

En particulier, la clôture intégrale de A est finie sur A .

Démonstration : On sait (Lemme de normalisation) que A est fini sur un sous-anneau de polynômes R . Le corps des fractions de A est évidemment fini sur celui de R , donc L aussi. La fermeture intégrale de A dans L est aussi la fermeture intégrale de R dans L . D'après le Théorème précédent, elle est finie sur R qui est intégralement clos. A fortiori elle est finie sur A .

12.2 Appendice : Groupe de galois et idéaux premiers

Théorème 12.3 : Soit $K \subset L$ une extension normale et finie de corps de caractéristique 0 de groupe de Galois G . Soit B un anneau dont le corps des fractions est L et tel que $g(B) \subset B$ pour tout $g \in G$. Soit $A = B \cap K$, l'anneau des éléments de B invariants par G . Alors

(i) B est entier sur A .

(ii) Si \mathcal{P} est un idéal premier de B et $g \in G$, alors $g(\mathcal{P})$ est un idéal premier de B tel que $g(\mathcal{P}) \cap A = \mathcal{P} \cap A$. De plus G opère transitivement sur l'ensemble des idéaux premiers \mathcal{N} de B tels que $\mathcal{N} \cap A = \mathcal{P} \cap A$.

(iii) Le corps des fractions k' de B/\mathcal{P} est une extension normale finie du corps des fractions k de $A/(\mathcal{P} \cap A)$.

(iv) Si G' est le sous-groupe de G formé des éléments g tels que $g(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, il y a un homomorphisme surjectif naturel de G' dans le groupe de Galois de l'extension $k \subset k'$.

Démonstration :

(i) Soient g_1, \dots, g_n les éléments de G . Si $x \in B$, les conjugués $g_i(x)$ de x sont aussi dans B . Les coefficients du polynôme $\prod_{i=1}^n (X - g_i(x))$ sont dans A , donc x est entier sur A .

(ii) g est un automorphisme de B , donc $g(\mathcal{P})$ est un idéal premier de $B = g(B)$.

On a $x \in \mathcal{P} \cap A \Rightarrow g(x) = x \in g(\mathcal{P}) \cap A$ d'une part,

et $y \in g(\mathcal{P}) \cap A \Rightarrow g^{-1}(y) = y \in \mathcal{P} \cap A \Rightarrow y = g(y) \in g(\mathcal{P} \cap A)$, d'autre part.

Montrons que l'opération de G est transitive. Soit \mathcal{N} un idéal premier tel que $\mathcal{N} \cap A = \mathcal{P} \cap A$. Si $x \in \mathcal{N}$, on a $\prod_1^n g_i(x) \in \mathcal{N} \cap A = \mathcal{P} \cap A$. Donc il existe i tel que $g_i(x) \in \mathcal{P}$. On en déduit $\mathcal{N} \subset \cup_1^n g_i(\mathcal{P})$. Le Lemme d'évitement pour les idéaux premiers démontre alors l'existence d'un entier i tel que $\mathcal{N} = g_i(\mathcal{P})$.

Pour $x \in B$, notons \bar{x} sa classe dans B/\mathcal{P} .

(iii) x est racine du polynôme $\prod_1^n (X - g_i(x))$ à coefficients dans A et dont toutes les racines sont dans B . La classe \bar{x} est racine du polynôme $\prod_1^n (X - \overline{g_i(x)})$ à coefficients dans $A/(\mathcal{P} \cap A)$ et dont toutes les racines sont dans B/\mathcal{P} .

Comme tout élément de k' est une fraction à numérateur dans B/\mathcal{P} et à dénominateur dans $A/(\mathcal{P} \cap A) - \{0\}$, ceci implique que l'extension $k \subset k'$ est normale. On a aussi montré qu'un élément de k' a au plus n conjugués distincts. Il en résulte que toute sous-extension finie de $k \subset k'$ est de degré au plus n , donc que $[k' : k] \leq n$.

(iv) Il est clair que si $g(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, l'automorphisme g induit un $A/(\mathcal{P} \cap A)$ -endomorphisme de B/\mathcal{P} , donc un k -isomorphisme de k' . On a donc définie l'application naturelle $G' \rightarrow \text{Gal}(k'/k)$. Montrons qu'elle est surjective.

Soient $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r)$ les idéaux premiers, deux à deux distincts, de B tels que $\mathcal{P}_i \cap A = \mathcal{P} \cap A$, avec $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$.

Soit $x \in \cap_2^r \mathcal{P}_i$. Si $g \notin G'$, il existe $i > 1$ tel que $g(\mathcal{P}_i) = \mathcal{P}$, donc $g(x) \in \mathcal{P}$, soit $\overline{g(x)} = 0$.

Si de plus $x \notin \mathcal{P}$, alors $\bar{x} \neq 0$ et les conjugués de \bar{x} dans k' , au dessus de k , sont non nuls. Comme ces conjugués sont parmi les éléments $\overline{g(x)}$, avec $g \in G$, on en déduit qu'ils sont parmi les éléments $\overline{g(x)}$, avec $g \in G'$.

Pour prouver que $G' \rightarrow Gal(k'/k)$ est surjectif, il suffit donc de montrer qu'il existe $x \in \cap_2^r \mathcal{P}_i$ tel que \bar{x} est un élément primitif de k' sur k .

Soit $S = A - \mathcal{P}$. Les idéaux $\mathcal{P}_i S^{-1}B$ sont maximaux et deux à deux distincts. Donc les idéaux $\mathcal{P}S^{-1}B$ et $(\cap_2^r \mathcal{P}_i)S^{-1}B$ sont comaximaux. On a $k' = S^{-1}B/\mathcal{P}S^{-1}B$.

Si $\bar{y} \in S^{-1}B/\mathcal{P}S^{-1}B$ est un élément primitif pour l'extension $k \subset k'$, il existe $x' \in (\cap_2^r \mathcal{P}_i)S^{-1}B$ tel que $\bar{y} = \overline{x'}$. Mais $x' = x/s$, avec $x \in \cap_2^r \mathcal{P}_i$, montre que \bar{x} est aussi un élément primitif pour l'extension $k \subset k'$. Le Théorème est démontré.

Chapter 13

Anneaux et modules gradués.

Exemple : Soit $V = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_d]$ l'anneau des polynômes à $d + 1$ variables sur le corps des nombres complexes. Notons V_n le \mathbf{C} -espace vectoriel des polynômes homogènes de degré n . On a évidemment :

- (i) $V = \bigoplus_{n \geq 0} V_n$
- (ii) $V_n V_m = V_{n+m}$
- (iii) $\text{rg}_{\mathbf{C}} V_n = \binom{n+d}{d} = n^d/d! + \dots + 1 = P_V(n)$

Définition 13.1 : Le polynôme P_V est le polynôme de Hilbert de V .

Remarque : Le degré de P_V est d et son coefficient dominant est $1/d!$.

13.1 Anneaux noethériens gradués. Anneaux projetants.

Définition 13.2 : Un anneau R est gradué s'il existe une décomposition de groupe abélien $R = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R_n$ telle que :

(i) R_0 est un anneau.

(ii) $R_n R_m \subset R_{n+m}$.

Les éléments de R_n sont alors les éléments homogènes de degré n de R .

Nous dirons que R est un anneau gradué projetant si

(iii) R_0 est un anneau noethérien.

(iv) R_1 est un R_0 -module de type fini et R est fini sur la sous- R_0 -algèbre de type fini $R_0[R_1]$.

Dans ce cas, si R_0 est une algèbre finie sur un corps k , donc un anneau artinien, nous dirons que R est une k -algèbre graduée projetante.

Exemple :

Soient A un anneau et \mathcal{I} un idéal de A . Posons $R_n = \mathcal{I}^n$. Le A -module $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ a naturellement une structure d'anneau gradué.

Si a (resp. b) est un élément de degré n (resp. m), on a $a \in R_n = \mathcal{I}^n$ et $b \in R_m = \mathcal{I}^m$. Alors $ab \in \mathcal{I}^{n+m} = R_{n+m}$ est de degré $n + m$.

Définition 13.3 : $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n$ est l'anneau de Rees de l'idéal \mathcal{I} de l'anneau A .

Si A est noethérien, il est clair que l'anneau de Rees d'un idéal \mathcal{I} de A est projetant. Plus précisément, on a $R = R_0[R_1]$.

Proposition 13.4 : Si l'anneau gradué R est projetant, c'est une R_0 -algèbre de type fini.

En effet, R est fini sur $R_0[R_1]$ qui est de type fini sur R_0 .

Corollaire 13.5 : Un anneau gradué projetant est noethérien.

Dans la suite de ce texte, les anneaux gradués considérés sont toujours noethériens et le plus souvent projetants. Lorsque les circonstances l'exigeront, nous souligneront qu'un énoncé est vrai plus généralement.

Proposition 13.6 : Si R est un anneau gradué projetant, alors :

- (i) R_n est un R_0 -module de type fini pour tout n .
- (ii) Il existe un entier n_0 tel que $R_n = 0$ pour $n < n_0$.
- (iii) Il existe un entier m_0 tel que $R_1 R_m = R_{m+1}$ pour $m \geq m_0$.

Démonstration :

Comme tout élément de R est somme d'éléments homogènes, R admet un système fini de générateurs homogènes, f_1, \dots, f_l , comme $R_0[R_1]$ -module. Comme R_1 est un R_0 -module de type fini et comme $R_n = \sum_i R_1^{n-d^0 f_i} f_i$, il est clair que R_n est aussi un R_0 -module de type fini. Les entiers $n_0 = \min_{1 \leq i \leq l} (d^0 f_i)$ et $m_0 = \max_{1 \leq i \leq l} (d^0 f_i)$, vérifient l'énoncé.

Exercices : En déduire les Corollaires qui suivent.

Corollaire 13.7 : Soit R un anneau gradué projetant. Si $a \in R_n$, avec $n < 0$, alors a est nilpotent.

Corollaire 13.8 : Soient R un anneau gradué projetant et $R_{\neq 0}$ l'idéal de R engendré par $\bigoplus_{n \neq 0} R_n$. Alors $R_{\neq 0} \cap R_0$ est un idéal nilpotent de R_0 .

Remarque : La notation $R_{\neq 0}$ peut paraître maladroite ici. Je n'en ai pas trouver de meilleure. Lorsque R_0 est intègre (le plus souvent), il n'y a pas d'ambiguïté.

Définition 13.9 : Un idéal \mathcal{I} d'un anneau gradué R est gradué si $\mathcal{I} = \bigoplus_n \mathcal{I} \cap R_n$. On pose $\mathcal{I}_n = \mathcal{I} \cap R_n$.

Exercices :

- (i) Montrer que le nilradical d'un anneau gradué est un idéal gradué.
- (ii) Montrer que si \mathcal{P} est un idéal premier d'un anneau gradué R , alors $\bigoplus_n \mathcal{P} \cap R_n$ est un idéal gradué premier de R .

Exemple :

L'inclusion $\mathcal{I}^{n+1} \subset \mathcal{I}^n = R_n$ induit une inclusion

$$\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^{n+1} \subset \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n = \bigoplus_{n \geq 0} R_n = R$$

qui fait de $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^{n+1}$ un idéal gradué l'anneau de Rees $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n$.

Définition 13.10 : *Le quotient*

$$\text{gr}_{\mathcal{I}}(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1}$$

de l'anneau de Rees, de l'idéal \mathcal{I} de l'anneau A , est l'anneau gradué associé à l'idéal \mathcal{I} de l'anneau A .

La Proposition suivante est évidente.

Proposition 13.11 : *Si A est noethérien, $\text{gr}_{\mathcal{I}}(A)$ est projetant.*

Définition 13.12 : *Un sous-anneau A de R est un sous-anneau gradué de R si A est gradué et si $A_n = A \cap R_n$ pour tout n .*

Exercices : Démontrer les trois résultats suivants.

Proposition 13.13 : *Un idéal est gradué si, et seulement si, il admet un système de générateurs homogènes.*

Proposition 13.14 : *Un idéal gradué d'un anneau noethérien gradué admet une décomposition primaire graduée, i.e. $\mathcal{I} = \bigcap \mathcal{Q}_i$ où \mathcal{Q}_i est \mathcal{P}_i -primaire, les idéaux \mathcal{Q}_i et \mathcal{P}_i étant gradués.*

Théorème 13.15 (*Théorèmes de relèvement gradués*) :

Si A est un sous-anneau gradué de l'anneau gradué B et si $A \subset B$ est une extension entière, on peut dans les énoncés des Théorèmes de relèvement remplacer le mot idéal premier par le mot idéal premier gradué.

Définition 13.16 : *Soit $R = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R_n$ un anneau projetant. Nous dirons qu'un idéal gradué \mathcal{I} de R est irrelevant si $\mathcal{I}_n = R_n$ pour $n \gg 0$.*

Proposition 13.17 : *Un idéal gradué d'un anneau gradué noethérien est irrelevant si et seulement si ses idéaux premiers associés sont irrelevant.*

Démonstration :

Soit $\mathcal{I} = \bigcap \mathcal{Q}_i$. Si pour tout i on a $(\mathcal{P}_i)_n = R_n$ pour $n \gg 0$, il est clair qu'on a aussi $(\mathcal{Q}_i)_n = R_n$ pour $n \gg 0$ et $\mathcal{I}_n = R_n$ pour $n \gg 0$. La réciproque est évidente.

Proposition 13.18 : *Soient R un anneau projetant et \mathcal{P} un idéal premier gradué de R . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) \mathcal{P} est irrelevant.

(ii) $R_1 \subset \mathcal{P}$.

Si de plus R_0 est artinien, elles sont équivalentes à

(iii) \mathcal{P} est maximal.

Démonstration :

Si \mathcal{P} est irrelevant on a $R_1^n \subset \mathcal{P}_n$ pour $n \gg 0$, on a $R_1 \subset \mathcal{P}$.

Réciproquement, comme $R_1 R_n = R_{n+1}$, pour $n \gg 0$, il est clair que $R_1 \subset \mathcal{P}$ implique $R_n = \mathcal{P}_n$, pour $n \gg 0$.

Si R_0 est artinien, $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P} \cap R_0$, c'est un idéal maximal de R_0 .

Si \mathcal{P} est irrelevant, l'anneau intègre R/\mathcal{P} est fini sur le corps R_0/\mathcal{P}_0 , donc c'est un corps.

Si \mathcal{P} est maximal, R/\mathcal{P} est fini sur le corps R_0/\mathcal{P}_0 d'après le Théorème des zéros. Soient (x_1, \dots, x_r) un système de générateurs homogènes du R_0/\mathcal{P}_0 -module R/\mathcal{P} . Si $n > d^0(x_i)$ pour tout i , on a $(R/\mathcal{P})_n = 0$, ce qui démontre $(R/\mathcal{P})_1 = 0$ donc $R_1 \subset \mathcal{P}$.

13.2 Modules gradués.

Définition 13.19 : Soit R un anneau gradué. Un R -module M est gradué si $M = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} M_n$, où $R_m M_n \subset M_{m+n}$, pour tout (m, n) . Les éléments de M_n sont homogènes de degré n .

Proposition 13.20 : Un R -module gradué admet un système de générateurs homogènes.

C'est évident.

Corollaire 13.21 : Soient R un anneau gradué projetant et M un R -module gradué de type fini. Alors,

- (i) M_n est un R_0 -module de type fini pour tout n .
- (ii) Il existe un entier s tel que $M_n = 0$ pour $n < s$.
- (iii) Il existe un entier s' tel que $R_1 M_n = M_{n+1}$ pour $n \geq s'$.

Démonstration du Corollaire :

Soit (x_1, \dots, x_l) un système fini de générateurs homogènes de M . Alors $M_n = \sum R_{n-d^0 x_i} \cdot x_i$ est bien un R_0 -module de type fini. Si $t = \min(d^0 x_i)$ et si $R_n = 0$ pour $n < n_0$, alors $s = t + n_0$ a la propriété (ii) annoncée. Il est aussi clair que si $R_1 R_m = R_{m+1}$ pour $m \geq m_0$, alors $s' = m_0 + \max(d^0 x_i)$ vérifie (iii).

Exemples : Soient A un anneau nothérien, \mathcal{I} un idéal de A et M un A -module de type fini. Alors

- (i) $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n M$ est naturellement un module de type fini sur l'anneau de Rees $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n$.
- (ii) $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n M / \mathcal{I}^{n+1} M$ est naturellement un module de type fini sur l'anneau $gr_{\mathcal{I}}(A)$.

Lemme 13.22 (Lemme de Nakayama gradué) : Soient R un anneau gradué projetant et $R_{\neq 0}$ l'idéal de R engendré par $\bigoplus_{n \neq 0} R_n$. Si M est un R -module gradué de type fini tel que $M = R_{\neq 0} M$, alors $M = 0$.

Démonstration :

Si $M \neq 0$, soit s l'entier tel que $M_n = 0$ pour $n < s$ et que $M_s \neq 0$. Il est clair que $M_s \cap R_{\neq 0} M = (R_{\neq 0} \cap R_0) M_s$. Comme $R_{\neq 0} \cap R_0$ est un idéal nilpotent de R_0 (Corollaire 13.8), il est contenu dans le radical de Jacobson de R_0 . Comme M_s est un R_0 -module de type fini, ceci contredit le Lemme de Nakayama.

Exercice : En déduire le Corollaire qui suit.

Corollaire 13.23 : Soit M un R -module gradué de type fini. Pour que des éléments homogènes $x_1, \dots, x_n \in M$ engendrent M , il faut et il suffit que leurs classes $cl(x_1), \dots, cl(x_n) \in M/R_{\neq 0} M$ engendrent $M/R_{\neq 0} M$.

Proposition 13.24 : Si R est un anneau gradué nothérien et M un R -module gradué de type fini, les idéaux premiers associés à M sont gradués.

Démonstration à faire.

Proposition 13.25 : Soient R un anneau gradué projetant et M un R -module gradué de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $M_n = 0$ pour $n \gg 0$.
- (ii) M est un R_0 -module de type fini.
- (iii) L'annulateur de M est un idéal irrelevant.
- (iv) Les idéaux premiers du support de M sont irrelevants.
- (v) Les idéaux premiers associés à M sont irrelevants.

Démonstration :

Il est clair que M est un R_0 -module de type fini si et seulement s'il existe des entiers s et t tels que $M = \bigoplus_s^t M_n$, donc (i) implique (ii).

Si $M = \bigoplus_s^t M_n$, on a $R_n M = 0$ pour $n > t - s$, donc (ii) implique (iii).

Un idéal premier du support de M contient l'annulateur de M , donc (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v).

Supposons (v). Si $x \in M$, les idéaux premiers associés à Rx sont associés à M , donc irrelevants et l'annulateur de x est irrelevant, i.e. $R_n x = 0$ pour $n \gg 0$. Comme M est de type fini, on a $M_n = 0$ pour $n \gg 0$ donc (i).

Définition 13.26 : Soit R un anneau gradué projetant. Un R -module gradué de type fini M tel que $M_n = 0$ pour $n \gg 0$ est irrelevant.

Proposition 13.27 : Soient R un anneau gradué projetant et M un R -module gradué de type fini. Il existe un unique sous- R -module gradué irrelevant $I(M)$ tel que $M/I(M)$ ne contient pas de sous-module irrelevant non trivial.

Démonstration : Posons $I(M) = \bigcup_{i>0} (0_M : R_i)$. Pour tout $x \in I(M)$ il existe i tel que $xR_j = 0$ pour $j \geq i$. Comme $I(M)$ est de type fini, il existe n_0 tel que $I(M)R_n = 0$ pour $n \geq n_0$. Donc $I(M)_m = 0$ pour $m \gg 0$ et $I(M)$ est irrelevant.

Si $x \in M$ est tel que $cl(x) \in M/I(M)$ est irrelevant, il existe r_0 tel que $cl(x)R_r = 0$ pour $r \geq r_0$. Mais ceci implique $xR_n = 0$ pour $n \geq r_0 + n_0$, soit $x \in I(M)$ et $cl(x) = 0$. Donc $M/I(M)$ ne contient pas de sous-module irrelevant non trivial.

ATTENTION, deux R -modules gradués peuvent être isomorphes comme R -modules sans être isomorphes comme R -modules gradués. Les définitions qui suivent illustrent clairement cette remarque.

Définition 13.28 : On note $M[t]$ le R -module gradué défini par $M[t]_n = M_{t+n}$ pour tout n .

Définition 13.29 : On dit qu'un homomorphisme $f : M \rightarrow N$ de R -module gradués est homogène de degré r , si $f(M_n) \subset N_{n+r}$ pour $n \in \mathbf{Z}$. On note $\text{Hom}_R(M, N)_r$ le R_0 -module formé par les homomorphismes de degré r .

On a évidemment $\text{Hom}_R(M, N) = \bigoplus_{r \in \mathbf{Z}} \text{Hom}_R(M, N)_r$ et $\text{Hom}_R(M, N)$ est un R -module gradué.

Définition 13.30 :

(i) Deux R -modules gradués M et N sont isomorphes s'il existe un isomorphisme homogène de degré 0 entre M et N .

(ii) On dit qu'un sous- R -module M' de M est un sous-module gradué de M si M' est un R -module gradué et si l'inclusion de M' dans M est homogène de degré 0.

(iii) On dit qu'un R -module quotient N de M est un quotient gradué de M si N est un R -module gradué et si l'application naturelle $M \rightarrow N$ est homogène de degré 0.

Proposition 13.31 : *Pour tout R -module gradué de type fini M il existe un nombre fini d'entiers r_i et un homomorphisme surjectif homogène de degré 0 :*

$$\bigoplus_i R[-r_i] \rightarrow M.$$

Démonstration :

Soient (x_1, \dots, x_s) un système de générateurs homogènes du module M et r_i le degré de x_i . Pour $i = 1, \dots, s$, considérons l'homomorphisme $f_i : R[-r_i] \rightarrow M$ défini par $f_i(1) = x_i$. Il est homogène de degré 0. La somme de ces homomorphismes est un homomorphisme surjectif homogène de degré 0.

Corollaire 13.32 : *Soit R un anneau projetant tel que R_0 est local. Tout R -module libre gradué de type fini est de la forme $\bigoplus_i R[-r_i]$.*

Démonstration :

Soit L un R -module libre gradué de type fini. Il suffit évidemment de montrer L a une base formée d'éléments homogènes.

Si \mathcal{M}_0 est l'idéal maximal de R_0 , Il est clair que $\mathcal{N} = \bigoplus_{n < 0} R_n \oplus \mathcal{M}_0 \oplus \bigoplus_{n > 0} R_n$ est un idéal maximal gradué de R . On a $R_0/\mathcal{M}_0 = R/\mathcal{N}$. Le R/\mathcal{N} -espace vectoriel de rang fini $L/\mathcal{N}L$ est gradué. Il admet évidemment une base formée d'éléments homogènes. Si $x_1, \dots, x_l \in L$ sont des éléments homogènes dont les classes dans $L/\mathcal{N}L$ forment une base, on vérifie facilement, avec le Lemme de Nakayama gradué, que (x_1, \dots, x_l) est une base de L .

13.3 Fractions homogènes.

La Proposition suivante se passe de commentaires.

Proposition 13.33 : *Soient R un anneau gradué, $a \in R$ un élément homogène et M est un R -module gradué.*

Soient $R_a^{(r)} = \{b/a^l, \quad b \in R_{r+ld^0(a)}\}$ et $M_a^{(r)} = \{x/a^l, \quad x \in M_{r+ld^0(a)}\}$.

Alors $R_a = \bigoplus_r R_a^{(r)}$ est un anneau gradué et $M_a = \bigoplus_r M_a^{(r)}$ est un R_a -module gradué.

Définition 13.34 : *Une partie multiplicativement stable S d'un anneau gradué sera dite graduée si tous ses éléments sont homogènes.*

Si M est un R -module gradué, $S^{-1}M^{(r)} = \{x/s, \quad s \in S, \quad x \in M_{r+d^0s}\}$ est le groupe commutatif des fractions homogènes de degré r de $S^{-1}M$.

Proposition 13.35 : *$S^{-1}R = \bigoplus_r S^{-1}R^{(r)}$ est un anneau gradué et $S^{-1}M = \bigoplus_r S^{-1}M^{(r)}$ est un $S^{-1}R$ -module gradué.*

C'est clair. Le résultat qui suit aussi.

Proposition 13.36 : *Une partie multiplicativement stable engendrée par des éléments homogènes est graduée.*

Théorème 13.37 : Soit R un anneau gradué. Si $a \in R_1$, alors

$$R_a = R_a^{(0)}[a, 1/a],$$

où a est algébriquement libre sur $R_a^{(0)}$.

Si M est un R -module gradué, alors

$$M_a = M_a^{(0)} \otimes_{R_a^{(0)}} R_a^{(0)}[a, 1/a].$$

Démonstration :

Une relation non triviale $b_0 a^l + b_1 a^{l-1} + \dots + b_l = 0$, avec $b_i \in R_a^{(0)}$, contredit la décomposition $R_a = \bigoplus_n R_a^{(n)}$. Donc a est algébriquement libre sur $R_a^{(0)}$.

Il est clair que $R_a^{(0)}[a, 1/a] \subset R_a$. Comme $R_a^{(n)} = a^n R_a^{(0)}$, pour tout n , l'égalité annoncée est démontrée.

Montrons enfin que l'application naturelle surjective

$$M_a^{(0)} \otimes_{R_a^{(0)}} R_a^{(0)}[a, 1/a] \rightarrow M_a$$

est injective. Sinon, il existe dans M_a une relation $a^l m_0 + a^{l-1} m_1 + \dots + m_l = 0$, avec $m_i \in M_a^{(0)}$. Mais ceci contredit la décomposition $M_a = \bigoplus_n M_a^{(n)}$.

On en déduit facilement l'énoncé suivant.

Corollaire 13.38 : Soit $\text{Spec}_{\text{grad}}(R)$ le sous-ensemble de $\text{Spec}(R)$ formé des idéaux premiers gradués de R .

(i) L'application $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \cap R_a^{(0)}$ définit une bijection entre $\text{Spec}_{\text{grad}}(R) \cap D(a)$ et $\text{Spec}(R_a^{(0)})$.

(ii) Si M est un R -module gradué de type fini, cette bijection induit une bijection entre $\text{Supp}(M) \cap \text{Spec}_{\text{grad}}(R) \cap D(a)$ et $\text{Supp}(M_a^{(0)})$.

13.4 Le Théorème des syzygies gradué.

Théorème 13.39 (Théorème des Syzygies gradués) : Soient $V = k[X_0, \dots, X_d]$ un anneau de polynômes à $d+1$ variables sur un corps k et M un V -module gradué de type fini. Si m_i et n_{ij} , avec $0 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq m_i$ sont des entiers et si

$$0 \rightarrow K \rightarrow \bigoplus_{1 \leq j \leq m_d} V[-n_{dj}] \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{1 \leq j \leq m_1} V[-n_{1j}] \rightarrow \bigoplus_{1 \leq j \leq m_0} V[-n_{0j}] \rightarrow M \rightarrow 0.$$

est une suite exacte à homomorphismes de degré 0, alors il existe des entiers m_{d+1} et n_{d+1j} , avec $1 \leq j \leq m_{d+1}$, tels que $K \simeq \bigoplus_{1 \leq j \leq m_{d+1}} V[-n_{d+1j}]$.

Démonstration :

On fait bien sûr une récurrence sur le nombre $d + 1$ de variables.

Si $d + 1 = 0$, alors V est le corps k et M un espace vectoriel de rang fini sur k . Soient (e_1, \dots, e_m) une base homogène de M et $n_i = d^0(e_i)$. L'homomorphisme $f_i : V[-n_i] \rightarrow M$, défini par $f_i(1) = e_i$, est homogène de degré 0. Il est clair que

$$\sum_{1 \leq j \leq m} f_j : \bigoplus_{1 \leq i \leq m} V[-n_i] \rightarrow M$$

est un isomorphisme de V -modules gradués.

Supposons maintenant $d + 1 > 0$.

Posons $N = \text{Ker}(\bigoplus_{1 \leq j \leq m_0} V[-n_{0j}] \rightarrow M)$. La multiplication par X_d est injective dans V , donc aussi dans N et K puisque $N \subset \bigoplus_{1 \leq j \leq m_0} V[-n_{0j}]$ et $K \subset \bigoplus_{1 \leq j \leq m_d} V[-n_{dj}]$.

Posons $V' = V/X_dV \simeq \mathbf{C}[X_0, \dots, X_{d-1}]$, et considérons le diagramme commutatif suivant, dans lequel les lignes et les colonnes sont exactes et les homomorphismes homogènes de degré 0 :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & K[-1] & \rightarrow & \bigoplus_j V[-n_{dj} - 1] & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \bigoplus_j V[-n_{1j} - 1] & \rightarrow & N[-1] & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow X_d & & \downarrow X_d & & & & \downarrow X_d & & \downarrow X_d & & \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & \bigoplus_j V[-n_{dj}] & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \bigoplus_j V[-n_{1j}] & \rightarrow & N & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & K/X_dK & \rightarrow & \bigoplus_j V'[-n_{dj}] & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \bigoplus_j V'[-n_{1j}] & \rightarrow & N/X_dN & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Une application directe du diagramme du serpent montre que la dernière ligne est une suite exacte de V' -modules gradués, à homomorphismes de degré 0. Par hypothèse de récurrence, il existe des entiers m et $l_i, 1 \leq i \leq m$, tels que $K/X_dK \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq m} V'[-l_i]$. Nous allons en déduire un isomorphisme $K \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq m} V[-l_i]$, ce qui démontrera le Théorème.

Soient z_1, \dots, z_m des éléments homogènes de K , avec $d^0(z_i) = l_i$, dont les classes dans K/X_dK forment une base de K/X_dK . Si K' est le sous-module gradué de K engendré par z_1, \dots, z_m , on a $K = K' + X_dK$. On en déduit $K = K'$ par le Lemme de Nakayama.

Enfin supposons qu'il existe une relation entre z_1, \dots, z_m et montrons qu'elle est nécessairement triviale. Soit $a_1z_1 + \dots + a_mz_m = 0$ une relation homogène non triviale de degré minimum. Comme sa classe dans K/X_dK est triviale, on a $a_i \in X_dV$ pour tout i , soit $a_i = X_db_i$ et $X_d(b_1z_1 + \dots + b_mz_m) = 0$. Mais comme X_d n'est pas diviseur de 0 dans K , on a $b_1z_1 + \dots + b_mz_m = 0$, donc $b_i = 0$ pour tout i (la relation choisie était de degré minimum) et $a_i = 0$ pour tout i .

On a montré que (z_1, \dots, z_m) est une base de K , ce qui prouve bien $K \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq m} V[-l_i]$ et le Théorème.

Corollaire 13.40 : Soient R une k -algèbre graduée projetante et M un R -module gradué de type fini. Il existe un polynôme P_M , à coefficients rationnels, tel que $\text{rg}_k(M_n) = P_M(n)$ pour $n \gg 0$.

Si k est algébriquement clos, on a $l_{R_0}(M_n) = P_M(n)$ pour $n \gg 0$.

Démonstration :

Il existe un anneau de polynômes V tel que R est une V -algèbre finie. La structure de R -module gradué de type fini de M induit évidemment sur M une structure de V -module gradué de type fini. Considérons alors une suite exacte à homomorphismes de degré 0 :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{1 \leq j \leq m_{d+1}} V[-n_{d+1j}] \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{1 \leq j \leq m_1} V[-n_{1j}] \rightarrow \bigoplus_{1 \leq j \leq m_0} V[-n_{0j}] \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Elle entraîne pour tout n l'existence d'une suite exacte de k -espaces vectoriels :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{1 \leq j \leq m_{d+1}} V_{n-n_{d+1j}} \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{1 \leq j \leq m_1} V_{n-n_{1j}} \rightarrow \bigoplus_{1 \leq j \leq m_0} V_{n-n_{0j}} \rightarrow M_n \rightarrow 0.$$

On en déduit

$$rg_k(M_n) = \sum_{i,j} (-1)^i rg_k(V_{n-n_{ij}}),$$

soit pour n assez grand

$$rg_k(M_n) = \sum_{i,j} (-1)^i P_V(n - n_{ij}),$$

ce qui démontre la première assertion du Corollaire.

Supposons que k est algébriquement clos. Comme R_0 est fini sur k , on a $k \simeq R_0/\mathcal{M}$ pour tout idéal maximal \mathcal{M} de R_0 . Donc $l_{R_0}(M_n) = rg_k(M_n)$ (Théorème 5.19).

Définition 13.41 : P_M est le polynôme de Hilbert de M .

Chapter 14

Polynômes de Hilbert.

Nous n'avons certainement pas choisi le plus court chemin pour introduire, dans le chapitre précédent, le polynôme de Hilbert d'un module gradué de type fini sur un anneau gradué projetant. Le lecteur peut s'en convaincre en consultant de nombreux livres d'algèbre commutative. De plus, le Théorème des syzygies gradué n'établit son existence que dans le cas d'une algèbre graduée projetante sur un corps. L'introduction de ce polynôme par cette méthode nous paraît pourtant la plus naturelle. Elle souligne l'interaction entre l'algèbre homologique et la géométrie algébrique.

Une autre présentation (dans le même esprit) nous semble aussi riche : Via le complexe de Koszul. Elle a de plus l'avantage sur la précédente de prouver l'existence du Polynôme de Hilbert dans la situation la plus générale. Courant le risque de nous répéter, consacrons lui les lignes nécessaires avant de nous intéresser plus en détails aux propriétés du polynôme de Hilbert.

14.1 Le Complexe de Koszul.

Soient R un anneau, L un R -module libre de rang r et $f : L \rightarrow R$ un homomorphisme. Considérons les applications

$$d_i : \Lambda^i L \rightarrow \Lambda^{i-1} L,$$

définies, pour $i = 1, \dots, r$, par

$$d_i(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_i) = \sum_l (-1)^{l-1} f(x_l) (x_1 \wedge \dots \wedge x_{l-1} \wedge x_{l+1} \wedge \dots \wedge x_i).$$

(Il faut bien sûr vérifier que ces applications existent!)

On vérifie immédiatement l'énoncé suivant :

Proposition 14.1 :

- (i) $d_1 = f$.
- (ii) d_i est une application linéaire pour tout i .
- (iii) $d_i \circ d_{i+1} = 0$ pour $1 \leq i \leq r-1$.

Définition 14.2 : *Le complexe $K.(f)$*

$$0 \rightarrow \Lambda^r L \xrightarrow{d_r} \Lambda^{r-1} L \xrightarrow{d_{r-1}} \dots \xrightarrow{d_2} \Lambda^1 L \xrightarrow{d_1} \Lambda^0 L \rightarrow 0$$

est le complexe de Koszul de f .

Les modules d'homologie $\text{Kerd}_i/\text{Im}d_{i+1}$ sont notés $H_i(K.(f))$.

Théorème 14.3 : *Si f est surjective le complexe de Koszul est une suite exacte scindée.*

Démonstration :

Soit e un élément de L tel que $f(e) = 1$. Si $F = \ker f$, alors $L = F \oplus Re$. On vérifie que $\Lambda^i L = \Lambda^i F \oplus (\Lambda^{i-1} F)\Lambda Re$ et que $\Lambda^i F = \text{Kerd}_i = \text{Im}d_{i+1}$.

Corollaire 14.4 : *Pour tout i on a $\text{Supp}(H_i(K.(f))) \subset \text{Supp}(H_0(K.(f)))$.*

Démonstration :

On a $H_0(K.(f)) = \text{coker} f$. Donc si \mathcal{P} est un idéal premier de R tel que $\mathcal{P} \notin \text{Supp}(H_0(K.(f)))$ l'application $f_{\mathcal{P}} : L_{\mathcal{P}} \rightarrow R_{\mathcal{P}}$ est surjective. Le Corollaire se déduit alors immédiatement du Théorème en utilisant le Lemme formel évident suivant :

Lemme 14.5 : *Soit S une partie multiplicativement stable de R . Si $S^{-1}f : S^{-1}L \rightarrow S^{-1}R$ est l'application localisée de f , le complexe de Koszul de $S^{-1}R$ -modules de $S^{-1}f$ est naturellement isomorphe au localisé par S du complexe de Koszul de f .*

Définition 14.6 : *Si M est un R -module, on appelle complexe de Koszul de f et M et on note $K.(f, M)$ le complexe :*

$$0 \rightarrow \Lambda^r L \otimes_R M \rightarrow \Lambda^{r-1} L \otimes_R M \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^1 L \otimes_R M \rightarrow \Lambda^0 L \otimes_R M \rightarrow 0.$$

On vérifie directement le résultat suivant :

Proposition 14.7 : *Si \mathcal{I} est un idéal de R , si $A = R/\mathcal{I}$ et si $f_A = f \otimes_R A : L \otimes_R A \rightarrow A$, il y a un isomorphisme naturel entre $K.(f, A)$ et $K.(f_A)$.*

Corollaire 14.8 : *Soit M un R -module de type fini. Alors pour tout i on a*

$$\text{Supp}(H_i(K.(f, M))) \subset \text{Supp}(H_0(K.(f, M))).$$

Démonstration :

Soient \mathcal{I} l'idéal annulateur de M et $A = R/\mathcal{I}$. On remarque d'abord que M est un A -module et que $K.(f, M)$ est naturellement isomorphe à $K.(f_A, M)$. On peut donc supposer $\text{ann}M = (0)$ et à fortiori $\text{Supp}M = \text{Spec}R$.

Comme

$$H_0(K.(f, M)) = \text{coker}(f \otimes M) = \text{coker}(f) \otimes M,$$

on a

$$\text{Supp}(H_0(K.(f, M))) = \text{Supp}(H_0(K.(f))).$$

Finalement, si \mathcal{P} est un idéal premier de A tel que $\mathcal{P} \notin \text{Supp}(H_0(K.(f)))$, on sait d'après le Théorème 14.3 que le complexe $K.(f) \otimes R_{\mathcal{P}}$ est exact et scindé. On en déduit que

$$K.(f) \otimes R_{\mathcal{P}} \otimes M_{\mathcal{P}}$$

est exact et scindé donc que $(H_i(K.(f, M)))_{\mathcal{P}} = 0$ pour tout i , ce qui démontre le Corollaire.

14.2 Polynômes de Hilbert.

Théorème 14.9 : Soient R un anneau gradué projetant et M un R -module gradué de type fini. Si E est un sous- R_0 -module de R_1 engendré par $r + 1$ éléments et tel que $EM_n = M_{n+1}$ pour $n \gg 0$, alors il existe un polynôme à coefficients rationnels P_M , de degré $\leq r$, tel que $l(M_n) = P_M(n)$ pour $n \gg 0$ (si N est un R_0 -module de type fini, $l(N)$ est sa longueur).

Démonstration :

Fixons (x_0, \dots, x_r) un système de générateurs du R_0 -module E . Considérons le R -module libre gradué $L = (r + 1)R[-1]$, une base (e_0, \dots, e_r) de L , formée d'éléments homogènes de degré 1 et l'homomorphisme $f : L \rightarrow R$ défini par $f(e_i) = x_i$. Comme f est homogène de degré 0, on vérifie facilement que les homomorphismes des Complexes de Koszul $K(f.)$ et $K(f, M)$ sont aussi homogènes de degré 0.

Remarquons d'abord que $(f \otimes M)(L \otimes M) = EM = \bigoplus_n EM_n$. Comme $EM_n = M_{n+1}$ pour $n \gg 0$, on en déduit $(H_0(K(f, M)))_n = 0$ pour $n \gg 0$. D'après la Proposition 13.25, les idéaux premiers du support de $H_0(K(f, M))$ sont irrélevants, donc les idéaux premiers du support de $H_i(K(f, M))$ aussi pour $i \geq 0$ (Corollaire 14.8).

Appliquant à nouveau la Proposition 13.25, on a montré $(H_i(K(f, M)))_n = 0$ pour $n \gg 0$ et pour $i \geq 0$. Autrement dit, il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$ le complexe de R_0 -modules suivant est exact :

$$0 \rightarrow (\Lambda^{r+1}L \otimes_R M)_n \rightarrow (\Lambda^r L \otimes_R M)_n \rightarrow \dots \rightarrow (\Lambda^1 L \otimes_R M)_n \rightarrow M_n \rightarrow 0$$

Comme la longueur est une fonction additive, ceci implique

$$\sum_{0 \leq i \leq r+1} (-1)^i l((\Lambda^i L \otimes_R M)_n) = 0 \quad \text{pour } n \geq n_0.$$

Mais $\Lambda^i L = \Lambda^i(r + 1)R[-1] \simeq (\Lambda^i(r + 1)R)[-i]$, donc $(\Lambda^i L \otimes_R M)_n = (\Lambda^i(r + 1)R) \otimes_R M_{n-i}$ et

$$l((\Lambda^i L \otimes_R M)_n) = \binom{r+1}{i} l(M_{n-i}).$$

Finalement, on a

$$\sum_{0 \leq i \leq r+1} (-1)^i \binom{r+1}{i} l(M_{n-i}) = 0.$$

Soit alors H_M la fonction de Hilbert de M , i.e. $H_M(n) = l(M_n)$ pour tout n .

Si pour toute fonction H , définie sur \mathbf{R} , on pose $\Delta H(X) = H(X) - H(X - 1)$, l'égalité précédente se lit

$$\Delta^{r+1} H_M(n) = 0 \quad \text{pour } n \geq n_0.$$

On vérifie facilement que ceci implique l'existence d'un polynôme P_M , à coefficients rationnels et de degré $\leq r$, tel que $H_M(n) = P_M(n)$ pour $n \geq n_0$. C'est le Polynôme de Hilbert de M .

14.3 Propriétés du polynôme de Hilbert.

Proposition 14.10 : Soit R un anneau gradué projetant.

(i) Si

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte de R -modules gradués de type fini, à homomorphismes de degré 0, on a

$$P_M = P_{M'} + P_{M''}.$$

(ii) Pour tout R -module gradué de type fini N , on a $d^0 P_N \leq d^0 P_R$.

Démonstration : Comme on a, pour tout n , une suite exacte de R_0 -modules de type fini

$$0 \rightarrow M'_n \rightarrow M_n \rightarrow M''_n \rightarrow 0,$$

(i) se déduit de l'additivité de la longueur.

Pour (ii), rappelons que N est un quotient d'un R -module libre gradué de la forme $\bigoplus_{i=1}^m R[-r_i]$. On en déduit $P_N(n) \leq \sum_{i=1}^m P_R(n - r_i)$, et l'assertion.

Théorème 14.11 : Soient R un anneau gradué projetant et M un R -module gradué de type fini. Si r est le degré du Polynôme de Hilbert P_M de M , alors :

(i) $r!P_M$ est un polynôme à coefficients entiers.

(ii) $P_M(0)$ est entier.

C'est une conséquence de la Proposition suivante :

Proposition 14.12 : Soit $P \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $P(n) \in \mathbf{Z}$ pour $n \gg 0$. Si $r = d^0 P$, alors

(i) $r!P$ est un polynôme à coefficients entiers.

(ii) $P(0)$ est entier.

Démonstration de la Proposition par récurrence sur $r = d^0 P$:

Si a est le coefficient dominant de P , il est clair que ra est le coefficient dominant du polynôme $\Delta P(X) = P(X) - P(X - 1)$. Comme ΔP est de degré $r - 1$, on a prouvé par récurrence que $r!a = e$ où $e \in \mathbf{Z}$. Considérons alors le polynôme $Q = P - e[X(X - 1)\dots(X - r + 1)]/r!$; il est de degré $r - 1$ et $Q(n) \in \mathbf{Z}$ pour $n \gg 0$. On en déduit (i) par récurrence et (ii) aussi car $P(0) = Q(0)$. Le Théorème est démontré.

Remarque : L'énoncé est bien sûr contenu dans la formule d'interpolation de Newton

$$P = \sum_{0 \leq i \leq d^0 P} \Delta^i P(0)[X(X - 1)\dots(X - i + 1)]/i!,$$

dont nous venons de suggérer la démonstration.

Définition 14.13 : La multiplicité de M est le nombre entier $e(M)$ tel que $e(M)/r!$ est le coefficient dominant de P_M . L'entier $P_M(0)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ de M .

Remarque : Si $e(M) = e(M[s])$ pour $s \in \mathbf{Z}$, on n'a pas en général $\chi(M) = \chi(M[s])$.

14.4 Degré du Polynôme de Hilbert.

Dans ce qui suit, nous considérerons toujours un corps infini k et R une k -algèbre graduée projetante. Si M est un R -module gradué de type fini, le polynôme de Hilbert P_M de M est alors défini par $P_M(n) = l_k(M_n)$ pour $n \gg 0$.

Remarque : Il est en effet important lorsqu'on parle de longueur de bien spécifier quel est l'anneau de base. Si R_0 est un anneau artinien fini sur k et si M est un R_0 -module de type fini, on n'a pas nécessairement $l_k(M) = l_{R_0}(M)$. Par exemple, si R_0 est un corps fini sur k , on a $l_k(R_0) = d_k^0(R_0)$ et $l_{R_0}(R_0) = 1$.

Exercice : Montrer que si R_0 est un anneau artinien fini sur un corps algébriquement clos k et si M est un R_0 -module de type fini, on a $l_k(M) = l_{R_0}(M)$. Utiliser le Théorème 5.19 et le Théorème des zéros.

Proposition 14.14 : Soient k un corps infini, R une k -algèbre graduée projetante et M un R -module gradué de type fini tel que $P_M \neq 0$. Il existe $y \in R_1$ tel que

$$P_{M/yM}(X) = \Delta P_M(X) = P_M(X) - P_M(X-1).$$

En particulier, on a

- (i) $d^0 P_M = 1 + d^0 P_{M/yM}$ et
- (ii) $e(M) = e(M/yM)$, quand $P_{M/yM} \neq 0$.

Démonstration :

Comme P_M n'est pas nul, on sait (Proposition 13.25) que M a des idéaux premiers associés relevants. Soient $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_s$ ces idéaux.

Comme $R_1 \not\subset \mathcal{P}_i$, pour $1 \leq i \leq s$, il existe $y \in R_1$ tel que $y \notin R_1 \cap \mathcal{P}_i$ pour $i = 1, \dots, s$, d'après le Lemme d'évitement pour les espaces vectoriels (sur le corps infini k).

Si K est le noyau de la multiplication par y dans M , on a une suite exacte à homomorphismes de degré 0 :

$$0 \rightarrow K[-1] \rightarrow M[-1] \xrightarrow{y} M \rightarrow M/yM \rightarrow 0.$$

Comme $K \subset M$, un idéal premier \mathcal{P} associé à K est associé à M . Mais $y \in \mathcal{P}$ car $yK = 0$, donc \mathcal{P} est irrelevant et K aussi, d'après la Proposition 13.25. Il reste pour $n \gg 0$ des suites exactes

$$0 \rightarrow M_n \xrightarrow{y} M_{n+1} \rightarrow (M/yM)_{n+1} \rightarrow 0.$$

Elles démontrent que $P_{M/yM}(X) = P_M(X) - P_M(X-1)$.

(ii) se déduit immédiatement de (i).

Théorème 14.15 : Soient k un corps infini, R une k -algèbre graduée projetante et M un R -module gradué de type fini. Le degré du polynôme de Hilbert de M est égal au plus petit entier r tel qu'il existe des éléments $x_0, \dots, x_r \in R_1$ vérifiant $(x_0, \dots, x_r)_1 M_n = M_{n+1}$ pour $n \gg 0$.

Démonstration :

On a $r \geq d^0 P_M$ d'après le Théorème précédent.

Pour démontrer l'inégalité inverse, faisons une récurrence sur $d^0 P_M$.

Si $P_M = 0$, i.e. $M_n = 0$ pour $n \gg 0$, posons $d^0 P_M = -1$ et le résultat est évident.

Si P_M n'est pas nul, remarquons que M est un module gradué de type fini sur le sous-anneau gradué $R_0[x_0, \dots, x_r]$ de R .

D'après la Proposition 14.14, il existe donc $y \in (x_0, \dots, x_r)_1$ tel que $d^0 P_M = d^0 P_{M/yM} + 1$.

Mais si $y_0, \dots, y_t \in R_1$ sont tels que $(y_0, \dots, y_t)(M/yM)_n = (M/yM)_{n+1}$ pour $n \gg 0$, on a $(y_0, \dots, y_t, y)M_n = M_{n+1}$ pour $n \gg 0$, donc $t \geq r - 1$. On en déduit par hypothèse de récurrence que $d^0 P_{M/yM} \geq r - 1$ et l'énoncé est démontré.

Corollaire 14.16 : Si $y \in R_1$, on a $d^0 P_{M/yM} \geq d^0 P_M - 1$.

C'est clair.

Définition 14.17 : Soient k un corps infini, R une k -algèbre graduée projetante et M un R -module gradué de type fini.

Si $y \in R_1$ et si $d^0 P_{M/yM} = d^0 P_M - 1$, on dit que y est un paramètre homogène de degré 1 de M .

Si $d^0 P_M = r$, si $(y_0, \dots, y_r) \subset R_1$ et si $P_{M/(y_0, \dots, y_r)M} = 0$, on dit que (y_0, \dots, y_r) est un système de paramètres homogènes de degré 1 de M .

Exemple : Considérons l'anneau de polynômes $V = k[X_0, \dots, X_r]$.

(i) Il est clair que (X_0, \dots, X_r) est un système de paramètres homogènes de degré 1 de V .

(ii) Il est tout aussi clair que

$$(0) \subset (X_0) \subset (X_0, X_1) \subset \dots \subset (X_0, \dots, X_r)$$

est une suite strictement croissante, de longueur $r + 1$, d'idéaux premiers gradués de V , donc de $\text{Supp}V$, et on sait (Théorème 9.19) qu'il n'en existe pas de plus longue.

La suite

$$(0) \subset (X_0) \subset (X_0, X_1) \subset \dots \subset (X_0, \dots, X_{r-1})$$

est une suite strictement croissante, de longueur r , d'idéaux premiers gradués relevant de $\text{Spex}(V)$.

Théorème 14.18 : Soient k un corps infini, R une k -algèbre graduée projetante et M un R -module gradué de type fini. Le degré du Polynôme de Hilbert de M est égal au plus grand entier l tel qu'il existe une suite strictement croissante d'idéaux premiers gradués relevant $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \dots \subset \mathcal{P}_l$ contenus dans le support de M .

Nous utiliserons les Lemmes suivants.

Lemme 14.19 : Si \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont deux idéaux premiers gradués distincts de R tels que $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ alors $d^0 P_{R/\mathcal{P}} > d^0 P_{R/\mathcal{Q}}$.

Démonstration du Lemme :

Soit x un élément homogène de \mathcal{Q} tel que $x \notin \mathcal{P}$. La suite exacte

$$0 \rightarrow R/\mathcal{P} \xrightarrow{x} (R/\mathcal{P})[d^0x] \rightarrow ((R/\mathcal{P})/x(R/\mathcal{P}))[d^0x] \rightarrow 0$$

montre $d^0P_{R/(\mathcal{P}+xR)} < d^0P_{R/\mathcal{P}}$. Mais l'application surjective $R/(\mathcal{P}+xR) \rightarrow R/\mathcal{Q}$ est homogène de degré 0 donc $l((R/\mathcal{Q})_n) \leq l((R/(\mathcal{P}+xR))_n)$ et on a $d^0P_{R/(\mathcal{P}+xR)} \geq d^0P_{R/\mathcal{Q}}$.

Lemme 14.20 : *Il existe une suite croissante finie de sous-modules gradués K_i de M , des idéaux premiers gradués \mathcal{P}_i du support de M et des entiers n_i tels que pour tout $i \geq 1$ on a*

$$K_i/K_{i-1} \simeq R/\mathcal{P}_i[-n_i].$$

Démonstration du Lemme :

C'est la version graduée du Théorème 5.8. La démonstration est identique si l'on veut bien se souvenir qu'un idéal premier associé à un module gradué de type fini est gradué.

Démonstration du Théorème 14.18:

Soit \mathcal{P} un idéal premier minimal du support de M . Comme $\mathcal{P} \in \text{Ass}M$, il existe $z \in M$ tel que $\mathcal{P} = \text{ann}(z)$; il induit une application injective $R/\mathcal{P} \rightarrow M[d^0z]$ homogène de degré 0. On en déduit $l((R/\mathcal{P})_n) \leq l(M_{n+d^0z})$ et $d^0P_{R/\mathcal{P}} \leq d^0P_M$.

Soit $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \dots \subset \mathcal{P}_l$ une suite strictement croissante d'idéaux premiers gradués du support de M . On sait qu'il existe un idéal premier minimal \mathcal{P} , minimal dans $\text{Supp}M$ tel que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_0$. Compte tenu du Lemme 14.19, ceci démontre bien $d^0P_M \geq l + d^0P_{R/\mathcal{P}_l}$. Mais si \mathcal{P}_l est relevant, on a $(R/\mathcal{P}_l)_n \neq 0$ pour tout n , donc $d^0P_{R/\mathcal{P}_l} \geq 0$ et $d^0P_M \geq l$.

Prouvons l'inégalité inverse.

Si $0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ est une suite exacte de modules gradués à homomorphismes de degré 0 on a évidemment $P_M = P_K + P_N$.

Compte tenu du Lemme 14.20 et de la Proposition 14.10, il existe un idéal gradué $\mathcal{P} \in \text{Supp}M$ tel que

$$d^0P_M = d^0P_{R/\mathcal{P}}.$$

Considérons la k -algèbre graduée projetante et intègre $A = R/\mathcal{P}$.

D'après le Lemme de normalisation il existe un sous-anneau de polynômes $V = k[X_0, \dots, X_r]$ de $R_0/\mathcal{P}_0[A_1]$, à variables de degré 1, sur lequel $R_0/\mathcal{P}_0[A_1]$ est fini, donc A aussi.

D'après le Théorème de relèvement gradué, il existe une suite croissante d'idéaux premiers gradués \mathcal{P}_i de A telles que $\mathcal{P}_{i+1} \cap V = (X_0, \dots, X_i)$ et $\mathcal{P}_0 \cap V = (0)$. Comme un idéal premier irrelevant est maximal, les idéaux \mathcal{P}_i sont relevants pour $i \leq r$. Mais comme A est un V -module gradué de type fini, on a $d^0P_A \leq d^0P_V$ (Proposition 14.10). Finalement, $d^0P_V = r$ démontre le Théorème.

14.5 Exemples et exercices.

(i) Si $F \in \mathbf{C}[X_0, X_1]$ est un polynôme homogène de degré f , le polynôme de Hilbert du quotient $\mathbf{C}[X_0, X_1]/(F)$ est $P(n) = f$.

(ii) Si $F \in \mathbf{C}[X_0, X_1, X_2]$ est un polynôme homogène de degré f , le polynôme de Hilbert de $\mathbf{C}[X_0, X_1, X_2]/(F)$ est $P(n) = nf + 1 - (f-1)(f-2)/2$.

(iii) Si F et G sont deux polynômes homogènes sans facteur commun de $R = \mathbf{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ de degrés respectifs f et g , le polynôme de Hilbert de $\mathbf{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]/(F, G)$ est $P(n) = nfg - fg(f+g-4)/2$. Cela se déduit de la suite exacte suivante, dont les homomorphismes sont de degrés 0 :

$$0 \rightarrow R[-f-g] \begin{pmatrix} -G \\ F \end{pmatrix} \rightarrow R[-f] \oplus R[-g] \xrightarrow{(F,G)} R \rightarrow R/(F, G) \rightarrow 0.$$

(iv) Soit r un entier positif. Le polynôme de Hilbert de l'anneau gradué

$$R = \bigoplus_n \mathbf{C}[X_0, X_1]_{rn}$$

est $P(n) = rn + 1$.

(v) Soit R un anneau gradué projetant. Soit

$$f : \bigoplus_{1 \leq i \leq r} R[-n_i] \rightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq r} R[-d_i]$$

un homomorphisme homogène de degré 0. On suppose que f est injectif (c'est à dire que son déterminant n'est pas diviseur de zéro).

Calculer en fonction des entiers n_i et d_j le polynôme de Hilbert du module gradué $\text{Coker}(f)$.

Calculer ensuite le polynôme de Hilbert du conoyau de

$$\det(f) : R[-\sum_i n_i] \rightarrow R[-\sum_j d_j].$$

Comparer les coefficients dominants de ces deux polynômes.

Montrer que si $\dim(R) = 1$, on a $l(\text{Coker}(f)) = l(\text{Coker}(\det(f)))$.

Chapter 15

Dimension

15.1 Dimension et polynôme de Hilbert.

Définition 15.1 : Soient A un anneau nothérien, \mathcal{J} un idéal de A et M un A -module de type fini.

(i) Une suite décroissante de sous-modules

$$M = M_{n_0} \supseteq M_{n_0+1} \supseteq \dots$$

de M est une filtration \mathcal{J} -stable si $\mathcal{J}M_n \subset M_{n+1}$ pour tout n et si $\mathcal{J}M_n = M_{n+1}$ pour $n \gg 0$.

(ii) Si A est local, l'idéal \mathcal{J} est un idéal de définition pour M si $M/\mathcal{J}M$ est un module de longueur finie.

Théorème 15.2 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local et M un A -module de type fini. Soient $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}$ un idéal de définition de M et (M_n) une filtration \mathcal{J} -stable de M .

(i) Il existe un polynôme $P \in \mathbf{Q}[T]$ tel que $P(n) = l(M/M_{n+1})$ pour $n \gg 0$.

(ii) Si \mathcal{J} est engendré par r éléments, on a $r \geq d^0 P$.

(iii) Le degré de P ne dépend que de M .

(iv) Le coefficient dominant de P ne dépend que de M et de \mathcal{J} (et pas de la filtration \mathcal{J} -stable).

Démonstration :

Remarquons d'abord que M est évidemment un $(A/\text{ann}M)$ -module et que la filtration (M_n) est stable pour l'idéal $(\mathcal{J} + \text{ann}M)/\text{ann}M$ de $(A/\text{ann}M)$. De plus le nombre minimal de générateurs de cet idéal est inférieur à celui de \mathcal{J} . On peut donc supposer $\text{ann}M = 0$, soit $\text{Supp}(M) = \text{Spec}A$. Mais dans ce cas $\text{Supp}(M/\mathcal{J}M) = \text{Spec}(A/\mathcal{J})$ et finalement, A/\mathcal{J} est un anneau artinien.

Remarquons alors que $\bigoplus_{n \geq n_0} (M_n/M_{n+1})$ est naturellement un module de type fini sur l'anneau gradué projetant

$$\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{J}^n / \mathcal{J}^{n+1} = \text{gr}_{\mathcal{J}}(A).$$

La structure de module est évidemment induite par $\mathcal{J}M_n \subset M_{n+1}$. D'autre part il existe m_0 tel que $\mathcal{J}M_n = M_{n+1}$ pour $n \geq m_0$ donc $\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} (M_n/M_{n+1})$ est engendré par ses éléments de degré $\leq m_0$. Comme M_n/M_{n+1} est un A/\mathcal{J} -module de type fini pour tout n , il est clair que $\bigoplus_{n \geq n_0} (M_n/M_{n+1})$ est un $\text{gr}_{\mathcal{J}}(A)$ -module de type fini.

Si \mathcal{J} est engendré par r éléments, le A/\mathcal{J} -module $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ est engendré par r éléments. D'après le Théorème 14.9, il existe un polynôme $Q \in \mathbf{Q}[T]$ de degré $\leq r - 1$ tel que $l(M_n/M_{n+1}) = Q(n)$ pour $n \gg 0$. On en déduit immédiatement l'existence de P vérifiant (i) et (ii).

Pour démontrer (iii), utilisons d'une part qu'il existe un entier s tel que $\mathcal{M}^s \subset \mathcal{J}$ et d'autre part qu'il existe un entier m_0 tel que $\mathcal{J}M_n = M_{n+1}$, pour $n \geq m_0$. Il en résulte qu'on a

$$l(M/\mathcal{M}^{s(n+m_0+1)}M) \geq l(M/M_{n+m_0+1}) \geq l(M/\mathcal{J}^{n+1}M) \geq l(M/\mathcal{M}^{n+1}M).$$

Appliquant (i) à la filtration \mathcal{M} -stable $(\mathcal{M}^n M)_{n \geq 0}$, on sait qu'il existe un polynôme $P_{\mathcal{M},M}$ tel que

$$P_{\mathcal{M},M}(n) = l(M/\mathcal{M}^{n+1}M) \quad \text{pour } n \gg 0.$$

On en déduit

$$P_{\mathcal{M},M}(s(n+m_0+1)-1) \geq P(n+m_0) \geq P_{\mathcal{M},M}(n).$$

Ceci montre bien que $P_{\mathcal{M},M}$ et P ont même degré, donc (iii).

Enfin, de manière similaire, les inclusions

$$\mathcal{J}^{n+m_0+1}M \subset M_{n+m_0+1} \subset \mathcal{J}^{n+1}M$$

montrent

$$l(M/\mathcal{J}^{n+m_0+1}M) \geq l(M/M_{n+m_0+1}) \geq l(M/\mathcal{J}^{n+1}M),$$

donc que les polynômes associés aux deux filtrations \mathcal{J} -stables $(\mathcal{J}^n M)$ et (M_n) ont même coefficient dominant, soit (iv).

ATTENTION : Si $P(n) = l(M/M_{n+1})$, on a $\Delta P(n) = l(M_n/M_{n+1})$. Cette remarque est évidente. Mais dans l'étude locale on utilise le polynôme P et dans l'étude graduée on utilise le polynôme ΔP . On a bien $d^0(\Delta P) = d^0 P - 1$. Il semble que ce soit souvent une source de confusion.

Lemme 15.3 (Artin-Rees) : Soient M un A -module de type fini, \mathcal{J} un idéal de A et (M_n) une filtration \mathcal{J} -stable de M . Si N est un sous-module de M , alors la filtration $(N_n) = (M_n \cap N)$ de N est \mathcal{J} -stable.

Démonstration :

$\bigoplus M_n$ est naturellement un module sur l'anneau de Rees $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{J}^n$ qui est noethérien. Comme la filtration (M_n) est \mathcal{J} -stable, on vérifie facilement que ce module est de type fini. Mais $\bigoplus N_n$ en est aussi naturellement un sous- $(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{J}^n)$ -module, donc de type fini. Il existe donc m_0 tel que $\mathcal{J}N_n = N_{n+1}$ pour $n \geq m_0$ (l'inclusion $\mathcal{J}N_n \subset N_{n+1}$ est évidente).

Corollaire 15.4 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien et M un A -module de type fini. Si $a \in \mathcal{M}$ est un élément régulier dans M , alors

$$d^0(P_M) > d^0(P_{M/aM}).$$

Démonstration : Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow aM \rightarrow M \rightarrow M/aM \rightarrow 0.$$

Elle induit des suites exactes

$$0 \rightarrow aM/aM \cap \mathcal{J}^n M \rightarrow M/\mathcal{J}^n M \rightarrow M/(aM + \mathcal{J}^n M) \rightarrow 0.$$

D'après le Lemme d'Artin-Rees, la filtration $aM \cap \mathcal{J}^n M$ de aM est \mathcal{J} -stable. Comme aM et M sont évidemment isomorphes, il en résulte que les polynômes de Hilbert de aM pour la filtration $aM \cap \mathcal{J}^n M$ et de M pour la filtration $\mathcal{J}^n M$ ont même degré et même coefficient dominant.

En conséquence le degré du polynôme de Hilbert de M/aM pour la filtration $(\mathcal{J}^n(M/aM))$ est de degré strictement inférieur à $d^0(P_M)$.

Corollaire 15.5 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien, \mathcal{P} et \mathcal{Q} deux idéaux premiers distincts de A tels que $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ et \mathcal{J} un idéal de définition pour A/\mathcal{P} (donc pour A/\mathcal{Q} aussi).

Si $P_{A/\mathcal{P}}$ (resp. $P_{A/\mathcal{Q}}$) est le polynôme associé à la filtration $\mathcal{J}^n(A/\mathcal{P})$ (resp. $\mathcal{J}^n(A/\mathcal{Q})$) du A -module A/\mathcal{P} (resp. A/\mathcal{Q}), on a

$$d^0(P_{A/\mathcal{P}}) > d^0(P_{A/\mathcal{Q}}).$$

Démonstration :

Soit x un élément de \mathcal{Q} qui n'est pas dans \mathcal{P} . D'après le Corollaire précédent, on a $d^0(P_{A/\mathcal{P}}) > d^0(P_{A/(x\mathcal{P})})$.

Comme la surjection naturelle $A/(\mathcal{P} + xA) \rightarrow A/\mathcal{Q}$ induit, pour tout n , une surjection

$$(A/(\mathcal{P} + xA))/\mathcal{J}^n(A/(\mathcal{P} + xA)) \rightarrow (A/\mathcal{Q})/\mathcal{J}^n(A/\mathcal{Q}).$$

Le Corollaire s'en déduit immédiatement.

Corollaire 15.6 (Théorème de Krull) : Si (A, \mathcal{M}) est un anneau local noethérien et M un A -module de type fini, alors

$$\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{M}^n M = (0)$$

Soit $E = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{M}^n M$. La filtration $E_n = E \cap \mathcal{M}^n M$ est \mathcal{M} -stable (Artin-Rees), donc $\mathcal{M}E_n = E_{n+1}$ pour $n \gg 0$. Comme on a évidemment $E \cap \mathcal{M}^n M = E$ pour tout n , il reste $\mathcal{M}E = E$, soit $E = (0)$ d'après le Lemme de Nakayama.

Théorème 15.7 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien et M un A -module de type fini et \mathcal{J} un idéal de définition pour M . Les nombres suivant sont égaux :

(i) $d_1(M)$: Le plus petit entier n tel qu'il des éléments non nuls $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{M}$ engendrant un idéal de définition pour M .

(ii) $d_2(M)$: Le degré du polynôme $P \in \mathbf{Q}[T]$ tel que $P(n) = l(M/\mathcal{J}^{n+1})$.

(iii) $d_3(M)$: le plus grand entier n tel qu'il existe, dans le support de M , une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers : $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \dots \subset \mathcal{P}_n$.

Démonstration du Théorème :

On a $d_1(M) \geq d_2(M)$ d'après le Théorème 15.2 (ii).

L'inégalité $d_2(M) \geq d_3(M)$ se déduit du Corollaire 15.5.

En effet, si \mathcal{P}_0 est un idéal premier minimal du support de M on sait que $\mathcal{P}_0 \in \text{Ass}M$, donc \mathcal{P}_0 est l'annulateur d'un élément z de M et il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow A/\mathcal{P}_0 \rightarrow M \rightarrow M/Az \rightarrow 0.$$

Posons $F_n = \mathcal{J}^n M \cap (A/\mathcal{P}_0)$. La filtration (F_n) de A/\mathcal{P}_0 est \mathcal{J} -stable (Artin-Rees). Il est clair que \mathcal{J} est un idéal de définition pour A/\mathcal{P}_0 .

Si P_{A/\mathcal{P}_0} est le polynôme de Hilbert de A/\mathcal{P}_0 pour la filtration (F_n) , les suites exactes

$$0 \rightarrow (A/\mathcal{P}_0)/F_{n+1} \rightarrow M/\mathcal{J}^{n+1}M \rightarrow M/(\mathcal{J}^{n+1}M + Az) \rightarrow 0$$

montrent $l((A/\mathcal{P}_0)/F_{n+1}) \leq l(M/\mathcal{J}^{n+1}M)$,

donc $P(n) \geq P_{A/\mathcal{P}_0}(n)$ pour $n \gg 0$. Ceci implique $d^0 P \geq d^0 P_{A/\mathcal{P}_0}$ et on conclut immédiatement avec le Corollaire 15.5.

Remarquons que nous avons prouvé que $d_3(M)$ est fini.

Il nous reste à démontrer $d_3(M) \geq d_1(M)$.

On fait une récurrence sur $d_3(M)$

Si $d_3(M) = 0$ alors $\text{Supp}(M) = \{\mathcal{M}\}$ et $l(M)$ est fini, donc $d_1(M) = 0$.

Si $\mathcal{P} \in \text{Supp}M$ est tel que $d_3(A/\mathcal{P}) = d_3(M)$, il est clair que \mathcal{P} est un idéal premier minimal de $\text{Supp}M$. Les idéaux premiers $\mathcal{P} \in \text{Supp}M$ tels que $d_3(M) = d_3(A/\mathcal{P})$ sont donc en nombre fini.

Si $d_3(M) \geq 1$, soit $\mathcal{Q} \in \text{Supp}(M)$ tel que $d_3(A/\mathcal{Q}) = d_3(M) - 1$. D'après le Lemme d'évitement, il existe $a \in \mathcal{Q}$ tel que $a \notin \mathcal{P}$ pour tout $\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)$ tel que $d_3(A/\mathcal{P}) = d_3(M)$. On a alors

$$d_3(M) = d_3(M/aM) + 1 \geq d_1(M/aM) + 1,$$

par hypothèse de récurrence. Mais par définition de d_1 implique évidemment

$$d_1(M/aM) + 1 \geq d_1(M),$$

et le Théorème est démontré.

Définition 15.8 : On appelle dimension de M et on note $\dim M$ le nombre

$$d_1(M) = d_2(M) = d_3(M).$$

Exemple détaillé:

Considérons l'anneau local $R = \mathbf{C}[X_1, X_2, \dots, X_l]_{(X_1, \dots, X_l)}$. Notons \mathcal{M} son idéal maximal. l .

(i) Comme $R/(X_1, \dots, X_l) = \mathbf{C}$, on a évidemment $d_1(R) \leq l$.

(ii) Il y a un isomorphisme évident de R -modules entre le \mathbf{C} -espace vectoriel des polynômes homogènes de degré r et $\mathcal{M}^r/\mathcal{M}^{r+1}$. On en déduit $l(\mathcal{M}^r/\mathcal{M}^{r+1}) = \binom{r+l-1}{l-1}$ et $l(R/\mathcal{M}^{r+1}) =$

$\binom{r+l}{l}$, donc $d_2(R) = l$.

(iii) On a $d_3(R) = l$ d'après le Théorème 9.19.

Proposition 15.9 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien, M un A -module de type fini et N un sous- A -module de M . Alors

$$\dim M = \max(\dim N, \dim(M/N)).$$

On utilise par exemple $\dim(\cdot) = d_3(\cdot)$.

Proposition 15.10 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien, M un A -module de type fini et $\mathcal{P} \in \text{Supp} M$. Alors

$$\dim M \geq \dim(A/\mathcal{P}) + \dim(M_{\mathcal{P}}).$$

On utilise à nouveau $\dim(\cdot) = d_3(\cdot)$.

Définition 15.11 : Soient A un anneau local noethérien et M un A -module de type fini.

On dit que M est équidimensionnel si pour tout idéal premier minimal \mathcal{P} du support de M on a $\dim A/\mathcal{P} = \dim M$.

Définition 15.12 : Soit A un anneau local noethérien. On dit que A est caténaire si pour tout couple d'idéaux premiers $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$, on a

$$\dim(A/\mathcal{Q}) + \dim(A_{\mathcal{Q}}/\mathcal{P}A_{\mathcal{Q}}) = \dim(A/\mathcal{P}).$$

Malheureusement, il existe des anneaux locaux noethériens qui ne sont pas caténaux. Heureusement ils ne nous intéressent pas car nous avons vu (Théorème 9.19) que tous les anneaux locaux de la géométrie algébrique sont caténaux.

Définition 15.13 : Soient A un anneau noethérien et M un A -module de type fini. On dit que M est de dimension d si

- (i) $\dim(M_{\mathcal{M}}) \leq d$ pour tout idéal maximal \mathcal{M} de A ,
- (ii) Il existe un idéal maximal \mathcal{M} de A tel que $\dim(M_{\mathcal{M}}) = d$.

15.2 Système de paramètres.

Soulignons la conséquence évidente suivante du Théorème 15.7

Proposition 15.14 : Soient A un anneau noethérien et M un A -module de type fini. Si $a_1, \dots, a_r \in A$, on a

$$\dim(M/(a_1, \dots, a_r)M) \geq \dim(M) - r.$$

On adopte bien entendu la convention $\dim(0) = n \quad \forall n$.

Définition 15.15 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local et M un A -module de type fini de dimension d . Si $x_1, \dots, x_d \in \mathcal{M}$ vérifient $l(M/(x_1, \dots, x_d)M) < \infty$, autrement dit $\dim(M/(x_1, \dots, x_d)M) = 0$, on dit que (x_1, \dots, x_d) est un système de paramètres de M .

Une permutation d'un système de paraparamètres de M est un système de paramètres de M . On a évidemment :

Proposition 15.16 : Un élément x_1 de \mathcal{M} fait partie d'un système de paramètres de M (est un paramètre de M) si et seulement si $\dim(M/x_1M) = \dim M - 1$, c'est à dire si et seulement si pour tout idéal premier \mathcal{P} , du support de M , tel que $\dim(A/\mathcal{P}) = \dim M$, on a $x_1 \notin \mathcal{P}$.

Proposition 15.17 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local, \mathcal{I} un idéal de A et M un A -module de type fini de dimension d . Si $\dim(M/\mathcal{I}M) = d - r$, il existe $x_1, \dots, x_r \in \mathcal{I}$ tels que $\dim(M/(x_1, \dots, x_r)M) = d - r$ (autrement dit tels que (x_1, \dots, x_r) se prolonge en un système de paramètres de M).

Démonstration par récurrence sur r :

Si $r = 0$, c'est évident. Si $r > 0$, on a $\mathcal{I} \not\subseteq \mathcal{P}$ pour tout idéal \mathcal{P} , du support de M , tel que $\dim(A/\mathcal{P}) = \dim M$, on a $x_1 \notin \mathcal{P}$. Il existe donc (Lemme d'évitement) $x_1 \in \mathcal{I}$ tel que $x_1 \notin \mathcal{P}$ pour tout idéal \mathcal{P} , du support de M , tel que $\dim(A/\mathcal{P}) = \dim M$.

On a $\dim(M/x_1M) = d - 1$ et $(M/x_1M)/\mathcal{I}(M/x_1M) = M/\mathcal{I}M$. On conclut par récurrence.

Théorème 15.18 : Soient A et B deux anneaux locaux noethériens d'idéaux maximaux \mathcal{M} et \mathcal{N} et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme local (i.e. tel que $f(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{N}$), alors

$$\dim B \leq \dim A + \dim(B/f(\mathcal{M})B).$$

Démonstration :

Si (x_1, \dots, x_d) est un système de paramètres de A et si y_1, \dots, y_l sont des éléments de B dont les classes dans $B/f(\mathcal{M})B$ forment un système de paramètres de $B/f(\mathcal{M})B$, il est clair que l'idéal $(f(x_1), \dots, f(x_d), y_1, \dots, y_l)$ est un idéal de définition de B .

Définition 15.19 : Si \mathcal{J} est un idéal d'un anneau noethérien A , on appelle hauteur de \mathcal{J} le nombre $ht(\mathcal{J}) = \min_{\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}}(\dim A_{\mathcal{P}})$

Remarque : Si \mathcal{P} est un idéal premier d'un anneau local noethérien, on a évidemment $ht(\mathcal{P}) + \dim(A/\mathcal{P}) \leq \dim(A)$.

On a comme conséquence immédiate du Théorème 15.7 :

Proposition 15.20 : La hauteur d'un idéal engendré par r éléments est $\leq r$.

15.3 Multiplicité d'un module pour un idéal de définition.

Compte tenu de la Proposition 14.11, on peut donner la définition suivante :

Définition 15.21 : Soient A un anneau local, M un A -module de dimension d et \mathcal{J} un idéal de définition de M . L'entier $e_d(\mathcal{J}, M)$ tel que le coefficient dominant du polynôme $P_{\mathcal{J}, M}$ associé à la filtration $(\mathcal{J}^n M)$ de M est de la forme $e_d(\mathcal{J}, M)/d!$ est appelé multiplicité de M pour \mathcal{J} .

Si (M_n) est une filtration \mathcal{J} -stable de M , et si P' est le polynôme tel que $P'(n) = l(M/M_{n+1})$, nous savons (Théorème 15.2 (iv)) que le coefficient dominant de P' est aussi $e_d(\mathcal{J}, M)/d!$.

Théorème 15.22 : Soient A un anneau local et \mathcal{J} un idéal de A .

Si $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de A -modules de dimension $\leq d$ admettant \mathcal{J} pour idéal de définition, on a

$$e_d(\mathcal{J}, N) = e_d(\mathcal{J}, N') + e_d(\mathcal{J}, N'')$$

où on a posé $e_d(\mathcal{J}, M) = 0$ si $\dim(M) < d$.

Démonstration :

Les suites exactes

$$0 \rightarrow N'/\mathcal{J}^n N \cap N' \rightarrow N/\mathcal{J}^n N \rightarrow N''/\mathcal{J}^n N'' \rightarrow 0$$

montrent le Théorème, compte tenu du Théorème 15.2 (iv) et du Lemme d'Artin-Rees.

Corollaire 15.23 : Soient A un anneau local, M un A -module de dimension $\leq d$ et \mathcal{J} un idéal de définition de M . Alors

$$e_d(\mathcal{J}, M) = \sum_{(\mathcal{P} \in \text{supp}(M), \dim A/\mathcal{P} = d)} l(M_{\mathcal{P}}) e_d(\mathcal{J}, A/\mathcal{P}).$$

Démonstration :

Rappelons d'abord que les idéaux premiers $\mathcal{P} \in \text{supp}(M)$ tels que $\dim A/\mathcal{P} = d$ sont nécessairement minimaux (de $\text{supp}(M)$), donc en nombre fini.

On fait alors une récurrence sur $\sum_{(\mathcal{P} \in \text{supp}(M), \dim A/\mathcal{P} = d)} l(M_{\mathcal{P}})$, le résultat étant évident si cette somme est nulle, car dans ce cas on a $\dim(M) < d$.

Supposons $\sum_{(\mathcal{P} \in \text{supp}(M), \dim A/\mathcal{P} = d)} l(M_{\mathcal{P}}) \geq 1$. Soit $\mathcal{P} \in \text{supp}(M)$ un idéal premier tel que $\dim(A/\mathcal{P}) = d$. Comme \mathcal{P} est un idéal premier minimal de M , on a $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M)$.

Si x est un élément de M tel que $\text{ann}(x) = \mathcal{P}$, posons $N = M/Ax$. Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow A/\mathcal{P} \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0.$$

Elle montre (Théorème 15.22)

$$e_d(\mathcal{J}, M) = e_d(\mathcal{J}, A/\mathcal{P}) + e_d(\mathcal{J}, N).$$

Soit $\mathcal{Q} \in \text{supp}(M)$ est un idéal premier tel que $\dim(A/\mathcal{Q}) = d$. La suite exacte

$$0 \rightarrow (A/\mathcal{P})_{\mathcal{Q}} \rightarrow M_{\mathcal{Q}} \rightarrow N_{\mathcal{Q}} \rightarrow 0$$

montre

$$l(M_{\mathcal{Q}}) = l((A/\mathcal{P})_{\mathcal{Q}}) + l(N_{\mathcal{Q}}),$$

donc

$$\sum_{\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}, \dim A/\mathcal{Q}=d} l(M_{\mathcal{Q}}) = \sum_{\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}, \dim A/\mathcal{Q}=d} l(N_{\mathcal{Q}}),$$

et

$$l(M_{\mathcal{P}}) = 1 + l(N_{\mathcal{P}}).$$

On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à N .

15.4 Dimension des anneaux géométriques.

Théorème 15.24 : Soient k un corps infini et $R = k[x_1, \dots, x_n]$ une k -algèbre de type fini. Si $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ sont deux idéaux premiers de R . Alors

$$\dim((R/\mathcal{Q})_{\mathcal{P}}) + d^0 \text{tr}_k(k[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{P}) = d^0 \text{tr}_k(k[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{Q}) \leq n.$$

C'est évidemment le Théorème 9.19.

Remarque : En fait, selon le Théorème 9.19, TOUTE suite non prolongeable et strictement croissante d'idéaux premiers de $R_{\mathcal{P}}$ est de longueur $\dim(R_{\mathcal{P}})$. Cette propriété importante des anneaux géométriques n'est malheureusement pas partagée par tous les anneaux locaux noethériens intègres.

Corollaire 15.25 : Soient k un corps infini et R une k -algèbre de type fini. Les entiers qui suivent sont égaux :

- (i) $\max(d^0 \text{tr}_k(k[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{P}))$, pour \mathcal{P} idéal premier de R .
- (ii) $\max(\dim(R_{\mathcal{P}}))$, pour \mathcal{P} idéal premier de R .
- (iii) $\max(\dim(R_{\mathcal{M}}))$, pour \mathcal{M} idéal maximal de R (la dimension de R).
- (iv) $\max(\dim(R_{\mathcal{P}}) + d^0 \text{tr}_k(k[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{P}))$, pour \mathcal{P} idéal premier de R .

C'est une conséquence immédiate du Théorème 15.24.

Théorème 15.26 : Soient k un corps infini et $R = k[x_1, \dots, x_n]$ une k -algèbre de type fini.

(i) La fonction

$$\mathcal{P} \rightarrow \dim(R_{\mathcal{P}}) + d^0 \text{tr}_k(R/\mathcal{P}),$$

définie sur $\text{Spec}R$, est bornée par n et semi-continue supérieurement.

(ii) Si $z_1, \dots, z_r \in R$ sont algébriquement libres sur k et tels que R est entier sur $V = k[z_1, \dots, z_r]$,

$$\dim(R_{\mathcal{P}}) + d^0 \text{tr}_k(R/\mathcal{P}) \leq r.$$

pour tout idéal premier \mathcal{P} de R .

(iii) Si F_i est le fermé de $\text{Spec}R$ tel que pour tout idéal premier \mathcal{P} on a

$$\dim(R_{\mathcal{P}}) + d^0 \text{tr}_k(R/\mathcal{P}) \geq i \iff \mathcal{P} \in F_i,$$

alors

(a) F_r est non vide.

(b) Il existe, pour tout $i \leq r$, un ouvert $U_i \subset \text{Spec}R$ tel que $U \subset F_i$ et U_i est dense dans F_i .

Démonstration :

Soit \mathcal{P} un idéal premier de R . Si \mathcal{Q}_m , avec $m = 1, \dots, t$, sont les idéaux premiers minimaux de R contenus dans \mathcal{P} , on a $\dim(R_{\mathcal{P}}) = \max_{m=1}^s \dim(R/\mathcal{Q}_m)_{\mathcal{P}}$, donc

$$\dim(R_{\mathcal{P}}) + d^0 \text{tr}_k(R/\mathcal{P}) = \max_{m=1}^s d^0 \text{tr}_k(R/\mathcal{Q}_m) \leq n.$$

Soient alors \mathcal{N}_j , avec $j = 1, \dots, l$ les idéaux premiers minimaux de R tels que $d^0 \text{tr}_k(R/\mathcal{N}_j) \geq i$ et F_i le fermé de $\text{Spec}R$ défini par l'idéal $\cap_1^l \mathcal{N}_j$. Il est clair que

$$\dim(R_{\mathcal{P}}) + d^0 \text{tr}_k(R/\mathcal{P}) \geq i \iff \mathcal{P} \in F_i,$$

ce qui démontre (i).

Si

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \dots \subset \mathcal{P}_l$$

est une suite strictement croissante d'idéaux premiers de R ,

$$\mathcal{P}_0 \cap V \subset \mathcal{P}_1 \cap V \subset \dots \subset \mathcal{P}_l \cap V$$

est une suite strictement croissante d'idéaux premiers de V , donc $l \leq r$, ce qui démontre (ii).

Si \mathcal{P} est un idéal premier minimal de R tel que $\mathcal{P} \cap V = (0)$, on a $d^0 \text{tr}_k(R/\mathcal{P}) = r$, donc F_r est non vide.

Soient enfin \mathcal{N}'_j , avec $j = 1, \dots, s$, les idéaux premiers minimaux de R tels que $d^0 \text{tr}_k(R/\mathcal{N}'_j) < i$. Il existe $f \in \cap_1^s \mathcal{N}'_j$ tel que $f \notin \mathcal{N}_j$ pour $j = 1, \dots, l$ (Lemme d'évitement). Montrons que l'ouvert complémentaire du fermé défini par l'idéal fR est contenu dans F_i et que cet ouvert est dense dans F .

Soit \mathcal{P} un idéal premier tel que $f \notin \mathcal{P}$. Ceci implique $\mathcal{Q}'_i \not\subset \mathcal{P}$ pour $i = 1, \dots, s$. Mais comme \mathcal{P} contient nécessairement un idéal premier minimal de R , on a $\mathcal{P} \in F_i$.

Enfin cet ouvert est dense dans F_i car il contient tous les idéaux premiers minimaux du fermé F_i (si celui-ci est non vide).

Lemme 15.27 : Soient A un anneau, B une A -algèbre de type fini et x_1, \dots, x_r des éléments de B tels que B est entier sur $A[x_1, \dots, x_r]$. Alors pour tout idéal premier \mathcal{P} de B , on a

$$\dim((B/(\mathcal{P} \cap A)B)_{\mathcal{P}}) + d^0 \text{tr}_{A/(\mathcal{P} \cap A)}(B/\mathcal{P}) \leq r.$$

Démonstration : Soit $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap A[x_1, \dots, x_r]$. On a évidemment

$$\dim((B/(\mathcal{P} \cap A)B)_{\mathcal{P}}) \leq \dim((A[x_1, \dots, x_r]/(\mathcal{Q} \cap A)A[x_1, \dots, x_r])_{\mathcal{Q}})$$

et

$$d^0 \text{tr}_{A/(\mathcal{P} \cap A)}(B/\mathcal{P}) = d^0 \text{tr}_{A/(\mathcal{P} \cap A)}(A[x_1, \dots, x_r]/\mathcal{Q}).$$

Comme $A[x_1, \dots, x_r]$ est quotient de l'anneau de polynômes $A[X_1, \dots, X_r]$, il reste à remarquer que pour tout idéal premier \mathcal{N} de $A[X_1, \dots, X_r]$, on a

$$\dim((A[X_1, \dots, X_r]/(\mathcal{N} \cap A)A[X_1, \dots, X_r])_{\mathcal{N}}) + d^0 \text{tr}_{A/(\mathcal{N} \cap A)}(A[X_1, \dots, X_r]/\mathcal{N}) = r.$$

Théorème 15.28 (*Le Théorème de semi-continuité*) :

Soit A un anneau tel que pour tout idéal premier \mathcal{P} le corps $A_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$ est infini.

Soit B une A -algèbre de type fini. La fonction

$$\mathcal{P} \rightarrow \dim((B/(\mathcal{P} \cap A)B)_{\mathcal{P}}) + d^0 \text{tr}_{A/(\mathcal{P} \cap A)}(B/\mathcal{P})$$

définie sur $\text{Spec} B$, est semi-continue supérieurement.

Démonstration : Soient \mathcal{P} un idéal premier de B et

$$r = \dim((B/(\mathcal{P} \cap A)B)_{\mathcal{P}}) + d^0 \text{tr}_{A/(\mathcal{P} \cap A)}(B/\mathcal{P}).$$

Considérons $\mathcal{N} = \mathcal{P} \cap A$, la partie multiplicativement stable $S = A - \mathcal{N}$ et $k = A_{\mathcal{N}}/\mathcal{N}A_{\mathcal{N}}$.

Considérons ensuite $R = S^{-1}B/\mathcal{N}S^{-1}B$ et son idéal premier $\mathcal{Q} = \mathcal{P}S^{-1}B/\mathcal{N}S^{-1}B$. On a

$$r = \dim(R_{\mathcal{Q}}) + d^0 \text{tr}_k(R/\mathcal{Q}).$$

D'après le Corollaire 15.26, il existe $t \in B$, avec $t \notin \mathcal{P}$, tel que

$$\dim(R_t) = r.$$

Comme R_t est une k -algèbre de type fini, il existe, d'après le Lemme de Normalisation, $z_1, \dots, z_r \in R_t$ tels que R_t est entier sur $k[z_1, \dots, z_r]$. Comme $R_t = (S^{-1}B/\mathcal{N}S^{-1}B)_t$, il existe $x_i \in B_t$ et $s_i \in S$ tels que z_i soit la classe de x_i/s_i dans R_t . Il est clair qu'on peut remplacer z_i par la classe de x_i , pour tout i .

$\mathcal{Q} = \mathcal{P}S^{-1}B/\mathcal{N}S^{-1}B$ est isolé au dessus de $\mathcal{Q} \cap k[z_1, \dots, z_r]$. Il en résulte que $\mathcal{P}B_t$ est isolé au dessus de $\mathcal{P}B_t \cap A[x_1, \dots, x_r]$.

Soit C la fermeture intégrale de $A[x_1, \dots, x_r]$ dans B_t .

D'après le "main theorem" de Zariski, il existe $u \in C$, avec $u \notin \mathcal{P}B_t$, tel que $(B_t)_u = C_u$.

Comme B_t est une A -algèbre de type fini, il existe un sous-anneau D de B_t , contenant $A[x_1, \dots, x_r]$ et u , fini sur $A[x_1, \dots, x_r]$, et tel que $(B_t)_u = D_u$.

Il existe $a \in B - \mathcal{P}$ et $l \geq 0$ tels que $u = a/t^l$. Posons $s = at$ et montrons que pour tout idéal premier \mathcal{P}' tel que $s \notin \mathcal{P}'$, on a

$$r \geq \dim((B/(\mathcal{P}' \cap A)B)_{\mathcal{P}'}) + d^0 \text{tr}_{A/(\mathcal{P}' \cap A)}(B/\mathcal{P}').$$

Mais $s \notin \mathcal{P}'$ implique $t \notin \mathcal{P}'$ et $u \notin \mathcal{P}'B_t$. Si $\mathcal{P}'B_t \cap D = \mathcal{Q}$, on a

$$B_{\mathcal{P}'} = D_{\mathcal{Q}} \quad \text{et} \quad B_{\mathcal{P}'}/\mathcal{P}'B_{\mathcal{P}'} = D_{\mathcal{Q}}/\mathcal{Q}D_{\mathcal{Q}}.$$

On veut donc montrer

$$r \geq \dim((D/(\mathcal{Q} \cap A)D)_{\mathcal{Q}}) + d^0 \text{tr}_{A/(\mathcal{Q} \cap A)}(D/\mathcal{Q}).$$

C'est le Lemme 15.27.

15.5 Premier Théorème d'intersection.

Théorème 15.29 : Si \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont deux idéaux de l'anneau de polynômes $K[X_1, \dots, X_n]$ sur un corps infini K , alors pour tout idéal premier minimal \mathcal{N} de $\mathcal{P} + \mathcal{P}'$ on a

$$\dim(K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{N}) \geq \dim(K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}) + \dim(K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}') - n.$$

Démonstration :

Considérons l'isomorphisme naturel de K algèbres

$$\pi : (K[X_1, \dots, X_n] \otimes_K K[X_1, \dots, X_n]) / (X_1 \otimes 1 - 1 \otimes X_1, \dots, X_n \otimes 1 - 1 \otimes X_n) \simeq K[X_1, \dots, X_n].$$

Il est clair qu'il induit un isomorphisme

$$K[X_1, \dots, X_n] \otimes_K K[X_1, \dots, X_n] / (\mathcal{P} \otimes_K K[X_1, \dots, X_n] + K[X_1, \dots, X_n] \otimes_K \mathcal{P}' + (X_1 \otimes 1 - 1 \otimes X_1, \dots, X_n \otimes 1 - 1 \otimes X_n)) \simeq K[X_1, \dots, X_n] / \mathcal{Q}$$

Compte tenu de cet isomorphisme et de la Proposition 15.14, il nous suffit de prouver

$$\dim((K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P} \otimes_K K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}')/\mathcal{Q}) = \dim(K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}) + \dim(K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}'),$$

pour tout idéal premier minimal \mathcal{Q} de l'anneau

$$K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P} \otimes_K K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}'.$$

C'est une conséquence du Lemme de normalisation.

Soient $y_1, \dots, y_r \in K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}$ (resp. $z_1, \dots, z_l \in K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}'$) des éléments algébriquement indépendants sur K tels que $K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}$ est entier sur $K[y_1, \dots, y_r]$ (resp. $K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}'$ est entier sur $K[z_1, \dots, z_l]$). On vérifie facilement que $K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P} \otimes_K K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}'$ est entier sur le sous-anneau $K[y_1, \dots, y_r] \otimes_K K[z_1, \dots, z_l]$ qui est évidemment de dimension $r+l = \dim(K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}) + \dim(K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{J})$.

Il reste à démontrer que

$$\mathcal{Q} \cap K[y_1, \dots, y_r] \otimes_K K[z_1, \dots, z_l] = (0).$$

Comme \mathcal{Q} est un idéal premier associé à $K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P} \otimes_K K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}'$, tout élément de \mathcal{Q} est diviseur de 0 dans $K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P} \otimes_K K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}'$. Il suffit donc de prouver qu'un élément de $K[y_1, \dots, y_r] \otimes_K K[z_1, \dots, z_l]$ n'est pas diviseur de 0 dans $K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P} \otimes_K K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}'$.

Soient F et F' sont les corps des fractions de $K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}$ et $K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}'$. L'application naturelle

$$K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P} \otimes_K K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}' \rightarrow F \otimes_K F'$$

est injective. Comme $F \otimes_K F'$ est un $K(y_1, \dots, y_r) \otimes_K K(z_1, \dots, z_l)$ -espace vectoriel, il en résulte que $K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P} \otimes_K K[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}'$ est un $K[y_1, \dots, y_r] \otimes_K K[z_1, \dots, z_l]$ -module sans torsion et le Théorème est démontré.

Corollaire 15.30 : Si M et N sont des modules de type fini sur l'anneau de polynômes $R = K[X_1, \dots, X_n]$, on a

$$\dim(M \otimes_R N) \geq \dim(M) + \dim(N) - n.$$

Démonstration :

Soient $\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)$ et $\mathcal{P}' \in \text{Supp}(N)$ tels que $\dim(R/\mathcal{P}) = \dim(M)$ et $\dim(R/\mathcal{P}') = \dim(N)$. Si \mathcal{N} est un idéal premier minimal de $\mathcal{P} + \mathcal{P}'$, on a $\mathcal{N} \in \text{Supp}(M \otimes_R N)$. Comme

$$\dim(R/\mathcal{N}) \geq \dim(R/\mathcal{P}) + \dim(R/\mathcal{P}')$$

d'après le Théorème 15.29, le Corollaire est démontré.

Corollaire 15.31 : Soient \mathcal{Q} un idéal premier de $R = K[X_1, \dots, X_n]$ et $A = R_{\mathcal{Q}}$. Si M et N sont des A -modules de type fini, on a

$$\dim(M \otimes_A N) \geq \dim(M) + \dim(N) - \dim(A).$$

Démonstration :

Soient $\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)$ et $\mathcal{P}' \in \text{Supp}(N)$ tels que $\dim(A/\mathcal{P}) = \dim(M)$ et $\dim(A/\mathcal{P}') = \dim(N)$ et \mathcal{N} un idéal premier minimal de l'idéal $\mathcal{P} + \mathcal{P}'$ de A . On applique alors le Théorème 15.29 à l'idéal premier $\mathcal{N} \cap R$ qui est minimal parmi les idéaux premiers contenant la somme des idéaux premiers $\mathcal{P} \cap R$ et $\mathcal{P}' \cap R$ de R . On rappelle que pour tout idéal premier $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$ on a

$$\dim(R/\mathcal{Q}') = \dim(R/\mathcal{Q}) + \dim(R_{\mathcal{Q}}/\mathcal{Q}'R_{\mathcal{Q}}).$$

15.6 Retour au cas gradué.

Le lecteur démontrera sans difficultés l'énoncé suivant :

Théorème 15.32 : Soient R un anneau gradué projectant et M un R -module gradué de type fini. Les nombres suivant sont égaux :

(i) $d_1(M)$: Le plus petit entier n pour lequel qu'il existe des éléments, non nuls et homogènes de degré 1, $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ tels que $(M/(x_1, \dots, x_n)M)_t = 0$ pour t assez grand.

(ii) $d_2(M)$: Le plus petit entier n pour lequel qu'il existe des éléments, non nuls et homogènes de degré > 0 , $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ tels que $(M/(x_1, \dots, x_n)M)_t = 0$ pour t assez grand.

(iii) $d_3(M)$: Le degré du polynôme $P \in \mathbf{Q}[T]$ tel que $P(m) = \sum_{t \leq m} l(M_t)$ pour m assez grand.

(iv) $d_4(M)$: le plus grand entier n tel qu'il existe une suite strictement croissante $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \dots \subset \mathcal{P}_n$ d'idéaux premiers gradués de $\text{Supp}M$.

(v) $d_5(M)$: le plus grand entier n tel qu'il existe une suite strictement croissante $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \dots \subset \mathcal{P}_n$ d'idéaux premiers de $\text{Supp}M$.

Définition 15.33 : On appelle dimension de M et on note $\dim M$ le nombre

$$d_1(M) = d_2(M) = d_3(M) = d_4(M) = d_5(M).$$

Définition 15.34 : Soient R un anneau gradué projetant et M un R -module gradué de type fini de dimension d . Si $x_1, \dots, x_d \in R$ sont des éléments homogènes de degré > 0 et tels que $(M/(x_1, \dots, x_d)M)_t = 0$ pour $t \gg 0$, on dit que (x_1, \dots, x_d) est un système de paramètres homogènes de M .

On a alors évidemment

Proposition 15.35 : Un élément homogène non inversible x de R fait partie d'un système de paramètres homogènes de M si et seulement si $\dim(M/xM) = \dim M - 1$, c'est à dire si et seulement si pour tout idéal premier (nécessairement gradué) $\mathcal{P} \in \text{Supp} M$, tel que $\dim(R/\mathcal{P}) = \dim M$, on a $x \notin \mathcal{P}$.

15.7 Exemples et Exercices.

Chapter 16

Profondeur

16.1 Suites régulières.

Soient M un A -module et $a \in A$. Si la multiplication par a dans M est injective, on dit souvent que a est régulier dans M . Rappelons l'énoncé suivant :

Proposition 16.1 : *Si A est un anneau noethérien et si M est un A -module de type fini, alors $a \in A$ est régulier dans M si et seulement si $a \notin \mathcal{P}$ pour tout $\mathcal{P} \in \text{Ass}M$.*

Corollaire 16.2 : *Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien et M un A -module non nul de type fini. Si $a \in \mathcal{M}$ est régulier dans M , alors $\dim(M/aM) = \dim(M) - 1$, i.e. a est un paramètre pour M .*

Démonstration : Si $\mathcal{P} \in \text{Supp}M$ est un idéal premier tel que $\dim(A/\mathcal{P}) = \dim M$, on a $\mathcal{P} \in \text{Ass}M$.

Comme a est régulier, on a $a \notin \mathcal{P}$ pour $\mathcal{P} \in \text{Ass}M$, donc a est un paramètre pour M .

Définition 16.3 : *Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien et M un A -module non nul de type fini. Si $a_1, \dots, a_r \in \mathcal{M}$, on dit que (a_1, \dots, a_r) est une suite M -régulière si :*

- (i) a_1 est non diviseur de 0 dans M (i.e. $x \in M$ et $a_1x = 0 \Rightarrow x = 0$).
- (ii) Pour tout $i \geq 2$, a_i est non diviseur de 0 dans $M/(a_1, \dots, a_{i-1})M$.

Avant d'étudier les suites régulières, soulignons la conséquence suivante du Corollaire 16.2

Théorème 16.4 : *Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien et M un A -module non nul de type fini. Si (a_1, \dots, a_r) est une suite M -régulière, $\dim(M/(a_1, \dots, a_r)M) = \dim(M) - r$.*

Théorème 16.5 : *Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien et M un A -module non nul de type fini. Si (a_1, \dots, a_r) une suite M -régulière, alors,*

- (i) (a_1, \dots, a_r) est un système minimal de générateurs de l'idéal $\mathcal{I} = (a_1, \dots, a_r)$.
- (ii) Tout système minimal ordonné de générateurs de \mathcal{I} est une suite M -régulière.

Lemme 16.6 : *Si (a_1, a_2) est une suite M -régulière, alors (a_2, a_1) est une suite M -régulière.*

Démonstration du Lemme :

Montrons d'abord que a_2 est M -régulier.

Si $a_2x = 0$, alors $x \in a_1M$. Soit $x = a_1y$. Mais $a_2a_1y = 0$ implique $a_2y = 0$ (car a_1 est régulier). On a donc montré $0_M : a_2 \subset a_1(0_M : a_2)$. On en déduit $0_M : a_2 = (0)$ par le Lemme de Nakayama.

Montrons maintenant que (a_2, a_1) est régulier :

Soit $a_1x_1 = a_2x_2$, avec $x_i \in M$. Comme (a_1, a_2) est une suite M -régulière, il existe $x_3 \in M$ tel que $x_2 = a_1x_3$, donc $a_1x_1 = a_2a_1x_3$ et $x_1 = a_2x_3$. Il reste $x_1 \in a_2M$ ce qui démontre que a_1 est régulier dans M/a_2M .

Démonstration du Théorème 16.5:

Si (a_1, \dots, a_r) n'est pas un système minimal de générateurs de \mathcal{I} , il existe i tel que

$$a_i \in (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_r).$$

Comme d'après le Lemme précédent, toute permutation des a_j est une suite M -régulière, on peut supposer $a_r \in (a_1, \dots, a_{r-1})$. Dans ce cas $a_rM \subset (a_1, \dots, a_{r-1})M$. Comme la suite est M -régulière, ceci implique $M \subset (x_1, \dots, x_{r-1})M$, ce qui est impossible d'après le Lemme de Nakayama. (i) est démontré.

Supposons maintenant $\mathcal{I} = (a_1, \dots, a_r) = (b_1, \dots, b_r)$, où (a_1, \dots, a_r) est une suite M -régulière, et montrons par récurrence sur r que (b_1, \dots, b_r) est une suite M -régulière.

Si $r = 1$, alors $a_1A = b_1A$, donc $b_1 = ua_1$ où u est un élément inversible. Il est alors clair que b_1 est M -régulier.

Si $r \geq 2$, soit $a_1 = \sum_1^r c_i b_i$. D'après (i), il existe i tel que $c_i \notin \mathcal{M}$. Supposons par exemple $c_1 \notin \mathcal{M}$. On a alors

$$(a_1, b_2, \dots, b_r) = (b_1, b_2, \dots, b_r) = (a_1, \dots, a_r).$$

Par hypothèse de récurrence, (b_2, \dots, b_r) est une suite M/a_1M -régulière. Donc (a_1, b_2, \dots, b_r) est M -régulière. Le Lemme montre alors d'abord que (b_2, \dots, b_r, a_1) est M -régulière, ensuite que (b_2, \dots, b_r, b_1) est M -régulière et enfin que (b_1, b_2, \dots, b_r) est M -régulière. (ii) est démontré.

Définition 16.7 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien et M un A -module de type fini. On appelle profondeur de M et on note $\text{prof}_A(M)$ le plus grand entier r tel qu'il existe une suite M -régulière de longueur r .

Proposition 16.8 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{prof}_A(M) = 0$.
- (ii) $\mathcal{M} \in \text{Ass}M$.
- (iii) $\text{Hom}(A/\mathcal{M}, M) \neq 0$.

Démonstration :

Si $\text{prof}_A(M) = 0$, alors $\mathcal{M} \subset \bigcup_{\mathcal{P} \in \text{Ass}(M)} \mathcal{P}$, donc (Lemme d'évitement) il existe $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M)$ tel que $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$, soit évidemment $\mathcal{M} \in \text{Ass}(M)$.

S'il existe $x \in M$, non nul, tel que $x\mathcal{M} = 0$, l'homomorphisme $f : A \rightarrow M$ défini par $f(1) = x$ se factorise par $A/(0 : x) = A/\mathcal{M}$, donc $\text{Hom}(A/\mathcal{M}, M) \neq 0$.

Enfin, soit $f \in \text{Hom}(A/\mathcal{M}, M)$ un homomorphisme non nul. Il est clair que $af(A/\mathcal{M}) = 0$ pour tout $a \in \mathcal{M}$, donc il n'existe pas d'élément M -régulier dans \mathcal{M} .

Proposition 16.9 : Si $a \in \mathcal{M}$ est M -régulier, alors $\text{prof}(M) = \text{prof}(M/aM) + 1$.

Démonstration par récurrence sur $\text{prof}(M/aM)$:

On veut prouver que si $b \in \mathcal{M}$ est un élément M -régulier, alors $\text{prof}(M/bM) = \text{prof}(M/aM)$.
 Considérons le diagramme commutatif suivant associé aux multiplications par a et par b :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & K \\
 & & & & & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & M/aM \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b \\
 0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{a} & M & \rightarrow & M/aM \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & M/bM & \xrightarrow{a} & M/bM & \rightarrow & M/(a,b)M \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Les lignes et les colonnes sont exactes. K est par définition le noyau de la multiplication par b dans M/aM .

Montrons d'abord que $\text{prof}(M/aM) = 0 \Leftrightarrow \text{prof}(M/bM) = 0$. S'il existe un élément non nul $x \in M/aM$ tel que $\mathcal{M}x = 0$, alors $bx = 0$, donc $x \in K$ et $\mathcal{M} \in \text{Ass}K$. D'après le diagramme du serpent, K est isomorphe au noyau de la multiplication par a dans M/bM . Donc $\mathcal{M} \in \text{Ass}M/bM$ et $\text{prof}(M/bM) = 0$, ce qui prouve l'équivalence annoncée.

Si $\text{prof}(M/aM) > 0$, alors $\text{prof}(M/bM) > 0$. Donc $\mathcal{M} \notin \text{Ass}M/aM$ et $\mathcal{M} \notin \text{Ass}M/bM$. Il existe alors (Lemme d'évitement) $c \in \mathcal{M}$ régulier dans M/aM et M/bM .

Par hypothèse de récurrence, on a $\text{prof}(M/aM) = \text{prof}(M/(a,c)M) + 1 = \text{prof}(M/cM)$ et $\text{prof}(M/bM) = \text{prof}(M/(b,c)M) + 1 = \text{prof}(M/cM)$. La Proposition est démontrée.

Théorème 16.10 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien et M un A -module de type fini. Si (a_1, \dots, a_r) est une suite M -régulière non prolongeable, alors $r = \text{prof}(M)$.

Démonstration :

C'est une conséquence immédiate de la Proposition précédente.

On a $\text{prof}(M/a_1M) = \text{prof}(M) - 1$ et (a_2, \dots, a_r) est une suite M/a_1M -régulière non prolongeable. On conclut par récurrence sur $\text{prof}(M)$.

Proposition 16.11 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien et M un A -module non nul de type fini. Si $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M)$, on a $\text{prof}(M) \leq \dim(A/\mathcal{P}) \leq \dim(M)$.

Démonstration de la première inégalité (la deuxième est évidente):

Faisons une récurrence sur $\text{prof}(M)$, le résultat étant trivial pour $\text{prof}(M) = 0$.

Si $\text{prof}(M) > 0$, soit $a \in \mathcal{M}$ un élément M -régulier. La suite exacte

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{a} M \rightarrow M/aM$$

induit une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A/\mathcal{P}, M) \xrightarrow{a} \text{Hom}(A/\mathcal{P}, M) \rightarrow \text{Hom}(A/\mathcal{P}, M/aM).$$

Rappelons que $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M)$ si, et seulement si, il existe $x \in M$ tel que $\mathcal{P} = \text{Ann}(x)$, donc $\text{Hom}(A/\mathcal{P}, M) \neq 0$. Par Nakayama, on en déduit que $\text{Hom}(A/\mathcal{P}, M/aM) \neq 0$. Tout élément de \mathcal{P} est donc diviseur de 0 dans M/aM . On en déduit qu'il existe $\mathcal{Q} \in \text{Ass}(M/aM)$ tel que $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. Or $a \in \mathcal{Q}$ et $a \notin \mathcal{P}$ (car tout élément de \mathcal{P} est diviseur de 0 dans M). Finalement :

$$\dim(A/\mathcal{P}) \geq \dim(A/\mathcal{Q}) + 1 \geq \text{prof}(M/aM) + 1 = \text{prof}(M).$$

Corollaire 16.12 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien et M un A -module non nul de type fini. Si $\text{prof}(M) = \dim(M)$, alors a est un paramètre pour M si et seulement si a est M -régulier.

En effet, d'après la proposition, on a $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M)$ si et seulement si $\dim(A/\mathcal{P}) = \dim(M)$.

Définition 16.13 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien et M un A -module non nul de type fini. On dit que A (resp. M) est de Cohen-Macaulay si $\text{prof}(A) = \dim(A)$ (resp. $\text{prof}(M) = \dim(M)$).

Le Corollaire 16.12 peut donc se lire

Proposition 16.14 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien et M un A -module de type fini de Cohen-Macaulay. Pour que $(a_1, \dots, a_r) \subset \mathcal{M}$ soit une suite M -régulière, il faut et il suffit que $\dim(M/(a_1, \dots, a_r)M) = \dim(M) - r$.

Proposition 16.15 : Si M est un A -module de Cohen-Macaulay de dimension d et si \mathcal{I} est un idéal tel que $\dim(M/\mathcal{I}M) = d - r$, il existe une suite M -régulière de longueur r contenue dans \mathcal{I} .

C'est la Proposition 15.17 relue en tenant compte de la Proposition 16.14

Corollaire 16.16 : Soient A un anneau local noethérien et M un A module de Cohen-Macaulay.

Si \mathcal{P} est un idéal premier de $\text{Supp}M$, alors $M_{\mathcal{P}}$ est un $A_{\mathcal{P}}$ -module de Cohen-Macaulay et on a $\dim M = \dim(A/\mathcal{P}) + \dim M_{\mathcal{P}}$.

Démonstration :

Comme $\dim(M/\mathcal{P}M) = \dim(A/\mathcal{P})$, on sait (Proposition 16.15) qu'il existe une suite M -régulière de longueur $(\dim M - \dim(A/\mathcal{P}))$ dans \mathcal{P} . C'est évidemment une suite $M_{\mathcal{P}}$ -régulière, donc $\dim(A/\mathcal{P}) + \text{prof} M_{\mathcal{P}} \geq \dim M$. Rappelons (Proposition 15.10) que $\dim M \geq \dim(A/\mathcal{P}) + \dim M_{\mathcal{P}}$. Comme $\dim M_{\mathcal{P}} \geq \text{prof} M_{\mathcal{P}}$, l'assertion (i) est prouvée.

Nous utiliserons souvent le résultat suivant :

Lemme 16.17 : Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de modules non nuls de type fini sur l'anneau local A, \mathcal{M} .

- (i) Si $\text{prof}_A(M'') \neq \text{prof}_A(M)$, alors $\text{prof}_A(M') = \min\{\text{prof}_A(M), \text{prof}_A(M'') + 1\}$.
- (ii) Si $\text{prof}_A(M'') = \text{prof}_A(M)$, alors $\text{prof}_A(M') \geq \text{prof}_A(M)$.

Démonstration par récurrence sur $\text{prof}_A(M'')$:

Si $\text{prof}_A(M'') = 0$, (ii) est évident. Si $\text{prof}_A(M) > 0$, il existe $a \in \mathcal{M}$, un élément M -régulier. On considère alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & N \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & \downarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & M' & \rightarrow & M & \rightarrow & M'' & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow a & & \downarrow a & & \downarrow a & & \\
 0 & \rightarrow & M' & \rightarrow & M & \rightarrow & M'' & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & M'/aM' & & & & & &
 \end{array}$$

Ses lignes et ses colonnes sont exactes. Le diagramme du serpent induit une injection : $0 \rightarrow N \rightarrow M'/aM'$.

Comme $\text{prof}(M'') = 0$, il existe $x \in M''$ tel que $\mathcal{M}x = 0$. A fortiori $ax = 0$, donc $x \in N$. On en déduit $\mathcal{M} \subset \text{Ass}(N) \subset \text{Ass}(M'/aM')$. Soit $\text{prof}(M'/aM') = 0$ et $\text{prof}(M') = 1$.

Supposons que $\text{prof}_A(M'') > 0$.

Si $\text{prof}_A(M) = 0$, la suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A/\mathcal{M}, M') \rightarrow \text{Hom}(A/\mathcal{M}, M) \rightarrow \text{Hom}(A/\mathcal{M}, M'')$$

montre que $\text{prof}(M') = 0$ car $\text{Hom}(A/\mathcal{M}, M) \neq 0$ et $\text{Hom}(A/\mathcal{M}, M'') = 0$ (Proposition 16.8).

Si $\text{prof}_A(M) > 0$, le Lemme d'évitement montre qu'il existe $a \in \mathcal{M}$ régulier dans M et M'' . La multiplication par a donne le diagramme commutatif, dont les lignes et les colonnes sont exactes, suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & M' & \rightarrow & M & \rightarrow & M'' & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow a & & \downarrow a & & \downarrow a & & \\
 0 & \rightarrow & M' & \rightarrow & M & \rightarrow & M'' & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & M'/aM' & \rightarrow & M/aM & \rightarrow & M''/aM'' & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

On conclut par récurrence en utilisant la Proposition 16.9.

Corollaire 16.18 : Soit (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien. Si

$$L^0 \rightarrow L^1 \rightarrow \dots \rightarrow L^k$$

est une suite exacte de A -modules libres de type fini, on a

$$\text{prof}(\text{Ker}(L^0 \rightarrow L^1)) \geq \min(\text{prof}(A), k).$$

La démonstration est une récurrence évidente sur k .

Corollaire 16.19 : Soit (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien. Soient M et N des A -modules de type fini. Si $\text{Hom}_A(N, M) \neq (0)$, alors $\text{prof}(\text{Hom}_A(N, M)) \geq \inf(2, \text{prof}(M))$.

Démonstration:

Considérons une présentation $L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow N \rightarrow 0$, où L_1 et L_0 sont des modules libres de type fini. Elle induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(N, M) \rightarrow \text{Hom}_A(L_0, M) \rightarrow \text{Hom}_A(L_1, M).$$

Mais $\text{Hom}_A(L_i, M)$ est isomorphe à une somme de copies de M , donc $\text{prof}(\text{Hom}_A(L_i, M)) = \text{prof}(M)$. On conclut immédiatement avec le Lemme 16.17.

Corollaire 16.20 : Soient A un anneau local noethérien et M un A -module réflexif de type fini. Alors $\text{prof}(M) \geq \inf(2, \text{prof}(A))$

Comme $M \simeq \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, A), A)$, c'est un cas particulier de l'énoncé précédent.

16.2 Conditions \mathcal{S}_i .

Définition 16.21 : Soient A un anneau noethérien et M un A -module de type fini. On dit que M est \mathcal{S}_i si $\text{prof}(M_{\mathcal{P}}) \geq \min(i, \dim(M_{\mathcal{P}}))$ pour tout idéal premier $\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)$.

Remarques :

(i) Tout A -module de type fini est \mathcal{S}_0 .

(ii) M est \mathcal{S}_1 si et seulement si les idéaux premiers associés à M sont tous minimaux (dans le Support de M).

Proposition 16.22 : Un anneau noethérien intègralement A clos est \mathcal{S}_2 .

Démonstration : Soit \mathcal{P} un idéal premier non nul tel que $\text{prof}(A_{\mathcal{P}}) = 1$. Il existe $a \in \mathcal{P}$, un élément non nul, tel que $\text{prof}(A_{\mathcal{P}}/aA_{\mathcal{P}}) = 0$. Donc $\mathcal{P}A_{\mathcal{P}} \in \text{Ass}(A_{\mathcal{P}}/aA_{\mathcal{P}})$, ce qui implique $\mathcal{P} \in \text{Ass}(A/aA)$ (Théorème 7.49). Alors $A_{\mathcal{P}}$ est de valuation discrète (Théorème 10.3), donc de dimension 1.

Donc $\text{prof}(A_{\mathcal{P}}) = 1$ implique $\dim(A_{\mathcal{P}}) = 1$, autrement dit A est \mathcal{S}_2 .

Théorème 16.23 : Soient A un anneau intègre noethérien et M un A -module de type fini tel que $\dim(M) = \dim(A)$.

(i) M est sans torsion si et seulement si M est \mathcal{S}_1 .

(ii) Si on suppose de plus que A est intègralement clos, alors M est réflexif si et seulement si M est \mathcal{S}_2 .

Démontrons (i). Dire que M est sans torsion, c'est dire que pour tout élément non nul $x \in M$ on a $\text{ann}(x) = (0)$. Mais comme tout idéal premier associé à M est l'annulateur d'un élément, c'est dire que (0) est l'unique idéal premier associé à M , donc que M est \mathcal{S}_1 .

Supposons maintenant que A est intègralement clos et montrons (ii).

Si M est réflexif, alors M est \mathcal{S}_2 en utilisant le Corollaire 16.20.

Réciproquement, si M est \mathcal{S}_2 , alors M est sans torsion, donc l'application $M \rightarrow M^{\text{vv}}$ est injective.

Montrons que $C = \text{coker}(M \rightarrow M^{\text{vv}})$ est nul.

Si \mathcal{P} est un idéal premier de hauteur 1, on sait que $A_{\mathcal{P}}$ est un anneau de valuation discrète. Donc le $A_{\mathcal{P}}$ -module sans torsion $M_{\mathcal{P}}$ est libre. Il en résulte que l'application : $M_{\mathcal{P}} \rightarrow M_{\mathcal{P}}^{\text{vv}}$ est un isomorphisme.

Supposons $C \neq 0$ et soit $\mathcal{Q} \in \text{Supp}(C)$ un idéal premier minimal de C .

Nous venons de prouver $\dim(M_{\mathcal{Q}}) = \dim(A_{\mathcal{Q}}) \geq 2$, donc $\text{prof}(M_{\mathcal{Q}}) \geq 2$.

Comme $C_{\mathcal{Q}}$ est non nul de longueur finie, on a $\text{prof}(C_{\mathcal{Q}}) = 0$. Le Lemme 16.17 appliqué à la suite exacte

$$0 \rightarrow M_{\mathcal{Q}} \rightarrow M_{\mathcal{Q}}^{\text{vv}} \rightarrow C_{\mathcal{Q}} \rightarrow 0$$

entraîne alors $\text{prof}(M_{\mathcal{Q}}) = 1$, donc une contradiction, et M est réflexif.

Théorème 16.24 : Soient A un anneau noethérien et M un A -module de type fini. Si f_1, \dots, f_n sont des éléments de A , soient $F = V(f_1, \dots, f_n) \cap \text{Supp}(M)$ et U l'ouvert complémentaire de F dans $\text{Supp}(M)$. Il existe une identification naturelle entre les A -modules suivant:

(i)

$$K = \text{Ker}(h : \bigoplus_i M_{f_i} \rightarrow \bigoplus_{i,j} M_{f_i f_j}),$$

où

$$h(x_1, \dots, x_n) = (x_i - x_j)_{i,j} \quad \text{avec} \quad x_i - x_j \in M_{f_i f_j}$$

(il y a un abus de langage, nous écrivons aussi x_i ou x_j pour l'image de x_i ou x_j dans $M_{f_i f_j}$).

(ii) Le sous-module M' de $\prod_{\mathcal{P} \in U} M_{\mathcal{P}}$ formé par les éléments

$$(a_{\mathcal{P}}/s_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P} \in U}, \quad a_{\mathcal{P}} \in M, \quad s_{\mathcal{P}} \in A - \mathcal{P}, \quad s_{\mathcal{P}} a_{\mathcal{P}'} - s_{\mathcal{P}'} a_{\mathcal{P}} = 0 \quad \forall \mathcal{P}, \mathcal{P}' \in U.$$

Le noyau de l'application naturelle $i : M \rightarrow M' (= K)$ est $(0 : (f_1, \dots, f_n)^l)$ pour $l \gg 0$.

L'application i est non nulle si et seulement si $U \neq \emptyset$.

L'application i est injective si et seulement si $\text{prof}(M_{\mathcal{P}}) \geq 1$ pour tout idéal premier $\mathcal{P} \in U$.

L'application i est bijective si et seulement si $\text{prof}(M_{\mathcal{P}}) \geq 2$ pour tout idéal premier $\mathcal{P} \in U$.

Démonstration :

Soit $x = (x_1/f_1^{l_1}, \dots, x_n/f_n^{l_n}) \in K$, avec $x_i \in M$ pour tout i . On a évidemment

$$x = (x_1 f_1^r / f_1^{r+l_1}, \dots, x_n f_n^r / f_n^{r+l_n}), \quad \text{pour} \quad r \geq 0.$$

On vérifie facilement que $x_i / f_i^{l_i} = x_j / f_j^{l_j} \in M_{f_i f_j}$ implique

$$x_i f_i^r f_j^{r+l_j} = x_j f_j^r f_i^{r+l_i} \in M \text{ pour } r \gg 0.$$

Soient $\mathcal{P} \in U$ et i tel que $f_i \notin \mathcal{P}$. Alors $x_i f_i^r / f_i^{r+l_i} \in M_{\mathcal{P}}$ ne dépend que de $x \in K$. On a défini l'application naturelle $K \rightarrow M'$.

Rappelons (Théorème 7.25) que

$$M_{f_i} \simeq (a_{\mathcal{P}}/s_{\mathcal{P}})_{f_i \notin \mathcal{P}} \in \prod_{f_i \notin \mathcal{P}} M_{\mathcal{P}}, \quad s_{\mathcal{P}} a_{\mathcal{P}'} - s_{\mathcal{P}'} a_{\mathcal{P}} = 0 \quad \forall \mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \text{Supp}(M) - V(f_i).$$

Ceci définit une application naturelle $M' \rightarrow \bigoplus_i M_{f_i}$ dont l'image est dans K .

Comme on le pense, ces deux applications sont inverses l'une de l'autre.

L'application $i : M \rightarrow K$, $x \rightarrow (x/1)_j$ est claire. On a $x \in \text{Ker}(i)$ si et seulement si $x f_j^r = 0$ pour $r \gg 0$ et pour tout j . Autrement dit si et seulement si $(f_1, \dots, f_n)^l \subset (0 : x)$ pour $l \gg 0$. Donc, $M = \text{Ker}(i)$ si et seulement si $F = \text{Supp}(M)$, i.e. $U = \emptyset$.

Supposons maintenant qu'il existe $\mathcal{P} \in V(f_1, \dots, f_n) \cap \text{Supp}(M)$ tel que $\text{prof}(M_{\mathcal{P}}) = 1$. Il existe alors $a \in \mathcal{P}$ un élément M -régulier tel que $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M/aM)$. Donc il existe $x \notin aM$ tel que $f_i x \in aM$ pour tout i . Il est clair que $(x/a)_i \in K \subset \bigoplus_i M_{f_i}$ et $(x/a)_i \notin \text{Im}[M \rightarrow K \subset \bigoplus_i M_{f_i}]$.

Enfin, supposons que i est injective et identifions M à $i(M)$. Soit $z \in K$ tel que $z \notin M$. On a $x f_i^r \in M$ pour $r \gg 0$. Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow M \rightarrow M + Az \rightarrow (M + Az)/M \rightarrow 0.$$

Comme $(f_1, \dots, f_n)^l (M + Az)/M = (0)$ pour $l \gg 0$, il existe un idéal premier $\mathcal{P} \in \text{Ass}((M + Az)/M)$ tel que $(f_1, \dots, f_n) \subset \mathcal{P}$. La suite exacte

$$0 \rightarrow M_{\mathcal{P}} \rightarrow (M + Az)_{\mathcal{P}} \rightarrow ((M + Az)/M)_{\mathcal{P}} \rightarrow 0$$

montre alors $\text{prof}(M_{\mathcal{P}}) = 1$, en utilisant le Lemme 16.17.

Corollaire 16.25 : Soient A un anneau noethérien et M un A -module de type fini de support connexe.

Si $F \subset \text{Supp}(M)$ est un fermé tel que $\text{prof}(M_{\mathcal{P}}) \geq 2$ pour tout $\mathcal{P} \in F$, l'ouvert complémentaire de F dans $\text{Supp}(M)$ est connexe.

Démonstration :

Soit U cet ouvert. Si U est la réunion disjointe de deux ouverts non vides U_1 et U_2 , le A -module M' décrit dans le Théorème 16.24 est la somme directe de deux sous-modules non nuls de supports disjoints. Mais $M \simeq M'$, d'après ce Théorème. Comme $\text{Supp}(M)$ est connexe, c'est impossible.

Théorème 16.26 : Soit A un anneau noethérien intègre et intégralement clos. Soit (f_1, \dots, f_n) un idéal de A tel que $\mathcal{P} \in V(f_1, \dots, f_n)$ implique $\text{prof}(A_{\mathcal{P}}) \geq 2$.

Soit M un A -module réflexif de type fini. Il y a un isomorphisme naturel

$$\text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, A), A) \simeq \text{Ker}[\bigoplus_i M_{f_i} \rightarrow \bigoplus_{i,j} M_{f_i f_j}], \quad (x_1, \dots, x_n) = (x_i/1 - x_j/1)_{i,j}$$

.

Démonstration :

On a $\text{Supp}(M) = \text{Spec}(A)$. On sait (Théorème 16.23) que M est \mathcal{S}_2 . Donc pour tout idéal premier $\mathcal{P} \in V(f_1, \dots, f_n) \cap \text{Supp}(M)$, on a $\text{prof}(M_{\mathcal{P}}) \geq 2$. On peut donc appliquer le Théorème 16.24.

16.3 Le Lemme d'acyclité.

Théorème 16.27 : Soient A un anneau local noethérien, M un A -module de type fini et, pour $i \geq 0$, L^i une somme finie de copies de M . Soit

$$0 \rightarrow L^0 \xrightarrow{\phi_0} L^1 \xrightarrow{\phi_1} \dots \xrightarrow{\phi_{r-1}} L^r$$

un complexe, i.e. $\phi_{i+1} \circ \phi_i = 0$ pour tout $i \geq 0$. Si le radical $R(\text{Ann}(\ker\phi_i/\text{Im}\phi_{i-1}))$ contient une suite M -régulière de longueur $> i$ pour tout $i \leq k < r$, alors $\ker\phi_i = \text{Im}\phi_{i-1}$ pour tout $i \leq k$.

Démonstration par récurrence sur k :

Supposons $k = 0$. Si a est un élément M -régulier, il est L_0 -régulier; donc $a^n \ker\phi_0 = 0$ entraîne $\ker\phi_0 = 0$.

Supposons le résultat vrai à l'ordre $k - 1$, i.e. l'exactitude du complexe :

$$0 \rightarrow L^0 \rightarrow L^1 \rightarrow \dots \rightarrow L^{k-1} \rightarrow L^k.$$

Posons $C = \phi_{k-1}(L^{k-1})$ et $K = \ker\phi_k$. Supposons $K/C \neq 0$.

Soit \mathcal{P} un idéal premier minimal de $\text{Supp}(K/C)$. Par hypothèse, il existe une suite M -régulière de longueur $k+1$ dans $\text{rad}(\text{Ann}(K/C))$, donc dans \mathcal{P} . L'image de cette suite dans $\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$ est évidemment $M_{\mathcal{P}}$ -régulière.

On a donc $\text{prof}(L^i)_{\mathcal{P}} \geq k+1$ pour tout i . Comme $K_{\mathcal{P}} \subset (L^k)_{\mathcal{P}}$, on a $\text{prof}(K_{\mathcal{P}}) \geq 1$.

Comme $l(K/C)_{\mathcal{P}}$ est finie non nulle, le Lemme 16.17 et la suite exacte

$$0 \rightarrow C_{\mathcal{P}} \rightarrow K_{\mathcal{P}} \rightarrow (K/C)_{\mathcal{P}} \rightarrow 0$$

montre que $\text{prof}(C_{\mathcal{P}}) = 1$. Le même Lemme et la suite exacte

$$0 \rightarrow (L^0)_{\mathcal{P}} \rightarrow (L^1)_{\mathcal{P}} \rightarrow \dots \rightarrow (L^{k-1})_{\mathcal{P}} \rightarrow C_{\mathcal{P}} \rightarrow 0.$$

démontrent que $\text{prof}(L^0)_{\mathcal{P}} = k$, ce qui contredit $\text{prof}(M_{\mathcal{P}}) \geq k+1$. Donc $C = K$ et le Théorème est démontré.

Corollaire 16.28 : Si $\text{prof}_A(M) \geq r$ et si $\ker\phi_i/\text{Im}\phi_{i-1}$ est de longueur finie pour tout $i \leq r$, alors le complexe

$$0 \rightarrow L^0 \xrightarrow{\phi_0} L^1 \xrightarrow{\phi_1} \dots \xrightarrow{\phi_{r-1}} L^r$$

est exact.

Démonstration :

Soit (x_1, \dots, x_r) dans \mathcal{M} une suite régulière dans M . Si $\ker\phi_i/\text{Im}\phi_{i-1}$ est de longueur finie, alors $\mathcal{M} = \text{rad}(\text{Ann}(\ker\phi_i/\text{Im}\phi_{i-1}))$ et on applique le Théorème.

16.4 Suites régulières et Complexe de Koszul.

Théorème 16.29 : Soient A un anneau local, L un A module libre de rang r et $f : L \rightarrow A$ un homomorphisme à valeur dans l'idéal maximal de A . Si M est un A -module de type fini, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'idéal $f(L)$ est engendré par une suite M -régulière de longueur r .
- (ii) $H_i(K.(f, M)) = 0$ pour $i \geq 1$.
- (iii) $H_1(K.(f, M)) = 0$.

Démonstration :

Montrons (i) \Rightarrow (ii). Si $\mathcal{J} = f(L)$, on sait (Corollaire 14.8) que $\text{Supp}(H_i(K.(f, M))) \subset \text{Supp}(M/\mathcal{J}M)$, donc tout idéal premier de $\text{Supp}(H_i(K.(f, M)))$ contient \mathcal{J} . Le complexe de Koszul considéré est de longueur r , donc si \mathcal{J} est engendré par une suite M -régulière de longueur r , alors $H_i(K.(f, M)) = 0$ pour $i \geq 1$ d'après le Théorème 16.27.

Il reste à montrer (iii) \Rightarrow (i). Faisons une récurrence sur r .

Si $r = 1$, soient e une base de L et $x = f(e)$. Le complexe $K.(f, M)$ s'écrit

$$0 \rightarrow Ae \otimes M \xrightarrow{d} M \rightarrow 0,$$

où $d(e \otimes m) = xm$. Clairement, si d est injective x est M -régulier.

Fixons maintenant une base (e_1, \dots, e_r) de L et posons $f(e_i) = x_i$. Si F est le sous-module libre de L engendré par e_1, \dots, e_{r-1} , on a, pour tout i

$$\wedge^i L = \wedge^i F \oplus \wedge^{i-1} F \wedge Ae_r,$$

donc un isomorphisme

$$\wedge^i L \simeq \wedge^i F \oplus \wedge^{i-1} F.$$

On en déduit des isomorphismes

$$(\wedge^i L) \otimes M \simeq (\wedge^i F) \otimes M \oplus (\wedge^{i-1} F) \otimes M.$$

Un élément $z \in (\wedge^i L) \otimes M$ a donc une décomposition unique $z = z_1 \oplus z_2$, avec

$$z_1 \in (\wedge^i F) \otimes M \quad \text{et} \quad z_2 \in (\wedge^{i-1} F) \otimes M.$$

Soient alors g la restriction de f à F et $d(f)$. et $d(g)$. les dérivations des complexes $K.(f, M)$ et $K.(g, M)$. On vérifie immédiatement

$$d(f)_i(z_1 \oplus z_2) = (d(g)_i(z_1) + (-1)^{i-1} x_r z_2) \oplus d(g)_{i-1}(z_2) \quad (*)$$

pour $i > 1$, et

$$d(f)_1(z_1 \oplus z_2) = (d(g)_1(z_1) + x_r z_2). \quad (**)$$

Montrons d'abord $H_1(K.(g, M)) = 0$, ce qui par hypothèse de récurrence implique la M -régularité de la suite (x_1, \dots, x_{r-1}) .

Si $(d(g)_1(z_1) = g(z_1) = 0$, alors $d(f)_1(z_1) = f(z_1) = 0$.

Comme $H_1(K.(f, M)) = 0$, il existe

$$w = w_1 \oplus w_2 \quad \text{avec} \quad w_1 \in (\wedge^2 F) \otimes M \quad \text{et} \quad w_2 \in (\wedge^1 F) \otimes M,$$

tel que $z_1 = d(f)_2(w_1 \oplus w_2)$.

D'après (*), ceci implique $d(g)_1(w_2) = 0$ et $z_1 = (d(g)_2(w_1) - x_r w_2)$.

Si \bar{z}_1 (resp. \bar{w}_2) est la classe de z_1 (resp. w_2) dans $H_1(K.(g, M))$, on en déduit $\bar{z}_1 = -x_r \bar{w}_2$.

On a montré $H_1(K.(g, M)) \subset x_r H_1(K.(g, M))$, donc $H_1(K.(g, M)) = (0)$ par le Lemme de Nakayama. La suite (x_1, \dots, x_{r-1}) est donc M -régulière.

Il reste à montrer que x_r est régulier dans $M/(x_1, \dots, x_{r-1})M = H_0(K.(g, M))$.

Soit alors $z_2 \in (\wedge^0 F) \otimes M = M$ un élément tel que $x_r z_2 \in (x_1, \dots, x_{r-1})M$.

Comme $(x_1, \dots, x_{r-1})M = d(g)_1((\wedge^1 F) \otimes M)$, il existe

$$z_1 \in (\wedge^1 F) \otimes M \quad \text{avec} \quad x_r z_2 = -d(g)_1(z_1).$$

On a (d'après (**))

$$d(f)_1(z_1 \oplus z_2) = d(g)_1(z_1) + x_r z_2 = 0.$$

On en déduit l'existence de $w_1 \oplus w_2 \in ((\wedge^2 F) \otimes M)$ tel que $(z_1 \oplus z_2) = d(f)_2(w_1 \oplus w_2)$, ce qui implique (d'après (*)) $z_2 = d(g)_1(w_2)$, donc $z_2 \in (x_1, \dots, x_{r-1})M$ et le Théorème est démontré.

16.5 Retour au cas gradué.

Définition 16.30 : Soient R un anneau gradué projetant et M un R -module gradué de type fini. Si $x_1, \dots, x_r \in R$ sont des éléments homogènes non inversibles, on dit que la suite (x_1, \dots, x_r) est M -régulière si

(i) x_1 est régulier dans M

(ii) x_i est régulier dans $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$ pour $2 \leq i \leq r$.

Pour chaque énoncé local de ce chapitre (ou presque), il y a un énoncé gradué correspondant que le Lecteur devine bien. Nous lui épargnerons une fastidieuse répétition!

Chapter 17

Dimension projective

17.1 Modules projectifs.

Définition 17.1 : Soient A un anneau et P un A -module. On dit que P est projectif si le foncteur $\text{Hom}_A(P, \cdot)$ est exact, c'est à dire si pour toute suite exacte de A -modules :

$$0 \rightarrow M'' \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow 0,$$

le complexe

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(N, M'') \rightarrow \text{Hom}_A(N, M) \rightarrow \text{Hom}_A(N, M') \rightarrow 0$$

est une suite exacte.

Exemple : Un module libre est projectif.

Proposition 17.2 : Soient N et L des A -modules et $f : L \rightarrow N$ une application surjective. Si N est projectif, il existe $g : N \rightarrow L$ tel que $fog = id_N$, i.e. $\text{Ker} f$ est un facteur direct de L .

Démonstration : Si N est projectif, l'application surjective

$$\text{Hom}_A(N, L) \rightarrow \text{Hom}_A(N, N) \rightarrow 0$$

montre bien qu'il existe $g \in \text{Hom}_A(N, L)$ telle que $fog = id$. On a alors $L = \text{Ker} f \oplus g(N)$.

Si $L = \text{Ker} f \oplus N'$, il existe un isomorphisme $g : N \rightarrow N'$ tel que $fog = id_N$.

Corollaire 17.3 : Soient L un A -module libre, N un A -module et $f : L \rightarrow N$ une surjection. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) N est projectif.
- (ii) L'application induite $\text{Hom}_A(N, L) \rightarrow \text{Hom}_A(N, N)$ est surjective.
- (iii) Il existe $g : N \rightarrow L$ tel que $fog = id_N$.
- (iv) $\text{Ker} f$ est un facteur direct de L .

Démonstration : Il nous reste à prouver que si $\text{Ker } f$ est un facteur direct de L , alors N est projectif.

Mais $L \simeq \text{Ker } f \oplus N$ implique $\text{Hom}_A(L, \cdot) \simeq \text{Hom}_A(\text{Ker } f, \cdot) \oplus \text{Hom}_A(N, \cdot)$. Comme L est libre il est projectif, donc $\text{Hom}_A(L, \cdot)$ est un "foncteur" exact et $\text{Hom}_A(N, \cdot)$ aussi.

Théorème 17.4 : *Si (A, \mathcal{M}) est un anneau local noethérien et N un A -module de type fini, alors N est projectif si et seulement si N est libre.*

Démonstration : Supposons que N est projectif.

Soient x_1, \dots, x_n des éléments de N dont les classes $(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$ dans $N/\mathcal{M}N$ forment une base de $N/\mathcal{M}N$.

D'après le Lemme de Nakayama, les éléments x_1, \dots, x_n engendrent N . Ils définissent donc une application surjective $f : nA \rightarrow N \rightarrow 0$ induisant un isomorphisme $\overline{f} : n(A/\mathcal{M}A) \simeq N/\mathcal{M}N$.

D'après le Corollaire 17.3, il existe une décomposition $nA = F \oplus F'$ telle que la restriction f/F est un isomorphisme. Comme $n(A/\mathcal{M}A) = F/\mathcal{M}F \oplus F'/\mathcal{M}F'$, on en déduit $F'/\mathcal{M}F' = 0$ et $F' = 0$ (Lemme de Nakayama).

Corollaire 17.5 : *Un module de type fini N sur un anneau noethérien A est projectif si et seulement si il est localement libre.*

Démonstration : Soient L un A -module libre de type fini et $f : L \rightarrow N$ une surjection.

L'application $\text{Hom}_A(N, L) \rightarrow \text{Hom}_A(N, N)$ est surjective si et seulement si $\text{Hom}_{A_{\mathcal{P}}}(N_{\mathcal{P}}, L_{\mathcal{P}}) \rightarrow \text{Hom}_{A_{\mathcal{P}}}(N_{\mathcal{P}}, N_{\mathcal{P}})$ est surjective pour tout idéal premier \mathcal{P} . Donc N est projectif si et seulement si $N_{\mathcal{P}}$ est projectif pour tout idéal premier \mathcal{P} .

Corollaire 17.6 : *Soit R un anneau gradué projetant. Un R -module gradué de type fini est projectif si et seulement si il est libre.*

Démonstration : Soit M un R -module gradué de type fini projectif. C'est un R -module localement libre. Il en résulte que $M/R+M$ est un module localement libre sur l'anneau artinien $R/R+$, donc libre (Théorème 7.27).

Soient alors x_1, \dots, x_n des éléments homogènes de M dont les classes $(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) \in M/R+M$ forment une base de $M/R+M$.

D'après le Lemme de Nakayama, les éléments x_1, \dots, x_n engendrent M . Si $r_i = d^0 x_i$, ils définissent donc un homomorphisme surjectif $f : \oplus R[-r_i] \rightarrow M \rightarrow 0$, homogène de degré 0, induisant un isomorphisme

$$\overline{f} : \oplus (R/R+)[-r_i] \simeq M/R+M \quad (*).$$

D'après le Corollaire 17.3, il existe une décomposition, nécessairement graduée, $\oplus R[-r_i] = \text{Ker}(f) \oplus F$ telle que la restriction f/F est un isomorphisme. Il résulte de (*) que $\text{Ker}(f)/R+\text{Ker}(f) = (0)$, donc que $\text{Ker}(f) = (0)$, d'après le Lemme de Nakayama (graduée).

Définition 17.7 : *Soient A un anneau et M un A -module. Une résolution projective $(L., \phi.)$ de M sur A est un complexe exact :*

$$\dots \xrightarrow{\phi_{i+1}} L_i \xrightarrow{\phi_i} \dots \xrightarrow{\phi_2} L_1 \xrightarrow{\phi_1} L_0$$

où L_0, \dots, L_i, \dots sont des A -modules projectifs, et $M = \text{coker } \phi_1$.

Définition 17.8 : Soient A un anneau local (resp. gradué) noethérien d'idéal maximal \mathcal{M} et M un A -module (resp. gradué) de type fini.

(i) Une présentation de M est la donnée d'un A -module libre (resp. libre gradué) de type fini L et d'un homomorphisme (resp. homogène de degré 0) surjectif $f : L \rightarrow M$.

La présentation est minimale si $\text{Ker}(f) \subset \mathcal{M}L$ (resp. $\text{Ker}(f) \subset A+L$).

(ii) Une résolution projective (resp. graduée à homomorphismes de degré 0) L_\bullet, ϕ_\bullet de M est dite minimale si $\phi_i(L_i) \subset \mathcal{M}L_{i-1}$ (resp. $\phi_i(L_i) \subset A+L_{i-1}$ pour tout $i \geq 1$).

D'après le Lemme de Nakayama, un A -module de type fini a toujours une présentation minimale, donc aussi une résolution projective minimale.

17.2 Dimension projective.

Définition 17.9 : Soient A un anneau noethérien et M un A -module. On dit que M est de dimension projective finie s'il existe une résolution projective finie de M :

$$0 \rightarrow L_r \rightarrow \dots \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Sinon, on dit que M est de dimension projective infinie.

Si M un A -module de dimension projective finie, on appelle dimension projective de M , et on note $dp_A(M)$, le petit entier r tel qu'il existe une résolution projective finie de M :

$$0 \rightarrow L_r \rightarrow \dots \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Proposition 17.10 : Si M est un A -module de dimension projective r et si S est une partie multiplicativement stable de A , alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}A$ -module de dimension projective $\leq r$.

Démonstration de la Proposition : Si $(L_\bullet, \phi_\bullet)$ est une résolution de longueur r de M , il est clair que $(S^{-1}L_\bullet, S^{-1}\phi_\bullet)$ est une résolution de longueur r de $S^{-1}M$.

Lemme 17.11 : Si F est un A -module projectif et N un A -module, alors $dp_A(F \oplus N) = dp_A(N)$.

Démonstration du Lemme :

Soit P_i, ϕ_i une résolution projective de N . Alors

$$\dots \rightarrow P_2 \xrightarrow{\phi_2} P_1 \xrightarrow{\phi_1 \oplus 0} P_0 \oplus F$$

est une résolution projective de $F \oplus N$, ce qui démontre $dp_A(F \oplus N) \leq dp_A(N)$.

Soit L_i, ϕ_i une résolution projective de $F \oplus N$. L'application surjective $L_0 \rightarrow F \oplus N$ induit par composition avec la projection une surjection $L_0 \rightarrow F$, dont le noyau K_0 est un facteur direct de L_0 , donc un module projectif. L'application $L_1 \rightarrow L_0$ se factorise par une application $L_1 \rightarrow K_0$ dont le conoyau est N . On a démontré $dp_A(F \oplus N) \geq dp_A(N)$.

Proposition 17.12 : Soient A un anneau noethérien et M un A -module de type fini et de dimension projective r . Soit

$$L_{r-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

une suite exacte où les A -modules L_i sont projectifs de type fini. Si $K = \ker(L_{r-1} \rightarrow L_{r-2})$, alors K est un A -module projectif.

Compte tenu du Corollaire 17.5, la Proposition se déduit, par une récurrence simple, du Lemme suivant :

Lemme 17.13 : Soit A un anneau local noethérien d'idéal maximal \mathcal{M} . Soit

$$0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$$

une suite exacte de A -modules. Si L est libre et M de type fini, on a

$$dp_A(K) = \max(0, dp_A(M) - 1).$$

Démonstration du Lemme :

Soit $n = rg(M/\mathcal{M}M)$. Considérons alors une présentation minimale $nA \rightarrow M \rightarrow 0$. Comme L est libre, l'application $L \rightarrow M$ se factorise par une application $L \rightarrow nA$. Celle-ci est surjective, d'après le Lemme de Nakayama, car $L/\mathcal{M}L \rightarrow n(A/\mathcal{M}) \simeq M/\mathcal{M}M$ est surjective.

Considérons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & F & = & F & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & L & \rightarrow & M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & nA & \rightarrow & M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Les lignes et les colonnes sont exactes. Comme la colonne du milieu est scindée, F est un facteur direct de L , et donc de K aussi. F est alors libre et $K \simeq N \oplus F$. On en déduit $dp_A(K) = dp_A(N)$ (Lemme 17.11).

Proposition 17.14 : Si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de modules de type fini sur un anneau noethérien A . On a

- (i) $dp_A(M) \leq \sup(dp_A(M'), dp_A(M''))$,
- (ii) $dp_A(M') \leq \sup(dp_A(M), dp_A(M'') - 1)$,
- (iii) $dp_A(M'') \leq \sup(dp_A(M), dp_A(M') + 1)$.

Si deux des modules sont libres, il est clair que le troisième est au plus de dimension projective 1. Sinon, on peut trouver des modules libres de type fini L' et L'' et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & K' & \rightarrow & K & \rightarrow & K'' \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & L' & \rightarrow & L' \oplus L'' & \rightarrow & L'' \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & M' & \rightarrow & M & \rightarrow & M'' \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

où les lignes et les colonnes sont exactes et organiser une récurrence.

Corollaire 17.15 : *Un facteur direct d'un module de type fini et de dimension projective r est de dimension projective $\leq r$.*

C'est une conséquence immédiate de la Proposition.

17.3 Dimension projective finie et profondeur.

Lemme 17.16 : *Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local (resp. A un anneau gradué), M un A -module (resp. gradué) de type fini et $x \in \mathcal{M}$ (resp. $x \in A^+$), un élément régulier (non diviseur de 0) dans A et dans M . Alors : $dp_A(M) = dp_{A/xA}(M/xM)$.*

Démonstration du cas local (celle du cas gradué est identique mais les notations sont plus lourdes) :

Montrons d'abord le Lemme dans le cas où $\min(dp_A(M), dp_{A/xA}(M/xM)) = 0$. Si M est un A -module libre, M/xM est libre sur A/xA .

Réciproquement, supposons que M/xM est un module libre sur A/xA . Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in M$ des éléments dont les classes $\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_l} \in M/xM$ forment une base de M/xM . D'après le Lemme de Nakayama, ils engendrent M . La multiplication par x induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & A^l & \rightarrow & M \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow x & & \downarrow x & & \downarrow x \\
 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & A^l & \rightarrow & M \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & A^l/xA^l & \simeq & M/xM \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

On en déduit $K = xK \subset \mathcal{M}K$, donc (Nakayama) $K = 0$ et M est un module libre sur A . La réciproque est évidente.

Montrons maintenant le Lemme par récurrence sur $\min(dp_A(M), dp_{A/xA}(M/xM))$:

Considérons une présentation de M et notons K le noyau. La multiplication par x donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & L & \rightarrow & M & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow x & & \downarrow x & & \downarrow x & & \\
 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & L & \rightarrow & M & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & K/xK & \rightarrow & L/xL & \rightarrow & M/xM & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Utilisant aussi le Lemme 17.13 , on a :

$$dp_A(M) = r \Leftrightarrow dp_A(K) = r - 1 \Leftrightarrow dp_{A/xA}(K/xK) = r - 1 \Leftrightarrow dp_{A/xA}(M/xM) = r.$$

Le Lemme est donc démontré.

Théorème 17.17 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local (resp. A un anneau gradué projetant) nothérien et M un A -module (resp. gradué) de type fini. Si M est de dimension projective finie, alors $dp_A(M) + prof_A(M) = prof_A(A)$.

De nouveau, nous ne donnons que la preuve du cas local, celle du cas gradué est essentiellement identique.

Lemme 17.18 : Si $\mathcal{M} \in Ass(A)$ et si L et F sont des A -modules libres de type fini tels que $L \subset \mathcal{M}F$, alors $L = (0)$.

Démonstration du Lemme : On sait qu'il existe $a \in A$ tel que $a \neq 0$ et $a\mathcal{M} = 0$. Ceci implique $aL = (0)$ et finalement $L = (0)$.

Démonstration du Théorème 17.17 par récurrence sur $prof_A(A)$:

Si $prof(A) = 0$, i.e. $\mathcal{M} \in Ass(A)$, toute résolution minimale est de longueur 0 d'après le Lemme 17.18. Donc un module de type fini et de dimension projective finie est libre.

Supposons maintenant que $prof_A(A) \geq 1$.

Si $prof_A(M) > 0$, il existe $a \in \mathcal{M}$ régulier dans A et dans M (Lemme d'évitement). D'après le Lemme 17.16, $dp_{A/aA}(M/aM) = dp_A(M)$. Comme $prof(M/aM) = prof(M) - 1$ et $prof(A/aA) = prof(A) - 1$, l'assertion est démontrée par récurrence.

Si $prof_A(M) = 0$, on considère une suite exacte $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$, où L est un A -module libre de type fini. On a $dp_A(M) = dp_A(K) + 1$. Comme $prof_A(K) = 1$ (Lemme 16.17), on a $dp_A(K) = prof(A) - 1$ et le Théorème est démontré.

Théorème 17.19 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local et \mathcal{I} un idéal de A , $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathcal{I} est engendré par une suite régulière.
- (ii) $dp_A(\mathcal{I})$ est finie et $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est un module libre sur A/\mathcal{I} .

Nous aurons besoin du Lemme préliminaire suivant.

Lemme 17.20 : Si \mathcal{I} est un idéal non nul de A tel que $dp_A(\mathcal{I})$ est finie, alors \mathcal{I} contient un élément A -régulier, c'est à dire que pour tout $\mathcal{P} \in \text{Ass}(A)$, on a $\mathcal{I} \not\subset \mathcal{P}$.

Supposons $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}$, avec $\mathcal{P} \in \text{Ass}(A)$, et cherchons une contradiction.

$\mathcal{I}A_{\mathcal{P}}$ est un $A_{\mathcal{P}}$ -module de dimension projective finie (Proposition 17.10).

Comme $\mathcal{I}A_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$, et comme $\mathcal{P}A_{\mathcal{P}} \in \text{Ass}(A_{\mathcal{P}})$ alors $\mathcal{I}A_{\mathcal{P}} = 0$ d'après le Lemme 17.18.

Montrons $\mathcal{I}A_{\mathcal{Q}} = 0$ pour tout $\mathcal{Q} \in \text{Ass}(A)$. Pour cela considérons une résolution libre de \mathcal{I} :

$$0 \rightarrow L_r \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow 0.$$

Comme $\mathcal{I}A_{\mathcal{P}} = 0$, la suite exacte :

$$0 \rightarrow (L_r)_{\mathcal{P}} \rightarrow \dots \rightarrow (L_0)_{\mathcal{P}} \rightarrow 0$$

montre que $\sum (-1)^i rg(L_i) = 0$. Considérons alors la résolution :

$$0 \rightarrow (L_r)_{\mathcal{Q}} \rightarrow \dots \rightarrow (L_0)_{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{I}A_{\mathcal{Q}} \rightarrow 0.$$

Comme $dp_{A_{\mathcal{Q}}}(\mathcal{I}A_{\mathcal{Q}}) \leq prof(A_{\mathcal{Q}}) = 0$, c'est un $A_{\mathcal{Q}}$ -module libre. On a alors

$$rg(\mathcal{I}A_{\mathcal{Q}}) = \sum (-1)^i rg(L_i) = 0,$$

donc $\mathcal{I}A_{\mathcal{Q}} = 0$ pour tout $\mathcal{Q} \in \text{Ass}(A)$.

Comme $\text{Ass}(\mathcal{I}) \subset \text{Ass}(A)$, ceci entraîne $\text{Ass}(\mathcal{I}) = \emptyset$, ce qui contredit $\mathcal{I} \neq 0$.

Démonstration du Théorème 17.19 par récurrence sur $prof(A)$:

Supposons d'abord que $\mathcal{I} = (x_1, \dots, x_l)$ où (x_1, \dots, x_l) est une suite régulière et montrons que $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est un A/\mathcal{I} -module libre et que $dp_A(\mathcal{I})$ est finie.

Soit $\bar{x}_i \in \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ la classe de x_i . Vérifions que $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l)$ est une base de $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$.

Supposons $\sum_{i=1}^l \bar{a}_i \bar{x}_i = 0$, où $\bar{a}_i \in A/\mathcal{I}$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l a_i x_i \in \mathcal{I}^2 &\implies \sum_{i=1}^l a_i x_i = \sum_{i=1}^l b_i x_i \quad \text{avec } b_i \in \mathcal{I} \\ \implies (a_l - b_l)x_l \in (x_1, \dots, x_{l-1}) &\implies (a_l - b_l) \in (x_1, \dots, x_{l-1}) \subset (x_1, \dots, x_l) \\ &\implies (a_l - b_l) \in \mathcal{I} \implies a_l \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

On montre de même par récurrence que $a_{l-1}, \dots, a_1 \in \mathcal{I}$. On a donc $\bar{a}_i = 0$, pour tout i .

Pour montrer que $dp_A(\mathcal{I})$ est finie, il suffit, d'après le Lemme 17.16, de montrer que $dp_{A/x_1A}(\mathcal{I}/x_1\mathcal{I})$ est finie. On a une suite exacte de A/x_1A -modules :

$$0 \rightarrow x_1A/x_1\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/x_1\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/x_1A \rightarrow 0$$

où $\mathcal{I}/x_1A = (\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_l)$. Raisonnons par récurrence sur l . Comme (x_2, \dots, x_l) est une suite A -régulière, $dp_{A/x_1A}(\mathcal{I}/x_1A)$ est finie. Comme $x_1A/x_1\mathcal{I} \simeq A/\mathcal{I} \simeq (A/x_1A)/(\mathcal{I}/x_1A)$, on en déduit que $dp_{A/x_1A}(A/\mathcal{I})$ est finie et donc que $dp_{A/x_1A}(\mathcal{I}/x_1\mathcal{I})$ est finie d'après la Proposition 17.14.

Montrons maintenant la réciproque.

On suppose que $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est un A/\mathcal{I} -module libre et que $dp_A(\mathcal{I})$ est finie.

Pour démontrer le résultat par récurrence sur $\text{prof}(A)$, il suffit de trouver un élément $x_1 \in \mathcal{I}$ régulier dans A , tel que $dp_{A/x_1A}(\mathcal{I}/x_1A)$ est finie et que $(\mathcal{I}/x_1A)/(\mathcal{I}/x_1A)^2$ est libre sur A/\mathcal{I} .

On sait que pour tout $\mathcal{P} \in \text{Ass}(A)$, on a $\mathcal{I} \not\subset \mathcal{P}$. D'autre part $\mathcal{I} \not\subset \mathcal{M}\mathcal{I}$ (Nakayama). D'après un Lemme d'évitement, il existe $x_1 \in \mathcal{I}, x_1 \notin \mathcal{P}$ pour tout $\mathcal{P} \in \text{Ass}(A)$ et $x_1 \notin \mathcal{M}\mathcal{I}$. Alors x_1 vérifie les conditions demandées.

En effet, comme $x_1 \notin \mathcal{M}\mathcal{I}$, il existe $x_2, \dots, x_r \in \mathcal{I}$ tels que les classe $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r \in \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ forment une base de $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$. Donc $(\mathcal{I}/x_1A)/(\mathcal{I}/x_1A)^2$ est libre sur A/\mathcal{I} .

Montrons enfin que $dp_{A/x_1A}(\mathcal{I}/x_1A)$ est finie. Comme on sait que $dp_{A/x_1A}(\mathcal{I}/x_1\mathcal{I})$ est finie, il suffit, d'après le Corollaire 17.15, de prouver que \mathcal{I}/x_1A est un facteur direct de $\mathcal{I}/x_1\mathcal{I}$.

Soit $\mathcal{J}(x_2, \dots, x_r)$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I}/x_1\mathcal{I} & & \rightarrow & \mathcal{I}/x_1A & \rightarrow & 0 \\ & & & \uparrow \phi & & \\ & & & \nearrow & & \\ \mathcal{J}/(\mathcal{J} \cap x_1\mathcal{I}) & & & & & \end{array}$$

Prouvons que ϕ est un isomorphisme. Comme il est évidemment surjectif, il suffit de montrer que $\mathcal{J} \cap x_1\mathcal{I} = \mathcal{J} \cap x_1A$. Mais $ax_1 \in \mathcal{J}$ est équivalent à $\bar{a}x_1 = \sum_{i=2}^r \bar{a}_i x_i$. Ceci entraîne $\bar{a} = 0$, c'est à dire $a \in \mathcal{I}$. Le Théorème est donc démontré.

Chapter 18

Anneaux locaux réguliers

18.1 Régularité.

Définition 18.1 : Soit (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien de dimension d . On dit que A est régulier si \mathcal{M} est engendré par d éléments, c'est à dire si $rg_{A/\mathcal{M}}(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2) = d$.

Théorème 18.2 : Soit (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien. Alors A est régulier si et seulement si l'anneau gradué associé $gr_{\mathcal{M}}A = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{M}^n/\mathcal{M}^{n+1}$ est un anneau de polynômes sur le corps A/\mathcal{M} .

Démonstration :

Soit $d = rg(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2)$. Considérons une surjection :

$$A/\mathcal{M}[X_1, \dots, X_d] \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{M}^n/\mathcal{M}^{n+1}).$$

Si cette application est un isomorphisme alors

$$rg(\mathcal{M}^n/\mathcal{M}^{n+1}) = rg(A/\mathcal{M}[X_1, \dots, X_d]_n) = \binom{n+d-1}{d-1}.$$

C'est un polynôme de degré $d-1$, donc A est de dimension d .

Si cette application n'est pas injective. Alors il existe $f \in A/\mathcal{M}[X_1, \dots, X_d]$, $f \neq 0$, homogène, d'image nulle dans $\bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{M}^n/\mathcal{M}^{n+1})$. On a alors une factorisation :

$$A/\mathcal{M}[X_1, \dots, X_d]/(f) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{M}^n/\mathcal{M}^{n+1}).$$

Or pour $n \gg 0$, $rg(A/\mathcal{M}[X_1, \dots, X_d]/(f))_n$ est un polynôme en n de degré $\leq d-2$, donc $rg(\mathcal{M}^n/\mathcal{M}^{n+1})$ est un polynôme de degré $\leq d-2$. La dimension de A est alors $\leq d-1$ et A n'est pas régulier.

Corollaire 18.3 : Un anneau local régulier est intègre.

Démonstration :

Rappelons que dans tout anneau local $\cap \mathcal{M}^n = (0)$, c'est le théorème de Krull. Soient alors $x, y \in A$ non nuls. Posons $n = \max\{i, x \in \mathcal{M}^i\}$ et $m = \max\{i, y \in \mathcal{M}^i\}$. Alors $\bar{x} \in \mathcal{M}^n/\mathcal{M}^{n+1}$ et $\bar{y} \in \mathcal{M}^m/\mathcal{M}^{m+1}$ sont deux éléments non nuls, et $\bar{x}\bar{y} \neq 0$ entraîne $xy \neq 0$. Le Corollaire est démontré.

Corollaire 18.4 : *Un anneau local de dimension 1 est régulier si et seulement si il est de valuation discrète.*

Ce résultat est immédiat si l'on rappelle qu'un anneau local intègre qui n'est pas un corps est principal si et seulement si son idéal maximal est principal (Lemme 10.5).

Proposition 18.5 : *Un anneau noethérien local est régulier si et seulement si l'idéal maximal est engendré par une suite régulière.*

Démonstration de la Proposition : Si A est régulier de dimension d et si $\mathcal{M} = (x_1, \dots, x_d)$, alors x_1 est régulier car A est intègre. De plus, comme $A/(x_1, \dots, x_i)$ est régulier, x_{i+1} est régulier dans $A/(x_1, \dots, x_i)$ qui est intègre.

Réciproquement, si $\mathcal{M} = (x_1, \dots, x_r)$, on a $r \geq \dim(A)$. Mais si (x_1, \dots, x_r) est une suite régulière, on a $r \leq \dim A$. L'énoncé est démontré.

Corollaire 18.6 : *Un anneau local régulier est de Cohen-Macaulay.*

Définition 18.7 : *Si A est un anneau régulier de dimension d et si x_1, \dots, x_d engendrent l'idéal maximal de A , on dit qu'ils forment un système régulier de paramètres de A .*

Attention, une suite A -régulière de longueur d est un système de paramètres de A , mais pas nécessairement un système régulier de paramètres de A (quelle maladresse, mais il est trop tard pour la répaper!).

Proposition 18.8 : *Soient A et B deux anneaux locaux, \mathcal{M} l'idéal maximal de A et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme local. Si $\dim B = \dim A + \dim B/f(\mathcal{M})B$ et si A et $B/f(\mathcal{M})B$ sont réguliers, alors B est régulier.*

18.2 Le Théorème des Syzygies local.

Théorème 18.9 : *Soit (A, \mathcal{M}) un anneau local noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) A est régulier.
- (2) Tout A -module de type fini est de dimension projective finie.
- (3) \mathcal{M} est de dimension projective finie.

Démonstration : Prouvons d'abord que (1) \Rightarrow (2) :

Supposons que A est un anneau régulier. Soit M un A -module de type fini. Montrons par récurrence sur $d = \dim(A)$ que $dp_A(M)$ est finie.

Si $d = 0$, A est un corps et M est un espace vectoriel.

Si $d > 0$, soit $x \in \mathcal{M}$ un élément tel que A/xA est régulier. Considérons une présentation : $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$. Alors x est régulier dans L , donc dans K . Comme A/xA est régulier, $dp_{A/xA}(K/xK)$ est finie. D'après le Lemme 17.16, $dp_A(K)$ est finie, donc $dp_A(M)$ aussi.

Comme (2) \Rightarrow (3) est évident, il reste à montrer (3) \Rightarrow (1).

Compte tenu de la Proposition 18.5, c'est une conséquence du Théorème 17.19.

Corollaire 18.10 : Soit R un anneau local régulier. Un R -module de type fini M est libre si et seulement si $\text{prof}(M) = \dim(R)$.

En effet M est de dimension projective finie et $dp_R(M) = \text{prof}(R) - \text{prof}(M)$. Mais comme R est de Cohen-Macaulay, on a $\text{prof}(R) = \dim(R)$, donc

$$dp_R(M) = 0 \iff \dim(R) = \text{prof}(M).$$

18.3 Conditions \mathcal{R}_i .

Théorème 18.11 : Soit \mathcal{P} un idéal premier d'un anneau local régulier A , alors $A_{\mathcal{P}}$ est régulier.

Démonstration du Théorème :

Soient M un $A_{\mathcal{P}}$ -module de type fini et $x_1, \dots, x_r \in M$ engendrant M comme $A_{\mathcal{P}}$ -module. M est aussi un A -module. Soit N le sous- A -module de M engendré par x_1, \dots, x_r . Alors N est un A -module de type fini vérifiant $M = N_{\mathcal{P}}$. Comme A est régulier, d'après le Théorème, $dp_A(N)$ est finie. On a une résolution libre finie :

$$0 \rightarrow L_k \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \rightarrow N \rightarrow 0$$

qui donne par localisation une résolution libre finie de M :

$$0 \rightarrow (L_k)_{\mathcal{P}} \rightarrow \dots \rightarrow (L_0)_{\mathcal{P}} \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Donc $dp_{A_{\mathcal{P}}}(M)$ est finie. D'après le Théorème, on en conclut que $A_{\mathcal{P}}$ est régulier.

Définition 18.12 : On dit qu'un anneau noethérien A vérifie la condition \mathcal{R}_i , ou est \mathcal{R}_i , si pour tout idéal premier \mathcal{P} de A tel que $\dim(A_{\mathcal{P}}) \leq i$ l'anneau local $A_{\mathcal{P}}$ est régulier.

Le Théorème 10.1 peut alors s'énoncer

Théorème 18.13 : Un anneau noethérien est réduit si et seulement si il est \mathcal{R}_0 et \mathcal{S}_1 .

Dans le même esprit, le Théorème 10.3 peut s'énoncer

Théorème 18.14 : Un anneau noethérien qui n'est pas le produit de deux anneaux est intégralement clos si et seulement si il est \mathcal{R}_1 et \mathcal{S}_2 .

En effet, supposons d'abord que l'anneau R est \mathcal{R}_1 et \mathcal{S}_2 . Soient $a \in R$ un élément non nul, et $\mathcal{P} \in \text{Ass}(R/aR)$. Alors $\mathcal{P}R_{\mathcal{P}} \in \text{Ass}(R_{\mathcal{P}}/aR_{\mathcal{P}})$, donc $\text{prof}(R_{\mathcal{P}}) = 1$. Comme R est \mathcal{S}_2 , on a $\dim(R_{\mathcal{P}}) = 1$. Comme R est \mathcal{R}_1 , l'anneau $R_{\mathcal{P}}$ est régulier de dimension 1, donc de valuation discrète. R est donc intégralement clos d'après le Théorème 10.3

Réciproquement, supposons que R est intégralement clos. Soit \mathcal{P} un idéal premier tel que $\text{prof}(R_{\mathcal{P}}) = 1$. Il existe $x = a/s \in R_{\mathcal{P}}$ tel que $\mathcal{P}R_{\mathcal{P}} \in \text{Ass}(R_{\mathcal{P}}/xR_{\mathcal{P}})$. Ceci implique $\mathcal{P} \in \text{Ass}(R/aR)$. Donc $R_{\mathcal{P}}$ est de valuation discrète (Théorème 10.3), donc régulier de dimension 1. On a montré que l'anneau R est \mathcal{R}_1 et \mathcal{S}_2 .

Corollaire 18.15 : Un anneau local régulier R est intégralement clos.

En effet, R est \mathcal{R}_i et \mathcal{S}_j pour tous (i, j) .

18.4 Factorialité des anneaux réguliers.

Théorème 18.16 : *Un anneau local régulier est factoriel.*

Démonstration par récurrence sur la dimension d de l'anneau R (d'idéal maximal \mathcal{M}) :

Si $d = 1$, alors l'idéal maximal \mathcal{M} est principal et R est un anneau principal (Lemme 10.5), donc factoriel.

Supposons que $d \geq 2$. Par hypothèse de récurrence $R_{\mathcal{P}}$ est factoriel pour tout idéal premier \mathcal{P} contenu strictement dans \mathcal{M} .

Rappelons qu'un anneau est factoriel si et seulement si tout idéal premier de hauteur 1 est principal (Théorème 10.23).

Soit \mathcal{Q} un idéal premier de hauteur 1. Soit $x \in \mathcal{M}$ tel que $x \notin \mathcal{M}^2$ et $x \notin \mathcal{Q}$ (Lemme d'évitement). Remarquons que R/xR est régulier, donc xR est premier.

Soit \mathcal{P} un idéal premier de R_x . D'après l'hypothèse de récurrence, $(\mathcal{Q}R_x)_{\mathcal{P}}$ est principal, donc $\mathcal{Q}R_x$ est un R_x -module localement libre et finalement projectif. Comme R est régulier, tout module de type fini est de dimension projective finie. Considérons une résolution de \mathcal{Q} par des R -modules libres de type fini :

$$0 \rightarrow L_s \rightarrow \dots \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0.$$

Elle induit une résolution libre finie de $\mathcal{Q}R_x$:

$$0 \rightarrow (L_s)_x \rightarrow \dots \rightarrow (L_1)_x \rightarrow (L_0)_x \rightarrow \mathcal{Q}R_x \rightarrow 0.$$

Lemme 18.17 : *Si un A -module projectif de type fini N admet une résolution finie P par des A -modules libres de type fini, il existe des A -modules libres de type fini F et G tels que $N \oplus F \simeq G$.*

Faisons une récurrence sur la longueur de la résolution, l'assertion étant évidente si elle est de longueur 0.

Considérons la suite exacte (définissant K) $0 \rightarrow K \rightarrow P_0 \rightarrow N \rightarrow 0$.

Comme N est projectif, on a $P_0 \simeq N \oplus K$. Par hypothèse de récurrence, il existe F' et G' tels que $K \oplus F' \simeq G'$, donc $N \oplus G' \simeq P_0 \oplus F'$. Le Lemme est démontré.

Fin de la démonstration du Théorème 18.16 :

Considérons un isomorphisme de R_x -modules $\mathcal{Q}R_x \oplus F \xrightarrow{\phi} G$, où F et G sont des R_x -modules libres de type fini.

Si $r = \text{rg}(F)$, on a $r + 1 = \text{rg}(G)$ et une application naturelle

$$\mathcal{Q}R_x \otimes \wedge^r F \xrightarrow{\phi'} \wedge^{r+1} G.$$

Comme $(\mathcal{Q}R_x)_{\mathcal{P}}$ est principal pour tout idéal premier \mathcal{P} de R_x , $\phi'_{\mathcal{P}}$ est un isomorphisme pour tout \mathcal{P} , donc ϕ' est un isomorphisme et $\mathcal{Q}R_x$ est principal. Il existe a , un élément de R , tel que $a \notin xR$ et que $aR_x = \mathcal{Q}R_x$. Montrons $aR = \mathcal{Q}$.

Soit $b \in \mathcal{Q}$. Comme $b \in \mathcal{Q}R_x$, on a $b = ay/x^s$, où $y \in R - xR$ et s est un entier positif. Donc $x^s b = ay$. Comme xR est un idéal premier tel que $a, y \notin xR$, ceci implique $s = 0$ et $b \in aR$. Le Théorème est démontré.

18.5 Régularité des anneaux géométriques.

Théorème 18.18 (Critère Jacobien) : Soient $R = \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ et $\mathcal{J} = (f_1, \dots, f_r)$ un idéal de l'anneau R .

Soient $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un point de \mathbf{C} tel que $f_i(\alpha) = 0$ pour tout i et $\mathcal{M} = (X_1 - \alpha_1, \dots, X_n - \alpha_n)$ l'idéal maximal de R , contenant \mathcal{J} , correspondant.

(i) Le rang de la matrice $(df_i/dX_j(\alpha))$ est $\leq n - \dim(R_{\mathcal{M}}/\mathcal{J}R_{\mathcal{M}})$.

(ii) Le rang de la matrice $(df_i/dX_j(\alpha))$ est $n - \dim(R_{\mathcal{M}}/\mathcal{J}R_{\mathcal{M}})$ si et seulement si l'anneau local $R_{\mathcal{M}}/\mathcal{J}R_{\mathcal{M}}$ est régulier.

Démonstration :

Considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n] & \rightarrow & \mathbf{C}^n \\ g & \mapsto & (dg/dX_1(\alpha), \dots, dg/dX_n(\alpha)) \end{array}$$

Elle induit un isomorphisme $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2 \simeq \mathbf{C}^n$. En effet, $(X_i - \alpha_i)$ a pour image $(0, \dots, 1, 0, \dots)$ dans \mathbf{C}^n et \mathcal{M} a donc pour image \mathbf{C}^n . D'autre part, \mathcal{M}^2 est clairement dans le noyau de cette application et $\text{rg}(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2) = n$, d'où l'isomorphisme annoncé. On en déduit

$$\text{rg}(df_i/dX_j(\alpha)) = \text{rg}(\mathcal{J} + \mathcal{M}^2/\mathcal{M}^2).$$

Considérons la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{J} + \mathcal{M}^2/\mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{M}^2 \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{J} + \mathcal{M}^2 \rightarrow 0.$$

On a alors $\text{rg}(df_i/dX_j(\alpha)) = n - \text{rg}(\mathcal{M}/\mathcal{J} + \mathcal{M}^2)$.

Il reste à remarquer que si \mathcal{N} est l'idéal maximal de $R_{\mathcal{M}}/\mathcal{J}R_{\mathcal{M}}$, on a

$$\mathcal{N}/\mathcal{N}^2 = \mathcal{M}/\mathcal{J} + \mathcal{M}^2.$$

On sait que $\text{rg}(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2) \geq \dim(R_{\mathcal{M}}/\mathcal{J}R_{\mathcal{M}})$, l'égalité ayant lieu si et seulement si cet anneau est régulier. Le théorème est démontré.

Proposition 18.19 : Soit $A = \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_r)$ une \mathbf{C} -algèbre intègre de type fini de dimension d .

(i) Il existe un idéal maximal \mathcal{N} de A tel que $A_{\mathcal{N}}$ est un anneau régulier.

(ii) Si \mathcal{I} est l'idéal de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ engendré par les $(n - d)$ -mineurs de la matrice jacobienne (df_i/dX_j) , alors $\mathcal{I}A \neq (0)$.

Démonstration de la Proposition :

Remarquons d'abord que si \mathcal{N} est un idéal maximal de A tel que $A_{\mathcal{N}}$ est un anneau régulier, alors $\mathcal{I}A \not\subset \mathcal{N}$. Donc il suffit de prouver (i).

Si $A = \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]/(f)$, où $f \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme irréductible, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $df/dX_i \neq 0$. Dans ce cas $df/dX_i \notin (f)$.

Sinon, on sait, d'après le Lemme de normalisation, qu'il existe des éléments y_1, \dots, y_r de A , algébriquement indépendants sur \mathbf{C} , tels que A est entier sur $\mathbf{C}[y_1, \dots, y_r]$.

Le corps des fractions K de A est algébrique sur $\mathbf{C}(y_1, \dots, y_r)$. D'après le théorème de l'élément primitif, il existe $z \in K$ tel que $K = \mathbf{C}(y_1, \dots, y_r, z)$. Notons $z = a/b$, avec $a \in A$ et $b \in \mathbf{C}[y_1, \dots, y_r]$, et $B = \mathbf{C}[y_1, \dots, y_r, a]$.

Considérons les extensions entières

$$\mathbf{C}[y_1, \dots, y_r] \subset B \subset A.$$

Il existe $f \in \mathbf{C}[y_1, \dots, y_r, Z]$ tel que $B \simeq \mathbf{C}[y_1, \dots, y_r, Z]/(f)$. Donc il existe un ouvert non vide U' de $\text{Spec}B$ tel que si \mathcal{M} est un idéal maximal de B l'anneau local $B_{\mathcal{M}}$ est régulier si et seulement si $\mathcal{M} \in U'$.

A est un B -module de type fini contenu dans le corps des fractions de B . Si (y_1, \dots, y_r) est un système de générateurs de ce B -module, il existe $a_i, s_i \in B$ tels que $y_i = a_i/s_i$. Si $s = \prod_1^r s_i$, on a $B_s = A_s$.

Soit \mathcal{M} un idéal maximal de B tel que

$$s \notin \mathcal{M} \quad \text{et} \quad (df/dX_i, df/dZ) \notin \mathcal{M}.$$

Soit \mathcal{N} un idéal maximal de A tel que $\mathcal{N} \cap B = \mathcal{M}$. On a $B_{\mathcal{M}} = (B_s)_{\mathcal{M}B_s} = A_{\mathcal{N}}$, donc $A_{\mathcal{N}}$ est un anneau local régulier. Autrement dit $\mathcal{N} \in \text{Spec}A - V(\mathcal{I}A)$, et cet ouvert est non vide.

Théorème 18.20 : Soient $A = \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_r)$ une \mathbf{C} -algèbre de type fini équidimensionnelle de dimension d (i.e. telle que pour tout idéal premier minimal \mathcal{P} de A on a $\dim A/\mathcal{P} = d$) et \mathcal{I} l'idéal de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ engendré par les $(n-d)$ -mineurs de la matrice jacobienne (df_i/dX_j) .

Si \mathcal{P} est un idéal premier de A , l'anneau local $A_{\mathcal{P}}$ est régulier si et seulement si $\mathcal{I}A \not\subset \mathcal{P}$.

Démonstration du Théorème :

Soient $\mathcal{M} = (X_1 - \alpha_1, \dots, X_n - \alpha_n)$ un idéal maximal de l'anneau de polynômes contenant (f_1, \dots, f_r) et $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/(f_1, \dots, f_r)$ l'idéal maximal de A correspondant.

Notons $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. D'après le théorème, $A_{\overline{\mathcal{M}}}$ est régulier si et seulement si la matrice complexe $(df_i/dX_j(\alpha))$ est de rang $n-d$, c'est à dire s'il existe un $(n-d)$ -mineur de (df_i/dX_j) qui n'est pas dans \mathcal{M} . Donc $A_{\overline{\mathcal{M}}}$ est régulier si et seulement si $\mathcal{I}A \not\subset \mathcal{M}$.

Soit \mathcal{P} un idéal premier de A . Rappelons que \mathcal{P} est l'intersection des idéaux maximaux de A qui le contiennent (A est un anneau de Jacobson). Donc si $\mathcal{I} \not\subset \mathcal{P}$, il existe un idéal maximal \mathcal{M} de A tel que $\mathcal{I} \not\subset \mathcal{M}$. Il en résulte que $A_{\mathcal{M}}$ est régulier donc que son localisé $A_{\mathcal{P}}$ l'est aussi (Théorème 18.11).

Il nous reste à montrer que si \mathcal{P} est un idéal premier de A tel que $A_{\mathcal{P}}$ est régulier alors $\mathcal{I} \not\subset \mathcal{P}$. Nous savons que c'est le cas si \mathcal{P} est maximal. Comme A est de Jacobson, \mathcal{P} est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent. Donc il suffit de prouver qu'il existe un idéal maximal \mathcal{M} de A , contenant \mathcal{P} , et tel que $A_{\mathcal{M}}$ est régulier.

Soit $l = \dim(A_{\mathcal{P}})$. Il existe $x_1, \dots, x_l \in \mathcal{P}$ tels que $(x_1, \dots, x_l)A_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$. Autrement dit $(\mathcal{P}/(x_1, \dots, x_l))_{\mathcal{P}} = 0$. Comme $\mathcal{P}/(x_1, \dots, x_l)$ est un A -module de type fini, il existe $s \notin \mathcal{P}$ tel que $(\mathcal{P}/(x_1, \dots, x_l))_s = 0$, donc $(x_1, \dots, x_l)A_s = \mathcal{P}A_s$.

Considérons alors $C = A_s/(x_1, \dots, x_l)A_s = A_s\mathcal{P}A_s$. C'est une \mathbf{C} -algèbre intègre de type fini de dimension $d-l$. Donc, d'après la Proposition 18.19, il existe un idéal maximal \mathcal{N} de C tel que l'anneau local $C_{\mathcal{N}}$ est régulier de dimension $d-l$. Soit \mathcal{M} l'idéal maximal de A tel $\mathcal{M}A_s/(x_1, \dots, x_l)A_s = \mathcal{N}$.

Comme $A_{\mathcal{M}}/(x_1, \dots, x_l)A_{\mathcal{M}} = C_{\mathcal{N}}$ est régulier de dimension $d-l$, il existe $x_{l+1}, \dots, x_d \in \mathcal{M}$ tels que $\mathcal{M}A_{\mathcal{M}} = (x_1, \dots, x_d)A_{\mathcal{M}}$, donc $A_{\mathcal{M}}$ est régulier et le Théorème est démontré.

Corollaire 18.21 : Soit $A = \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_r)$ une \mathbf{C} -algèbre de type fini équidimensionnelle de dimension d (i.e. telle que pour tout idéal premier minimal \mathcal{P} de A on a $\dim A/\mathcal{P} = d$)

(i) L'ensemble des idéaux premiers \mathcal{P} de A , tel que l'anneau local $A_{\mathcal{P}}$ est régulier est un ouvert de $\text{Spec}A$.

(ii) Si A est réduit cet ouvert est dense dans $\text{Spec}A$.

(i) est une traduction de l'énoncé précédent.

(ii) Si A est réduit et si \mathcal{P} est un idéal premier minimal de A , l'anneau local $A_{\mathcal{P}}$ est régulier (Théorèmes 10.1 et 18.13). Donc l'ouvert U décrit dans (i) contient tous les idéaux premiers minimaux de A . Comme tout ouvert non vide de $\text{Spec}A$ contient un idéal premier minimal, il en résulte que U est dense dans $\text{Spec}A$.

18.6 Exemple

Soient $R = \mathbf{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ et la matrice $M = \begin{pmatrix} X_0 & X_1 \\ X_1 & X_2 \\ X_2 & X_3 \end{pmatrix}$ à coefficients dans R . Notons $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ les cofacteurs de cette matrice et $A = R/(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2)$. Alors A est intégralement clos.

Remarquons d'abord que la difficulté essentielle est de prouver que A est \mathcal{S}_1 . En effet on démontre facilement l'existence d'un homomorphisme surjectif : $A \xrightarrow{\phi} \mathbf{C}[t^3, t^2u, tu^2, u^3]$ factorisant l'homomorphisme : $R \xrightarrow{\Phi} \mathbf{C}[t, u]$ défini par $\Phi(X_i) = t^{3-i}u^i$. De plus on peut montrer presque aussi facilement que $\ker \phi$ est un A -module de longueur finie à support concentré en $\mathcal{M}_0 = (X_0, \dots, X_3)$. Néanmoins nous démontrerons plutôt que A est \mathcal{R}_1 et \mathcal{S}_2 pour appliquer nos résultats.

Il est clair que le produit de matrices $(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2)M$ est nul. On a donc un complexe :

$$(K.) \quad 0 \rightarrow 2R \xrightarrow{M} 3R \xrightarrow{(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2)} R$$

Si \mathcal{P} est un idéal premier de R tel que $(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2) \not\subset \mathcal{P}$, remarquons que le complexe suivant est une suite exacte :

$$0 \rightarrow 2R_{\mathcal{P}} \xrightarrow{M} 3R_{\mathcal{P}} \xrightarrow{(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2)} R_{\mathcal{P}} \rightarrow 0.$$

En effet, comme la flèche de droite est évidemment surjective son noyau K est un $R_{\mathcal{P}}$ -module libre de rang 2 à travers lequel la flèche de gauche se factorise. Les mineurs de la matrice M sont alors multiples du déterminant de l'application induite $2R_{\mathcal{P}} \rightarrow K$. Ce déterminant est donc inversible et cette application est un isomorphisme, ce qui démontre l'exactitude du complexe.

Comme, par exemple, (Δ_0, Δ_1) est une suite régulière dans R , on en déduit en appliquant le Théorème 16.27 que $(K.)$ est une résolution libre de A .

Montons que l'anneau A est localement de Cohen-Macaulay et a fortiori \mathcal{S}_2 .

Il est clair que si $A_{\mathcal{P}} \neq 0$, on a $\dim(A_{\mathcal{P}}) \leq \dim(R_{\mathcal{P}}) - 2$ (car (Δ_i, Δ_j) est une suite régulière). D'autre part, on sait que $\text{prof}(A_{\mathcal{P}}) + dp(A_{\mathcal{P}}) = \text{prof}(R_{\mathcal{P}}) = \dim(R_{\mathcal{P}})$. Mais la résolution de A montre que $dp(A_{\mathcal{P}}) \leq 2$, donc $\text{prof}(A_{\mathcal{P}}) \geq \dim(R_{\mathcal{P}}) - 2$ et finalement $\text{prof}(A_{\mathcal{P}}) = \dim(A_{\mathcal{P}})$.

Pour prouver que A est \mathcal{R}_1 considérons la matrice jacobienne :

$$(d\Delta_i/dX_j) = \begin{pmatrix} 0 & X_3 & -2X_2 & X_1 \\ -X_3 & X_2 & X_1 & -X_0 \\ X_2 & -2X_1 & X_0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'idéal engendré par ses 2-mineurs contient X_i^2 pour $i = 0, \dots, 3$. Donc $A_{\mathcal{P}}$ est régulier pour tout idéal premier \mathcal{P} du support de A différent de $\mathcal{M}_0 = (X_0, \dots, X_3)$. Comme $\dim(A_{\mathcal{M}_0}) = 2$, on en déduit que $\dim(A_{\mathcal{P}}) = 1$ entraîne la régularité de $A_{\mathcal{P}}$. L'anneau A est donc \mathcal{R}_1 .

Chapter 19

Complexes. Suites spectrales d'un complexe double.

19.1 Complexes.

Nous avons déjà utilisé la notion de complexe de A -modules. Précisons nos notations pour la suite de ce texte.

Définition 19.1 :

(i) Un complexe (à dérivation croissante) (E^*, d^*) de A -modules est la donnée pour tout entier i d'homomorphismes de A -modules $d^i : E^i \rightarrow E^{i+1}$ tels que $d^i o d^{i-1} = 0$.

(ii) Un complexe (à dérivation décroissante) (E_*, d_*) de A -modules est la donnée pour tout entier i d'homomorphismes de A -modules $d_i : E_i \rightarrow E_{i-1}$ tels que $d_i o d_{i+1} = 0$, pour tout i .

d est la dérivation du complexe.

Le complexe (E^*, d^*) (resp. (E_*, d_*)) est positif si $E^i = 0$ (resp. $E_i = 0$) pour $i < 0$.

Remarque : Posant $E_i = E^{-i}$ et $d_i = d^i$, on associe à tout complexe croissant un complexe décroissant, et réciproquement. On pourrait donc choisir définitivement une variance. Restons fidèle aux notations traditionnelles.

Définition 19.2 : Les A -modules $H^i(E^*) = Ker(d^i)/im(d^{i-1})$ (resp. $H_i(E_*) = Ker(d_i)/im(d_{i+1})$) sont les modules d'homologie du complexe (E^*, d^*) (resp. (E_*, d_*)).

Un complexe est exact si son homologie est nulle.

Un complexe exact est scindé si $Ker(d^i)$ (resp. $Ker(d_i)$) est un facteur directe de E_i pour tout i .

Pour éviter des répétitions fastidieuses, nous énoncerons les généralités sur les complexes dans le cas croissant ou dans le cas décroissant suivant notre humeur. Le Lecteur adaptera lui même chaque assertion à l'autre cas, le moment venu.

Définition 19.3 :

(i) Un morphisme de complexes $(K_*, \delta_*) \rightarrow (E_*, d_*)$ est la donnée pour tout i d'homomorphismes $f_i : K_i \rightarrow E_i$ tels que $d_i o f_i = f_{i-1} o \delta_i$.

(ii) Une suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow (K'_*, d'_*) \rightarrow (K_*, d_*) \rightarrow (K'', d'') \rightarrow 0$$

est la donnée, pour tout i , de suites exactes

$$0 \rightarrow K'_i \xrightarrow{f_i} K_i \xrightarrow{g_i} K''_i \rightarrow 0$$

telles que les applications f_i et g_i commutent avec les dérivations des complexes.

Une chasse élémentaire dans un diagramme démontre l'énoncé suivant.

Lemme 19.4 :

(i) Un morphisme de complexes $(K_*, \delta_*) \rightarrow (E_*, d_*)$ induit pour tout i un homomorphisme de A -modules $H_i(K_*) \rightarrow H_i(E_*)$.

(ii) Une suite exacte de complexes induit une suite exacte (infinie)

$$\dots \rightarrow H_{i+1}(K) \rightarrow H_{i+1}(K'') \xrightarrow{h_{i+1}} H_i(K') \rightarrow H_i(K) \rightarrow H_i(K'') \rightarrow \dots$$

Les homomorphismes $h_{i+1} : H_{i+1}(K'') \rightarrow H_i(K')$ sont appelés homomorphismes de connection.

Définition 19.5 : Un complexe double (doublement croissant) $(E^{*,*}, d^*, \delta^*)$ de A -modules est la donnée pour tout p d'un complexe $(E^{p,*}, d^{p,*})$ et pour tout q d'un complexe $(E^{*,q}, \delta^{*,q})$, tels que les dérivations d et δ commutent.

Le double complexe est positif si $E^{p,q} = 0$ pour $p < 0$ ou $q < 0$.

Le complexe total associé au double complexe est le complexe (E^*, D^*) , où $E^n = \bigoplus_{p+q=n} E^{p,q}$ et $D_{/E^{p,q}} = (-1)^p d^{p,q} + \delta^{p,q}$.

Il faut bien sûr vérifier que $D \circ D = 0$. Cela se déduit de $d \circ \delta = \delta \circ d$ (attention, ne pas oublier le $(-1)^p$ dans $D_{/E^{p,q}} = (-1)^p d^{p,q} + \delta^{p,q}$).

Remarque : Un complexe double doublement décroissant sera noté $(E_{*,*}, d_*, \delta_*)$. On évitera les complexes croissants dans un indice et décroissants dans l'autre par l'artifice expliqué dans la remarque précédente.

19.2 Suites spectrales d'un double complexe positif (ou négatif)

Commençons par étudier un exemple simple, celui d'un double complexe positif $(E^{*,*}, d^*, \delta^*)$ tel que $E^{p,q} = 0$ pour $q > 1$ ou $p > 2$. Notre complexe apparaît entièrement dans le tableau

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 0 & \xrightarrow{\delta} & E^{0,1} & \xrightarrow{\delta} & E^{1,1} & \xrightarrow{\delta} & E^{2,1} & \xrightarrow{\delta} & 0 \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 0 & \xrightarrow{\delta} & E^{0,0} & \xrightarrow{\delta} & E^{1,0} & \xrightarrow{\delta} & E^{2,0} & \xrightarrow{\delta} & 0 \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & .
 \end{array}$$

Posons alors

$$E_1^{p,q} = H^p(E^{*,q}) = \text{Ker}(\delta^{p,q}) / \text{Im}(\delta^{p-1,q}),$$

pour tout (p, q) . La relation $d\delta = \delta d$ induit pour tout (p, q) des homomorphismes

$$\delta_1^{p,q} : E_1^{p,q} \rightarrow E_1^{p,q+1} \quad \text{avec} \quad \delta_1^{p,q} \circ \delta_1^{p,q-1} = 0.$$

On pose

$$E_2^{p,q} = \text{Ker}(\delta_1^{p,q}) / \text{Im}(\delta_1^{p,q-1}).$$

Le complexe total (E^*) associé au double complexe s'écrit

$$0 \rightarrow E^{0,0} \begin{pmatrix} d \\ \delta \end{pmatrix} \rightarrow E^{0,1} \oplus E^{1,0} \begin{pmatrix} \delta & -d \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \rightarrow E^{1,1} \oplus E^{2,0} \begin{pmatrix} \delta & d \end{pmatrix} \rightarrow E^{2,1} \rightarrow 0.$$

Il s'inscrit naturellement dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ 0 & \xrightarrow{\delta} & E^{0,0} & \xrightarrow{\delta} & E^{1,0} & \xrightarrow{\delta} & E^{2,0} & \xrightarrow{\delta} & 0 & & \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & E^{0,0} & \begin{pmatrix} d \\ \delta \end{pmatrix} \rightarrow & E^{0,1} \oplus E^{1,0} & \begin{pmatrix} \delta & -d \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \rightarrow & E^{1,1} \oplus E^{2,0} & \begin{pmatrix} \delta & d \end{pmatrix} \rightarrow & E^{2,1} & \rightarrow & 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \\ & & 0 & \xrightarrow{\delta} & E^{0,1} & \xrightarrow{\delta} & E^{1,1} & \xrightarrow{\delta} & E^{2,1} & \xrightarrow{\delta} & 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

dont les colonnes sont évidemment exactes. La suite exacte (verticale) de complexes, ainsi définie, induit une longue suite exacte d'homologie

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(E^*) \rightarrow H^0(E^{*,0}) \rightarrow H^0(E^{*,1}) \rightarrow H^1(E^*) \rightarrow H^1(E^{*,0}) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(E^{*,1}) \rightarrow H^2(E^*) \rightarrow H^2(E^{*,0}) \rightarrow H^2(E^{*,1}) \rightarrow H^3(E^*) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On vérifie qu'on retrouve bien les homomorphismes $\delta_1^{p,q}$ qu'on a introduits plus haut. Notre longue suite exacte peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(E^*) \longrightarrow E_1^{0,0} \xrightarrow{\delta_1^{0,0}} E_1^{0,1} \longrightarrow H^1(E^*) \longrightarrow E_1^{1,0} \longrightarrow \\ \xrightarrow{\delta_1^{1,0}} E_1^{1,1} \longrightarrow H^2(E^*) \longrightarrow E_1^{2,0} \xrightarrow{\delta_1^{2,0}} E_1^{2,1} \longrightarrow H^3(E^*) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On a donc construit des isomorphismes naturels

$$H^0(E^*) \simeq E_2'^{0,0} \quad \text{et} \quad E_2'^{2,1} \simeq H^3(E^*),$$

et des filtrations naturelles

$$0 \rightarrow E_2'^{0,1} \rightarrow H^1(E^*) \rightarrow E_2'^{1,0} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow E_2'^{1,1} \rightarrow H^1(E^*) \rightarrow E_2'^{2,0} \rightarrow 0.$$

Les avantages de cette construction sont multiples. Donnons deux exemples d'applications :

- (i) Si le complexe $E^{*,1}$ est exact, alors $H^p(E^*) = E_2'^{p,0} = E_1'^{p,0} = H^p(E^{*,0})$.
- (ii) Si le complexe $E^{*,0}$ est exact, alors $H^p(E^*) = E_2'^{p-1,1} = E_1'^{p-1,1} = H^{p-1}(E^{*,1})$.

On n'a pas décrit l'homologie du complexe total, mais le gradué associé à une filtration de cette homologie.

Cette description procède des complexes $E^{*,q}$, et plus particulièrement de leurs modules d'homologie

$$E_1'^{p,q} = H^p(E^{*,q}) = \text{Ker}(\delta^{p,q}) / \text{Im}(\delta^{p-1,q})$$

Nous avons étudié la "deuxième suite spectrale", $(E_r'^{p,q}, \delta_r^{p,q})$, du double complexe. Nous n'avons pas eu à introduire ici la partie $(E_i'^{p,q}, \delta_i^{p,q})$, avec $i > 2$ de la suite spectrale. Nous verrons plus loin que dans la situation étudiée, on a $E_i'^{p,q} = E_2'^{p,q}$ et $\delta_i^{p,q} = 0$ pour $i \geq 2$, car $E^{p,q} = 0$ pour $p \notin [0, 2]$ et $q \notin [0, 1]$.

La première suite spectrale $(E_i^{p,q}, d_i^{p,q})$ est construite de manière similaire à partir des modules d'homologie

$$E_1^{p,q} = H^q(E^{p,*}) = \text{Ker}(d^{p,q}) / \text{Im}(d^{p,q-1})$$

des complexes $E^{p,*}$.

Revenons au cas général. Soient donc $(E^{*,*})$ un double complexe positif et d et δ ses dérivations. Posons

$$E_0^{p,q} = E^{p,q} \quad , \quad d_0 = d \quad \text{et} \quad \delta_0 = \delta.$$

Remarquons alors que

d_0 est une dérivation de bidegré $(0, -0 + 1)$, et que

δ_0 est une dérivation de bidegré $(-0 + 1, 0)$.

Nous allons construire $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$, la première suite spectrale du double complexe:

C'est la donnée pour tout $r, p, q \geq 0$ d'applications

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$$

telles que $d_r^{p,q} \circ d_r^{p-r, q+r-1} = 0$ et que $E_{r+1}^{p,q} = \text{Ker}(d_r^{p,q}) / \text{Im}(d_r^{p-r, q+r-1})$.

Pour cela, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 E^{p-2,q+1} & \xrightarrow{\delta} & E^{p-1,q+1} & \xrightarrow{\delta} & E^{p,q+1} & \xrightarrow{\delta} & \cdot & \rightarrow & \cdot & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \cdot \\
 \uparrow & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
 \cdot & \xrightarrow{\delta} & E^{p-1,q} & \xrightarrow{\delta} & E^{p,q} & \xrightarrow{\delta} & E^{p+1,q} & \xrightarrow{\delta} & \cdot & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \cdot \\
 \uparrow & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow & & & & \uparrow \\
 \cdot & \rightarrow & E^{p-1,q-1} & \xrightarrow{\delta} & E^{p,q-1} & \xrightarrow{\delta} & E^{p+1,q-1} & \xrightarrow{\delta} & E^{p+2,q-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \cdot \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow d & & & & \uparrow \\
 \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & E^{p+2,q-2} & & & & \cdot \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
 \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\
 \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\
 \cdot & \rightarrow & \cdot & \xrightarrow{\delta} & E^{p,q-r+1} & \xrightarrow{\delta} & E^{p+1,q-r+1} & \xrightarrow{\delta} & \cdot & \rightarrow & \dots & \xrightarrow{\delta} & E^{p+r,q-r+1}.
 \end{array}$$

Il nous permet de définir une filtration décroissante sur $E^{p,q}$. Soient

$$F^1 E^{p,q} = E^{p,q} \quad , \quad F^2 E^{p,q} = \delta^{-1}(d(E^{p+1,q-1})) \quad ,$$

$$F^3 E^{p,q} = \delta^{-1}(d(F^2 E^{p+1,q-1})) = \delta^{-1}(d(\delta^{-1}(d(E^{p+2,q-2})))) \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned}
 F^r E^{p,q} &= \delta^{-1}(d(F^{r-1} E^{p+1,q-1})) = \delta^{-1}(d(\delta^{-1}(d(F^{r-2} E^{p+2,q-2}))) = \dots \\
 &= \delta^{-1}(d(\delta^{-1}(d(\dots(\delta^{-1}(d(E^{p+r-1,q-r+1})))\dots))).
 \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$x_0 \in F^r E^{p,q} \iff \forall i \in [1, r-1], \quad \exists x_i \in E^{p+i,q-i}, \quad \text{avec} \quad d(x_i) = \delta(x_{i-1}).$$

Comme $E^{p+r-1,q-r+1} = 0$ pour $r > q+1$, on a $F^r E^{p,q} = F^{r+1} E^{p,q}$ pour $r > q+1$.

Soient maintenant

$$Z_1^{p,q} = \text{Ker}(d^{p,q}) \quad , \quad B_1^{p,q} = d^{p,q-1}(E^{p,q-1}) \quad \text{et} \quad E_1^{p,q} = Z_1^{p,q}/B_1^{p,q}.$$

La filtration introduite induit une filtration de $Z_1^{p,q}$:

$$Z_r^{p,q} = F^r E^{p,q} \cap Z_1^{p,q}.$$

Donc,

$$x_0 \in Z_r^{p,q} \iff d(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [1, r-1], \quad \exists x_i \in E^{p+i,q-i}, \quad \text{avec} \quad d(x_i) = \delta(x_{i-1}).$$

On a bien sûr $Z_r^{p,q} = Z_{r+1}^{p,q}$ pour $r > q + 1$.

On remarque que $B_1^{p,q} \subset Z_r^{p,q}$ pour tout r .

On pose ensuite

$$B_2^{p,q} = \delta(Z_1^{p-1,q}) + B_1^{p,q},$$

$$B_3^{p,q} = \delta(d^{-1}(\delta(Z_2^{p-2,q+1}))) + B_1^{p,q} \quad \text{et}$$

$$B_r^{p,q} = \delta(d^{-1}(\delta(d^{-1}(\dots(d(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2})))))) + B_1^{p,q}.$$

Donc,

$$x_0 \in B_r^{p,q} \iff \forall i \in [1, r-1], \quad \exists x_i \in E^{p-i,q+i-1},$$

$$\text{avec } d(x_i) = \delta(x_{i+1}) \quad \forall i \in [1, r-2], \quad d(x_{r-1}) = 0 \quad \text{et} \quad \delta(x_1) - x_0 \in B_1^{p,q}.$$

Comme $Z_r^{p,q} \subset d^{-1}(\delta(Z_{r-1}^{p-1,q+1}))$, on a $B_{r-1}^{p,q} \subset B_r^{p,q}$.

Enfin si $r > p$, on a $E^{p-r,q+r-1} = 0$, donc $Z_r^{p-r,q+r-1} = 0$ et $B_{r+1}^{p,q} = B_r^{p,q}$.

En résumé, on a

$$B_1^{p,q} \subset B_2^{p,q} \subset \dots \subset B_{p+1}^{p,q} = B_{p+n}^{p,q} \subset Z_{q+m}^{p,q} = Z_{q+1}^{p,q} \subset \dots \subset Z_2^{p,q} \subset Z_1^{p,q}.$$

Posons $E_r^{p,q} = Z_r^{p,q}/B_r^{p,q}$. Remarquons qu'il existe $r_0(p,q)$ tel que $E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q}$ pour $r \geq r_0(p,q)$. Posons $E_\infty^{p,q} = E_r^{p,q}$ pour $r \geq r_0(p,q)$.

Construisons les applications

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$$

telles que

$$d_r^{p,q} \circ d_r^{p-r,q+r-1} = 0 \quad , \quad Z_{r+1}^{p,q}/B_r^{p,q} = \text{Ker}(d_r^{p,q}) \quad \text{et} \quad B_{r+1}^{p,q}/B_r^{p,q} = d_r^{p-r,q+r-1}(E_r^{p-r,q+r-1}).$$

Soit $x_0 \in Z_r^{p,q}$. Par définition de $Z_r^{p,q}$, il existe, pour $0 < i \leq r-1$,

$$x_i \in E^{p+i,q-i} \quad \text{avec} \quad d(x_i) = \delta(x_{i-1}).$$

On a $\delta(x_{r-1}) \in B_{r+1}^{p+r,q-r+1}$ par définition de $B_{r+1}^{p+r,q-r+1}$.

Montrons que la classe de

$$(-1)^{r-1} \delta((x_{r-1})) \in E_r^{p+r,q-r+1} = Z_r^{p+r,q-r+1}/B_r^{p+r,q-r+1}$$

ne dépend que de x_0 .

Soient

$$y_i \in E^{p+i, q-i} \quad \text{avec} \quad d(y_i) = \delta(y_{i-1}) \quad \text{pour} \quad 1 < i \leq r-1 \quad \text{et} \quad d(y_1) = \delta(x_0).$$

On a alors

$$d(x_1 - y_1) = 0, \quad \text{donc} \quad x_1 - y_1 \in Z_{r_1}^{p+1, q-1} \quad \text{et} \quad \delta(x_{r-1} - y_{r-1}) \in B_r^{p+r, q-r+1}.$$

On peut donc définir $d_r^{p,q}(x_0) \in E_r^{p+r, q-r+1}$ comme la classe de $(-1)^{r-1} \delta(x_{r-1}) \in E_r^{p+r, q-r+1}$.

Il est clair, par définition de $B_{r+1}^{p+r, q-r+1}$, que

$$d_r^{p,q}(E_r^{p,q}) = B_{r+1}^{p+r, q-r+1} / B_r^{p+r, q-r+1}.$$

Il reste à prouver

$$\text{Ker}(d_r^{p,q}) = Z_{r+1}^{p,q} / B_r^{p,q}.$$

Supposons $\delta(x_{r-1}) \in B_r^{p+r, q-r+1}$.

Alors

$$\begin{aligned} \forall i \in [1, r-1], \quad \exists y_i \in E^{p-i, q+i-1}, \quad \text{avec} \quad d(y_i) = \delta(y_{i+1}) \quad \forall i \in [1, r-2], \quad d(y_{r-1}) = 0 \\ \text{et} \quad \delta(y_1 - x_{r-1}) \in B_1^{p+r, q-r+1}. \end{aligned}$$

Comme

$$d(y_{r-i} + x_i) = \delta(y_{r-i+1} + x_{i-1}), \quad \text{pour} \quad i > 1 \quad \text{et} \quad d(y_{r-1} + x_1) = \delta(+x_0),$$

on en déduit $x_0 \in Z_{r+1}^{p,q}$.

L'existence de la suite spectrale $E_r^{p,q}, d_r^{p,q}$, avec les propriétés annoncées, est démontrée. Il reste à montrer qu'elle sert à quelque chose.

Considérons $E_s^n = \bigoplus_{p \geq s, p+q=n} E^{p,q}$. On a évidemment

$$E_s^n \subset E^n \quad \text{et} \quad D(E_s^n) \subset E_s^{n+1}.$$

Donc E_s^* est un sous-complexe de E^* . Cette inclusion induit pour tout n une application

$$H^n(E_s^*) \rightarrow H^n(E^*).$$

Notons $F^s(H^n(E^*))$ l'image de cette application. Il est clair que $F^s(H^n(E^*)) = (0)$ pour $s > n$.

Une chasse simple, mais longue, dans un "grand" diagramme permet de démontrer le résultat fondamental suivant.

Théorème 19.6 :

$$F^s(H^n(E^*)) / F^{s+1}(H^n(E^*)) = E_\infty^{s, n-s}.$$

Définition 19.7 : On dit que la suite spectrale $E_r^{p,q}, d_r^{p,q}$ converge vers l'homologie du complexe total associé au double complexe $E^{p,q}$.

L'énoncé qui suit est important (malgré les apparences). Il se déduit tout à fait directement de la construction faite.

Théorème 19.8 : Soit $f^{p,q} : E^{p,q} \rightarrow K^{p,q}$ un morphisme de doubles complexes positifs.

Soient $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$ et $(K_r^{p,q}, \partial_r^{p,q})$ les premières suites spectrales de ces deux doubles complexes. Alors il existe pour tout (r, p, q) des homomorphismes

$$f_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow K_r^{p,q},$$

tels que

$$f_r^{p,q} \circ d_r^{p-r, q+r-1} = \partial_r^{p-r, q+r-1} \circ f_r^{p-r, q+r-1}$$

et induisant des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} F^s(H^n(E^*)) / F^{s+1}(H^n(E^*)) & = & E_\infty^{s, n-s} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^s(H^n(K^*)) / F^{s+1}(H^n(K^*)) & = & K_\infty^{s, n-s} \end{array}$$

Pour conclure cette description rapide, mais suffisante, des suites spectrales convergentes associées à un double complexe, il faut décrire la deuxième suite spectrale $(E_r^{p,q}, \delta_r^{p,q})$, et expliquer comment elle converge vers l'homologie du complexe total associé au double complexe $E^{p,q}$.

On pose

$$E_1^{p,q} = \text{Ker}(\delta^{p,q}) / \text{Im}(\delta^{p-1,q}) = H^p(E^{*,q}).$$

La dérivation d induit des applications

$$\delta_1^{p,q} : E_1^{p,q} \rightarrow E_1^{p,q+1}.$$

On construit, comme dans le cas de la première suite spectrale, les modules

$$E_r^{p,q},$$

les applications

$$\delta_r^{p,q} : E_1 r^{p,q} \rightarrow E_r^{p-r+1, q+r}$$

telles que

$$\delta_r^{p,q} \circ \delta_r^{p+r-1, q-r} = 0 \quad \text{et} \quad E_{r+1}^{p,q} = \text{Ker}(\delta_r^{p,q}) / \text{Im}(\delta_r^{p+r-1, q-r}).$$

Bien entendu, on considère les complexes E_s^* , définis par

$$E_s^n = \bigoplus_{q \geq s, p+q=n} E^{p,q}$$

et la filtration

$$F'^s(H^n(E^*)) = \text{Im}[H^n(E_s^*) \rightarrow H^n(E^*)]$$

de $H^n(E^*)$.

On a alors clairement

Théorème 19.9 :

$$F'^s(H^n(E^*)) / F'^{s+1}(H^n(E^*)) = E_\infty'^{n-s,s}.$$

et tout aussi clairement un énoncé similaire au Théorème 19.8, que j'épargne au Lecteur !

Chapter 20

Foncteurs Tors. Théorème de Bezout.

20.1 Les foncteurs Tors.

Soient A un anneau noethérien et M et N deux A -modules. Considérons des résolutions projectives $(P., \phi.)$ de M et $(Q., \psi.)$ de N :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow P_r \xrightarrow{\phi_r} P_{r-1} \xrightarrow{\phi_{r-1}} \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{\phi_1} P_0 \xrightarrow{\phi_0} M \rightarrow 0 \\ \dots \rightarrow Q_r \xrightarrow{\psi_r} Q_{r-1} \xrightarrow{\psi_{r-1}} \dots \rightarrow Q_1 \xrightarrow{\psi_1} Q_0 \xrightarrow{\psi_0} N \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Elles induisent le complexe double suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & P_r \otimes Q_s & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P_r \otimes Q_1 & \rightarrow & P_r \otimes Q_0 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & P_1 \otimes Q_s & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P_1 \otimes Q_1 & \rightarrow & P_1 \otimes Q_0 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & P_0 \otimes Q_s & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P_0 \otimes Q_1 & \rightarrow & P_0 \otimes Q_0 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Posons $E_{p,q} = P_p \otimes Q_q$. Notons

$$d : E_{p,q} \rightarrow E_{p-1,q} \quad \text{et} \quad \delta : E_{p,q} \rightarrow E_{p,q-1}$$

les dérivations de ce double complexe et étudions ses suites spectrales.

On a

$$E_{p,q}^1 = 0 \quad \text{pour} \quad q \neq 0 \quad \text{et} \quad E_{p,0}^1 = P_p \otimes N,$$

et

$$E_{p,q}^1 = 0 \quad \text{pour} \quad p \neq 0 \quad \text{et} \quad E_{0,q}^1 = M \otimes Q_q.$$

On en déduit

$$E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^2 = 0 \quad \text{pour } q \neq 0 \quad \text{et} \quad E_{p,0}^\infty = E_{p,0}^2 = H_p(P \otimes N),$$

et

$$E_{p,q}'^\infty = E_{p,q}'^2 = 0 \quad \text{pour } p \neq 0 \quad \text{et} \quad E_{0,q}'^\infty = E_{0,q}'^2 = H_q(M \otimes Q).$$

Si $E_n = \bigoplus_{p+q=n} P_p \otimes Q_q$ est le complexe total du complexe double, les deux suites spectrales convergent vers l'homologie de ce complexe. Autrement dit

Théorème 20.1 : *Il existe des isomorphismes canoniques*

$$H_p(P \otimes N) \simeq H_p(M \otimes Q) \simeq H_p(E).$$

On en déduit que ces A -modules d'homologie ne dépendent que de M et N et pas des résolutions choisies. On peut donc donner la définition suivante.

Définition 20.2 : *On pose $Tor_i^A(M, N) = H_i(M \otimes Q) = H_i(P \otimes N) = H_p(E)$.*

Dégageons d'abord l'énoncé évident suivant.

Proposition 20.3 : *(i) $Tor_0^A(M, N) = M \otimes_A N$.*

(ii) Si P est un A -module projectif, alors $Tor_i^A(P, \cdot) = 0$ pour $i > 0$.

Décrivons ensuite la structure de A -module des Tors.

Proposition 20.4 :

(i) $Tor_i^A(\cdot, \cdot)$ est un bifoncteur covariant dans chacune des variables.

(ii) Si $x \in A$ et si f_x (resp. g_x, h_x) est la multiplication par x dans M (resp. $N, Tor_i^A(M, N)$), on a :

$$Tor_i^A(f_x, N) = Tor_i^A(M, g_x) = h_x.$$

(iii) $annM + annN \subseteq ann(Tor_i^A(M, N))$.

Démonstration :

Soient M et M' deux A -modules et P et P' des résolutions projectives de M et M' . Si $e : M \rightarrow M'$ est un homomorphisme, il existe un morphisme de résolutions $e : P \rightarrow P'$ qui induit e . C'est à dire pour tout i un homomorphisme $e_i : P_i \rightarrow P'_i$ tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \rightarrow & M \\ \downarrow e_0 & & \downarrow e \\ P'_0 & \rightarrow & M' \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} P_i & \rightarrow & P_{i-1} \\ \downarrow e_i & & \downarrow e_{i-1} \\ P'_i & \rightarrow & P'_{i-1} \end{array}$$

soient commutatifs. On vérifie alors immédiatement que les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} P_{i+1} \otimes N & \rightarrow & P_i \otimes N & \rightarrow & P_{i-1} \otimes N \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P'_{i+1} \otimes N & \rightarrow & P'_i \otimes N & \rightarrow & P'_{i-1} \otimes N \end{array}$$

induisent des homomorphismes $Tor_i^A(M, N) \rightarrow Tor_i^A(M', N)$. On vérifie tout aussi immédiatement que ces homomorphismes ne dépendent ni des résolutions choisies ni du morphisme $e : P \rightarrow P'$ induisant e .

Appliquons cette dernière remarque à la multiplication par x dans M . Elle commute avec la multiplication par x dans P_i pour tout i . L'application

$$Tor_i^A(M, N) \rightarrow Tor_i^A(M, N)$$

qu'elle induit est bien la multiplication par x . Ceci démontre (ii) et (iii).

Corollaire 20.5 : *Si S est une partie multiplicativement stable de A , il existe une identification naturelle*

$$Tor_i^{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) \simeq S^{-1}Tor_i^A(M, N).$$

Proposition 20.6 : *Si $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ est une suite exacte, il y a une suite exacte (éventuellement infinie) :*

$$\dots \rightarrow Tor_{i+1}(M, N) \rightarrow Tor_{i+1}(M, N'') \rightarrow Tor_i(M, N') \rightarrow Tor_i(M, N) \rightarrow Tor_i(M, N'') \rightarrow \dots$$

Démonstration de la Proposition 20.6 :

Si P est une résolution projective de M , on a pour tout i des suites exactes

$$0 \rightarrow P_i \otimes N' \rightarrow P_i \otimes N \rightarrow P_i \otimes N'' \rightarrow 0.$$

Elles induisent des suites exactes de complexes

$$0 \rightarrow P \otimes N' \rightarrow P \otimes N \rightarrow P \otimes N'' \rightarrow 0$$

qui démontrent notre énoncé en appliquant le Lemme 19.4.

Corollaire 20.7 : *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) M est un A -module plat.
- (ii) Le foncteur $Tor_1(M, \cdot)$ est nul.

Rappelons que M est un A -module plat si $M \otimes_A \cdot$ est un foncteur exact.

Soit N un A -module. Considérons alors une suite exacte $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0$, où P est un A -module libre (donc projectif). On en déduit une suite exacte

$$0 \rightarrow Tor_1^A(M, N) \rightarrow M \otimes_A K \rightarrow M \otimes_A P \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow 0,$$

ce qui prouve que (i) implique (ii). La réciproque est une conséquence évidente de la suite exacte des *Tors*.

Proposition 20.8 : *Soit M un module de type fini sur l'anneau noethérien A . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) M est projectif.
- (II) M est plat.
- (iii) $Tor_1(M, \cdot) = 0$.
- (iv) $Tor_1(M, A/\mathcal{M}) = 0$ pour tout idéal maximal \mathcal{M} de A .

On peut supposer que A est local d'idéal maximal \mathcal{M} et montrer que si $Tor_1(M, A/\mathcal{M}) = 0$, alors M est libre.

C'est une conséquence immédiate du Lemme de Nakayama. En effet, soient \mathcal{M} l'idéal maximal de A et $f : A^n \rightarrow M$ une présentation minimale de M , i.e. telle que

$$(A/\mathcal{M}) \otimes_A f : (A/\mathcal{M}) \otimes_A A^n \rightarrow (A/\mathcal{M}) \otimes_A M$$

est un isomorphisme. Mais si K est le noyau de f , cet isomorphisme et l'égalité $Tor_1^A(A/\mathcal{M}, M) = 0$ impliquent

$$(A/\mathcal{M}) \otimes_A K = 0 \quad \text{soit} \quad K = \mathcal{M}K \quad \text{et} \quad K = 0.$$

Corollaire 20.9 : *Soit M un module de type fini sur l'anneau noethérien A . Les conditions suivantes sont équivalentes :* (i) $dp_A(M) < r$.

- (ii) $Tor_r^A(M, A/\mathcal{M}) = 0$ pour tout idéal maximal \mathcal{M} de A .

Les deux énoncés précédents démontrent le cas $r = 1$. On fait ensuite une récurrence évidente sur r .

Théorème 20.10 : *Si $F(\cdot)$ est un foncteur covariant exact à droite, défini dans la catégorie des modules de type fini sur un anneau noethérien A , et à valeurs dans la catégorie des A -modules, il existe un isomorphisme de foncteurs*

$$F(\cdot) \simeq F(A) \otimes_A \cdot \quad .$$

Soit M un A -module de type fini. Considérons une présentation

$$nA \xrightarrow{f} mA \rightarrow M \rightarrow 0$$

de M . Elle induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} F(nA) & \xrightarrow{F(f)} & F(mA) & \rightarrow & F(M) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ F(A) \otimes_A nA & \rightarrow & F(A) \otimes_A mA & \rightarrow & F(A) \otimes_A M & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Comme les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes, ce diagramme induit un isomorphisme

$$F(M) \simeq F(A) \otimes_A M.$$

On montre qu'il s'agit évidemment d'un isomorphisme de foncteurs.

20.2 Modules de Cohen-Macaulay sur un anneau régulier.

Théorème 20.11 : Soient R un anneau local régulier et M et N deux R -modules de type fini de Cohen-Macaulay. Alors

(i) $\dim(M \otimes_R N) + \dim R \geq \dim M + \dim N$.

(ii) Si $\dim(M \otimes_R N) + \dim R = \dim M + \dim N$, alors $\text{Tor}_i^R(M, N) = 0$ pour $i > 0$ et $M \otimes_R N$ est un module de Cohen-Macaulay.

Remarque : L'assertion $\dim(M \otimes_R N) + \dim R \geq \dim M + \dim N$ est vraie, plus généralement, pour tous R -modules de type fini M et N . C'est le Théorème d'intersection que nous démontrons plus loin pour des modules gradués de type fini sur un anneau de polynômes. La preuve de cet énoncé en toute généralité nous entraînerait trop loin.

Démonstration du Théorème 20.11:

Considérons une résolution libre minimale de M :

$$0 \rightarrow L_s \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

On a $s = \text{prof}(R) - \text{prof}(M) = \dim(R) - \dim(M)$. Elle induit un complexe

$$0 \rightarrow L_s \otimes N \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \otimes N \rightarrow M \otimes N \rightarrow 0$$

dont les modules d'homologie sont les modules $\text{Tor}_i^R(M, N)$.

Soit $t = \dim N - \dim(M \otimes N)$. Si \mathcal{J} est l'annulateur de $M \otimes N$, on sait, d'après la Proposition 16.15, qu'il existe une suite N -régulière de longueur t contenue dans \mathcal{J} . Mais \mathcal{J} annule aussi $\text{Tor}_i^R(M, N)$ pour tout i , d'après la Proposition 20.4.

On veut montrer $t \leq s$. Supposons $t \geq s$. Le complexe est exact d'après le Théorème 16.27. Appliquant le Lemme 16.17, on trouve alors $\text{prof}(M \otimes_R N) \geq \text{prof} N - s$. Mais rappelons que $\text{prof} N = \dim N$; on a donc

$$\text{prof}(M \otimes_R N) \geq \dim N - s \geq \dim N - t = \dim(M \otimes_R N).$$

Ceci démontre $s = t$ et $\text{prof}(M \otimes_R N) = \dim(M \otimes_R N)$. Le Théorème est donc démontré.

20.3 Le Théorème de Bezout

Rappel : Si $M = \bigoplus M_n$ est un module gradué de type fini sur $R = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$ nous notons P_M son polynôme de Hilbert et $e(M)$ sa multiplicité (l'entier tel que $e(M)/(d^0 P_M)!$ est le coefficient dominant de P_M).

Si $R = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$, les polynômes $P_R^{(i)}$ forment une base du \mathbf{Q} -espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients rationnels.

Théorème 20.12 : Soient $A = \bigoplus A_r$ et $B = \bigoplus B_r$ deux modules gradués de type fini sur l'anneau $R = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$.

Si $P_A = \sum_{i \geq 0} a_i P_R^{(i)}$ et $P_B = \sum_{j \geq 0} b_j P_R^{(j)}$, alors

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i P_{\text{Tor}_i^R(A, B)} = \sum_{i \geq 0} a_i P_B^{(i)} = \sum_{j \geq 0} b_j P_A^{(j)} = \sum_{l \geq 0} \left[\sum_{i+j=l} a_i b_j \right] P_R^{(l)}.$$

Corollaire 20.13 : (Théorème d'intersection) $\dim(A \otimes_R B) + \dim R \geq \dim A + \dim B$.

Corollaire 20.14 : (Théorème de Bezout) On suppose

(i) $\dim(A \otimes_R B) + \dim R = \dim A + \dim B$,

(ii) pour tout idéal premier minimal \mathcal{P} de $\text{Supp}(A \otimes_R B)$ tel que $\dim(R/\mathcal{P}) = \dim(A \otimes_R B)$ les $R_{\mathcal{P}}$ -modules $A_{\mathcal{P}}$ et $B_{\mathcal{P}}$ sont de Cohen-Macaulay et vérifient $\dim(R_{\mathcal{P}}) = \dim(A_{\mathcal{P}}) + \dim(B_{\mathcal{P}})$,
alors

$$e(A \otimes_R B) = e(A)e(B).$$

Exemple :

Prenons $R = \mathbf{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$, $A = R/(F)$ et $B = R/(G)$, où F et G sont des polynômes homogènes de degrés respectifs f et g . Les modules A et B sont de dimension 2. On a

$$P_A(n) = P_R(n) - P_R(n-f) = fP_R'(n) - (f^2/2)P_R''(n) + (f^3/3!)P_R^{(3)}(n)$$

et

$$P_B(n) = P_R(n) - P_R(n-g) = gP_R'(n) - (g^2/2)P_R''(n) + (g^3/3!)P_R^{(3)}(n)$$

Si F et G sont sans facteur commun, on a $\text{Tor}_i^R(R/(F), R/(G)) = 0$ pour $i > 0$ d'après le Théorème 20.11. Mais $(R/(F)) \otimes_R (R/(G)) = R/(F, G)$ et le Théorème 20.12 confirme

$$P_{R/(F, G)}(n) = fgP_R''(n) - (fg/2)(f+g)P_R^{(3)}(n) = fgn - (fg/2)(f+g-4)$$

Démonstration du Théorème 20.12 :

On considère une résolution libre de A à homomorphismes de degré 0 :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{r_1} R[-n_{1j}] \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{r_2} R[-n_{2j}] \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{r_1} R[-n_{1j}] \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{r_1} R[-n_{0j}] \rightarrow A \rightarrow 0.$$

On en déduit

$$P_A(r) = \sum_{ij} (-1)^i P_R(r - n_{ij}).$$

Appliquant la formule de Taylor, on a

$$P_R(r - n_{ij}) = \sum_l [(-n_{ij})^l / l!] P_R^{(l)}(r).$$

On en déduit

$$P_A = \sum_l \left[\sum_{i,j} (-1)^i (-n_{ij})^l / l! \right] P_R^{(l)}$$

soit

$$a_l = \left[\sum_{i,j} (-1)^i (-n_{ij})^l / l! \right].$$

En tensorisant la résolution de A par B , nous obtenons un complexe à homomorphismes de degré 0 :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{r_1} B[-n_{1j}] \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{r_2} B[-n_{2j}] \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{r_1} B[-n_{1j}] \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{r_1} B[-n_{0j}] \rightarrow B \otimes_R A \rightarrow 0$$

Comme le polynôme de Hilbert est une fonction additive, il en résulte

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} (-1)^i P_{\text{Tor}_i^R(A,B)} &= \sum_{i,j} (-1)^i P_B(r - n_{ij}) = \sum_l \left[\sum_{i,j} (-1)^i (-n_{ij})^l / l! \right] P_B^{(l)} = \\ &= \sum_l a_l P_B^{(l)} = \sum_l a_l \left[\sum_j b_j P_R^{(l+j)} \right] = \sum_l \left[\sum_{i+j=l} a_i b_j \right] P_R^{(l)}. \end{aligned}$$

Le Théorème est démontré.

Démonstration du Corollaire 20.13 :

Si $d = d^0 P_A$ (resp. $d' = d^0 P_B$), alors A (resp. B) est de dimension $d + 1$ (resp. $d' + 1$). Comme $a_i = 0$ (resp. $b_j = 0$) pour $i > n - d$ (resp. $j > n - d'$) et $a_{n-d} \neq 0$ (resp. $b_{n-d'} \neq 0$), on a

$$d^0 \left[\sum_{i \geq 0} (-1)^i P_{\text{Tor}_i^R(A,B)} \right] = d + d' - n$$

Rappelons que $\text{Supp Tor}_i^R(A, B) \subset \text{Supp } A \otimes_R B$, donc $d^0 P_{\text{Tor}_i^R(A,B)} \leq d^0 P_{A \otimes_R B}$.

Il reste $d^0 P_{A \otimes_R B} \geq d + d' - n$, soit

$$\dim(A \otimes_R B) - 1 \geq \dim A - 1 + \dim B - 1 - (\dim R - 1).$$

Le Corollaire 20.13 est démontré.

Démonstration du Corollaire 20.14 :

Comme $e(A) = a_{n-d}$ et $e(B) = b_{n-d'}$, il suffit bien sûr de démontrer que pour $i > 0$, on a

$$d^0 P_{\text{Tor}_i^R(A,B)} < d^0 P_{A \otimes_R B}.$$

Autrement dit, que $\mathcal{P} \in \text{Supp}(A \otimes_R B)$ et $\dim(R/\mathcal{P}) = \dim(A \otimes_R B)$ impliquent

$$\text{Tor}_i^{R/\mathcal{P}}(A_{\mathcal{P}}, B_{\mathcal{P}}) = 0.$$

Mais compte tenu des hypothèses, c'est le Théorème 20.11 (ii).

Soulignons le cas particulier suivant qui nous permettra de définir le degré d'une variété projective.

Proposition 20.15 : Soit A un quotient de $R = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$ de dimension $d+1$. Soient H_1, \dots, H_d des éléments homogènes de degré 1 de R tels que $\dim(A/(H_1, \dots, H_d)A) = 1$. Si pour tout idéal premier relevant $\mathcal{P} \in \text{Supp}(A/(H_1, \dots, H_d)A)$ l'anneau local $A_{\mathcal{P}}$ est de dimension d et de Cohen-Macaulay, alors

$$e(A) = e(A/(H_1, \dots, H_d)A) = \text{rg}_{\mathbf{C}}(A/(H_1, \dots, H_d)A)_n \quad \text{pour } n \gg 0.$$

Chapter 21

Foncteurs Exts.

21.1 Modules injectifs.

Définition 21.1 : Soit A est un anneau. On dit que qu'un A -module E est injectif si le foncteur $\text{Hom}_A(\cdot, E)$ est exact.

Attention, les modules injectifs sont très gros. On montre facilement que, si l'anneau A est noethérien de dimension > 0 , un A -module injectif n'est jamais de type fini.

Exemples :

(i) Un \mathbf{Z} -module injectif E contenant \mathbf{Z} contient \mathbf{Q} . En effet, comme E est injectif, l'inclusion $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ induit une application surjective $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q}, E) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, E)$. Elle est donc la restriction à \mathbf{Z} d'une application $\mathbf{Q} \rightarrow E$ dont le noyau est évidemment nul puisque c'est un sous- \mathbf{Z} -module K de \mathbf{Q} tel que $K \cap \mathbf{Z} = (0)$.

(ii) On démontre de manière identique que si A est un anneau intègre et E un A -module injectif contenant A , alors E contient le corps des fractions de A .

(iii) Soient R, \mathcal{M} un anneau local régulier de dimension $d > 0$ et (x_1, \dots, x_d) un système régulier de paramètres. Soit S le sous- R -module de $R/(x_1^n, \dots, x_d^n)$ engendré par la classe de $x_1^{n-1}, \dots, x_d^{n-1}$. On démontre facilement que $S \simeq R/\mathcal{M}$ et que tout sous- R -module de $R/(x_1^n, \dots, x_d^n)$ contient S .

Soit alors E un R -module injectif contenant R/\mathcal{M} . Il existe donc une injection $S \subset E$. Comme E est injectif, c'est la restriction d'une application $R/(x_1^n, \dots, x_d^n) \rightarrow E$. Le noyau de cette application contient S , donc il est nul. Donc E contient un sous- R -module isomorphe à $R/(x_1^n, \dots, x_d^n)$, pour tout n . On en déduit que la suite croissante des sous-modules $\text{Hom}_R(R/(x_1^n, \dots, x_d^n), E)$, de E , n'est pas stationnaire. Donc E n'est pas de type fini.

L'étude des modules injectifs, malgré son intérêt, n'a pas sa place ici. Le Lecteur aura l'obligeance d'admettre le résultat suivant :

Théorème 21.2 : Si A est un anneau noethérien, tout A -module est contenu dans un A -module injectif.

En conséquence, tout A -module admet une résolution injective.

Théorème 21.3 : *Si M est un module sur un anneau noethérien A , il existe une suite exacte de A -modules injectifs*

$$E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \dots \rightarrow E^r \rightarrow \dots$$

telle que $M = \text{Ker}(E^0 \rightarrow E^1)$.

Définition 21.4 : *Si un A -module M admet une résolution injective finie*

$$0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \dots \rightarrow E^r \rightarrow 0,$$

et n'en admet pas de plus courte, on dit que M est de dimension injective r et on écrit $di_A(M) = r$.

21.2 Foncteurs Exts.

Soient A un anneau noethérien et M et N deux A -modules. Considérons une résolution projective (P_\cdot) de M et une résolution injective (E^\cdot) de N .

Elles induisent le complexe double suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \text{Hom}(P_0, E^0) & \rightarrow & \text{Hom}(P_0, E^1) & \rightarrow & \dots \rightarrow \text{Hom}(P_0, E^s) \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \text{Hom}(P_1, E^0) & \rightarrow & \text{Hom}(P_1, E^1) & \rightarrow & \dots \rightarrow \text{Hom}(P_1, E^s) \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \text{Hom}(P_r, E^0) & \rightarrow & \text{Hom}(P_r, E^1) & \rightarrow & \dots \rightarrow \text{Hom}(P_r, E^s) \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$

Posons $E^{p,q} = \text{Hom}(P_p, E^q)$. Notons

$$d : E^{p,q} \rightarrow E^{p,q+1} \quad \text{et} \quad \delta : E^{p,q} \rightarrow E^{p+1,q}$$

les dérivations de ce double complexe et étudions ses suites spectrales.

On a

$$E_1^{p,q} = 0 \quad \text{pour} \quad q \neq 0 \quad \text{et} \quad E_1^{p,0} = \text{Hom}(P_p, N),$$

et

$$E_1^{p,q} = 0 \quad \text{pour} \quad p \neq 0 \quad \text{et} \quad E_1^{0,q} = \text{Hom}(M, E^q).$$

On en déduit

$$E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q} = 0 \quad \text{pour } q \neq 0 \quad \text{et} \quad E_\infty^{p,0} = E_2^{p,0} = H^p(\text{Hom}(P_*, N)),$$

et

$$E_\infty'^{p,q} = E_2'^{p,q} = 0 \quad \text{pour } p \neq 0 \quad \text{et} \quad E_\infty'^{0,q} = E_2'^{0,q} = H^q(\text{Hom}(M, E^*)).$$

Si $E^n = \bigoplus_{p+q=n} \text{Hom}(P_p, E^q)$ est le complexe total du complexe double, les deux suites spectrales convergent vers l'homologie de ce complexe. Autrement dit

Théorème 21.5 : *Il existe des isomorphismes canoniques*

$$H^p(\text{Hom}(P_*, N)) \simeq H^q(\text{Hom}(M, E^*)) \simeq H^p(E^*).$$

On en déduit que ces A -modules d'homologie ne dépendent que de M et N et pas des résolutions (projectives et injectives) choisies. On peut donc donner la définition suivante.

Définition 21.6 :

$$\text{Ext}_A^i(M, N) = H^p(\text{Hom}(P_*, N)) = H^q(\text{Hom}(M, E^*)) = H^p(E^*).$$

Dégageons d'abord l'énoncé suivant.

Proposition 21.7 : (i) $\text{Ext}_A^0(M, N) = \text{Hom}_A(M, N)$.

(iii) P est un A -module projectif si et seulement si $\text{Ext}_A^1(P, \cdot) = 0$.

(iv) E est un A -module injectif si et seulement si $\text{Ext}_A^1(\cdot, E) = 0$.

(i) est évident. La démonstration de (ii) et (iii) est un exercice à faire.

Décrivons ensuite la structure de A -module des Ext s.

Proposition 21.8 :

(i) $\text{Ext}_A^i(\cdot, \cdot)$ est un bifoncteur contravariant par rapport à la première variable et covariant par rapport à la seconde.

(ii) Si $x \in A$ et si f_x (resp. g_x, h_x) est la multiplication par x dans M (resp. $N, \text{Ext}_A^i(M, N)$), on a

$$\text{Ext}_A^i(f_x, N) = \text{Ext}_A^i(M, g_x) = h_x.$$

(iii) $\text{ann}M + \text{ann}N \subseteq \text{ann}(\text{Ext}_A^i(M, N))$.

Démonstration :

Soient M et M' deux A -modules et P et P' des résolutions projectives de M et M' . Si $e : M \rightarrow M'$ est un homomorphisme, il existe un morphisme de résolutions $e_\cdot : P \rightarrow P'$ qui induit e . Les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}(P'_{i-1}, N) & \rightarrow & \text{Hom}(P'_i, N) & \rightarrow & \text{Hom}(P'_{i+1}, N) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}(P_{i-1}, N) & \rightarrow & \text{Hom}(P_i, N) & \rightarrow & \text{Hom}(P_{i+1}, N) \end{array}$$

induisent des homomorphismes $\text{Ext}_A^i(M', N) \rightarrow \text{Ext}_A^i(M, N)$ qui ne dépendent ni des résolutions choisies ni du morphisme $e_\cdot : P \rightarrow P'$ induisant e .

Le lecteur vérifiera qu'il en va de même pour la deuxième variable, puis démontrera (ii), qui implique immédiatement (iii), comme dans le cas des Tors .

Corollaire 21.9 : Si M et N sont des A -modules et S une partie multiplicativement stable de A , alors il y a un isomorphisme naturel

$$\text{Ext}_{S^{-1}A}^i(S^{-1}M, S^{-1}N) \simeq S^{-1}\text{Ext}_A^i(M, N).$$

Proposition 21.10 : Si $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ est une suite exacte, il y a une suite exacte (éventuellement infinie):

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_A^{i-1}(M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^{i-1}(M, N'') \rightarrow \text{Ext}_A^i(M, N') \rightarrow \text{Ext}_A^i(M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^i(M, N'') \rightarrow \dots$$

Proposition 21.11 : Si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est une suite exacte, il y a une suite exacte (éventuellement infinie):

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_A^{i-1}(M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^{i-1}(M', N) \rightarrow \text{Ext}_A^i(M'', N) \rightarrow \text{Ext}_A^i(M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^i(M', N) \rightarrow \dots$$

Ces deux Propositions se déduisent directement du Lemme 19.4 en utilisant les suites exactes de complexes associées à une résolution projective de M pour la première et à une résolution injective de N pour la seconde.

Corollaire 21.12 : Soit M un A -module.

$$dp_A(M) < r \iff \text{Ext}_A^r(M, \cdot) = 0.$$

$$di_A(M) < r \iff \text{Ext}_A^r(\cdot, M) = 0.$$

Démonstration : L'énoncé est déjà prouvé pour $r = 1$ (Proposition 21.7). Pour $r > 1$, soit $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ est une suite exacte, où L est un A -module libre. On a un isomorphisme de foncteurs

$$\text{Ext}_A^r(M, \cdot) \simeq \text{Ext}_A^{r-1}(K, \cdot).$$

On conclut par une récurrence évidente.

Corollaire 21.13 : Si M est un A -module de dimension projective finie, on a

$$dp_A(M) = \max(r, \text{Ext}_A^r(M, A) \neq 0).$$

Démonstration : Soit $dp_A(M) = d$. Il est clair que $\text{Ext}_A^r(M, A) = 0$ pour $r > d$. Le foncteur $\text{Ext}_A^d(M, \cdot)$ est covariant et exact à droite. Tout A -module est, à isomorphisme près, un quotient d'une somme de copies de A . Donc $\text{Ext}_A^d(M, A) = 0$ impliquerait $\text{Ext}_A^d(M, \cdot) = 0$, ce qui est idiot.

Théorème 21.14 : Si M est un A -module, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $di_A(M) < r$.
- (ii) $\text{Ext}_A^r(N, M) = 0$ pour tout A -module de type fini N .
- (iii) $\text{Ext}_A^r(A/\mathcal{P}, M) = 0$ pour tout idéal premier \mathcal{P} de A .

Démonstration : Il suffit évidemment de prouver que (iii) implique (i).

Supposons d'abord $r = 1$. Soient N un A -module, K un sous-module de N et $f : K \rightarrow M$ un homomorphisme. On veut montrer qu'il existe $g : N \rightarrow M$ tel que la restriction de g à K soit f .

Considérons l'ensemble des couples (F, h) , où F est un sous-module de N et $h : F \rightarrow M$ un homomorphisme. Munissons cet ensemble de la relation d'ordre

$$(F', h') \geq (F, h) \iff F \subset F' \quad \text{et} \quad h'|_F = h.$$

Il est clair que tout sous-ensemble totalement ordonné de $(F_i, h_i)_{i \in I}$ est borné supérieurement par (F, h) , où $F = \cup_i F_i$ et $h(x) = h_i(x)$ pour $x \in F_i$.

On peut donc utiliser l'axiome de Zorn. Soit (G, g) un élément maximal parmi les éléments de cet ensemble qui sont plus grands que (K, f) . Montrons $G = N$. Sinon, soient $x \in N$, $x \notin G$ et $G' = G + Ax \subset N$. Comme G'/G est un A -module non nul de type fini, il existe $\mathcal{P} \in \text{Ass}(G'/G)$. Soit alors $x' \in G'$ tel que $\mathcal{P} = (G : x')$, donc $A/\mathcal{P} \simeq (G + Ax')/G$.

Comme $\text{Ext}_A^1((G + Ax')/G, M) = \text{Ext}_A^1(A/\mathcal{P}, M) = 0$, l'application naturelle

$$\text{Hom}_A(G + Ax', M) \rightarrow \text{Hom}_A(G, M)$$

est surjective, donc g se "prolonge" à $G + Ax'$, ce qui contredit le choix maximal de (G, g) .

Si $r > 1$, soit E un A -module injectif contenant M . Comme $\text{Ext}_A^r(., M) \simeq \text{Ext}_A^{r-1}(., E/M)$ (Proposition 21.10), on conclut par une récurrence évidente sur r .

21.3 Foncteurs Exts et profondeur

Théorème 21.15 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local et M et N des A -modules de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{Ext}_A^i(N, M) = 0$ pour $i < r$.
- (ii) Il existe une suite M -régulière de longueur r contenue dans l'annulateur de N .

Démonstration par récurrence sur $r \geq 1$:

Supposons qu'il n'existe pas d'élément M -régulier contenu dans $\text{ann}(N)$. D'après le Lemme d'évitement, il existe un idéal premier $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M)$ tel que $\text{ann}(N) \subset \mathcal{P}$. Comme $\mathcal{P} \in \text{Supp}(N)$, on a

$$\text{Hom}_{A_{\mathcal{P}}}(N_{\mathcal{P}}, A_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}) \neq 0 \quad \text{donc} \quad \text{Hom}_A(N, A/\mathcal{P}) \neq 0.$$

Mais comme $\mathcal{P} \in \text{Ass}(M)$, il existe une injection

$$0 \rightarrow A/\mathcal{P} \rightarrow M.$$

On en déduit une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(N, A/\mathcal{P}) \rightarrow \text{Hom}_A(N, M),$$

qui montre que $\text{Hom}_A(N, M) \neq 0$.

Réciproquement, soit $a \in \text{ann}(N)$ un élément M -régulier. La suite exacte

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{a} M,$$

induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{a} \text{Hom}_A(N, M).$$

Mais $aN = 0$ implique $a\text{Hom}(N, M) = 0$. Il reste $\text{Hom}(N, M) = 0$ et l'équivalence entre (i) et (ii) est démontrée pour $r = 1$.

Supposons maintenant qu'il existe $x \in \text{ann}(N)$ un élément M -régulier, autrement dit que $\text{Hom}_A(N, M) = 0$. La suite exacte

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{x} M \rightarrow M/xM \rightarrow 0$$

induit une suite exacte longue :

$$\text{Ext}_A^i(N, M) \xrightarrow{x} \text{Ext}_A^i(N, M) \rightarrow \text{Ext}_A^i(N, M/xM) \rightarrow \text{Ext}_A^{i+1}(N, M) \xrightarrow{x} \text{Ext}_A^{i+1}(N, M).$$

La multiplication par x est nulle dans $\text{Ext}_A^i(N, M)$, d'après la Proposition 21.8. On en déduit pour tout $i \geq 1$ des suites exactes :

$$0 \rightarrow \text{Ext}_A^{i-1}(N, M) \rightarrow \text{Ext}_A^{i-1}(N, M/xM) \rightarrow \text{Ext}_A^i(N, M) \rightarrow 0.$$

Elles montrent que

$$\text{Ext}_A^i(N, M) = 0 \quad \text{pour } i < r \iff \text{Ext}_A^j(N, M/xM) = 0 \quad \text{pour } j < r - 1.$$

L'équivalence annoncée s'en déduit immédiatement par récurrence.

Corollaire 21.16 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local et M un A -module de type fini. Alors si N est un A -module de longueur finie, on a

$$\text{prof}_A(M) = \min\{i, \text{Ext}_A^i(N, M) \neq 0\}.$$

Démonstration : La profondeur de M est la longueur d'une suite M -régulière de longueur maximale, contenue dans \mathcal{M} . Mais si (x_1, \dots, x_r) est une telle suite, il est clair que (x_1^n, \dots, x_r^n) est aussi une suite M -régulière, et que $(x_1^n, \dots, x_r^n) \subset \text{ann}(N)$ pour n assez grand.

Corollaire 21.17 : Soit A un anneau local de Cohen-Macaulay de dimension d et M un A -module de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\dim(M) \leq n$.

(ii) $\text{Ext}_A^i(M, A) = 0$ pour $i < d - n$.

De plus si $\dim(M) = n$ et si $\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)$ est un idéal premier tel que $\dim(A/\mathcal{P}) = n$, alors $\mathcal{P} \in \text{Supp}(\text{Ext}_A^{d-n}(M, A))$

Démonstration : Supposons $\dim(M) = n$. Soit \mathcal{I} l'annulateur de M . Comme A est de Cohen-Macaulay de dimension d et comme $\dim(A/\mathcal{I}) = n$, il existe une suite A -régulière de longueur $(d - n)$ contenue dans \mathcal{I} (Proposition 16.15). Donc $\text{Ext}_A^i(M, A) = 0$ pour $i < d - n$ d'après le Théorème 21.15.

Réciproquement, soit (a_1, \dots, a_{d-n}) une suite A -régulière annihilant M . On a évidemment $\dim(M) \leq \dim(A/(a_1, \dots, a_{d-n})) = n$.

Si $\dim(M) = n$, soit $\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)$ un idéal premier tel que $\dim(A/\mathcal{P}) = n$. Comme $A_{\mathcal{P}}$ est un anneau de Cohen-Macaulay de dimension $d - n$ (Corollaire 16.16), on sait, d'après le Corollaire 21.16, que $\text{Ext}_{A_{\mathcal{P}}}^{d-n}(M_{\mathcal{P}}, A_{\mathcal{P}}) \neq 0$.

21.4 Foncteurs Exts et conditions \mathcal{S}_r .

Théorème 21.18 : Soient R un anneau local régulier de dimension d et M un R -module de type fini. Alors

$$\dim(\text{Ext}_R^{d-l}(M, R)) \leq l \quad \text{pour } l \geq 0.$$

Soit n la dimension de M . Si $r > 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) M est équidimensionnel et vérifie la condition \mathcal{S}_r .

(ii) $\dim(\text{Ext}_R^{d-n+i}(M, R)) \leq (n - i - r)$ pour $i > 0$ (le module (0) a toutes les dimensions).

Démonstration : Si $\mathcal{P} \in \text{Supp}(\text{Ext}_R^{d-l}(M, R))$, alors $dp_{R_{\mathcal{P}}}(M_{\mathcal{P}}) \geq d - l$, donc $\dim(R_{\mathcal{P}}) \geq d - l$ et $\dim(R/\mathcal{P}) \geq l$, d'après le Corollaire 16.16.

Supposons que M est équidimensionnel et vérifie la condition \mathcal{S}_r avec $r > 0$.

Comme M est équidimensionnel, on a $d - n = \dim(R_{\mathcal{P}}) - \dim(M_{\mathcal{P}})$, pour tout $\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)$.

Si $\mathcal{P} \in \text{Supp}(\text{Ext}_R^{d-n+i}(M, R))$, on a

$$\text{Ext}_{R_{\mathcal{P}}}^{d-n+i}(M_{\mathcal{P}}, R_{\mathcal{P}}) \neq 0 \quad \text{donc} \quad dp_{R_{\mathcal{P}}}(M_{\mathcal{P}}) \geq d - n + i.$$

Comme $\text{prof}(M_{\mathcal{P}}) + dp_{R_{\mathcal{P}}}(M_{\mathcal{P}}) = \dim(R_{\mathcal{P}})$, on en déduit

$$\text{prof}(M_{\mathcal{P}}) \leq \dim(R_{\mathcal{P}}) - (d - n + i) = \dim(R_{\mathcal{P}}) - (\dim(R_{\mathcal{P}}) - \dim(M_{\mathcal{P}}) + i) = \dim(M_{\mathcal{P}}) - i.$$

Comme $i > 0$ et M vérifie \mathcal{S}_r , ceci implique $\dim(M_{\mathcal{P}}) \geq r + i$, donc $\dim(R/\mathcal{P}) \leq n - r - i$, soit (ii).

Réciproquement, supposons la condition (ii) vérifiée. Montrons d'abord que M est équidimensionnel.

Soit \mathcal{P} un idéal premier minimal de M . Alors $M_{\mathcal{P}}$ est de longueur finie, donc $dp_{R_{\mathcal{P}}}(M_{\mathcal{P}}) = \dim(R_{\mathcal{P}})$.

Si $\dim(R_{\mathcal{P}}) = d - n + i$, on a $\mathcal{P} \in \text{Supp}(\text{Ext}_R^{d-n+i}(M, R))$. Si $i > 0$, ceci implique

$$\dim(R/\mathcal{P}) \leq n - 1 - i \quad \text{donc} \quad \dim(R_{\mathcal{P}}) + \dim(R/\mathcal{P}) \leq (d - n + i) + (n - 1 - i) = d - 1,$$

donc une contradiction (Corollaire 16.16).

Montrons maintenant que M est \mathcal{S}_r . Soit $\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)$ tel que $\text{prof}(M_{\mathcal{P}}) = \dim(M_{\mathcal{P}}) - i$, avec $i > 0$. Alors

$$\text{prof}(M_{\mathcal{P}}) = \dim(R_{\mathcal{P}}) - (d - n) - i \quad \text{implique} \quad dp_{R_{\mathcal{P}}}(M_{\mathcal{P}}) = d - n + i.$$

On en déduit $\mathcal{P} \in \text{Supp}(\text{Ext}_R^{d-n+i}(M, R))$, donc $\dim(R/\mathcal{P}) \leq n - r - i$. Comme $\mathcal{P} \in \text{Supp}(M)$ et M est équidimensionnel, il en résulte $\dim(M_{\mathcal{P}}) \geq r + i$, donc $\text{prof}(M_{\mathcal{P}}) \geq r$. Le Théorème est démontré.

Corollaire 21.19 : Soient R un anneau local régulier de dimension d et M un R -module de type fini de dimension n . Si $r > 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) M est équidimensionnel et vérifie la condition \mathcal{S}_r .

(ii) $\text{Ext}_R^{d-n+i}(\text{Ext}_R^{d-n+j}(M, R), R) = 0$ pour $i < j + r$ et $1 \leq j$.

Démonstration : Cet énoncé est le Théorème précédent, en tenant compte du Corollaire 21.17.

Théorème 21.20 : Soient R un anneau local régulier de dimension d et $M \neq (0)$ un R -module de type fini. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) M est de Cohen-Macaulay de dimension n .

(ii) $\text{Ext}_R^s(M, R) = 0$ pour $s \neq (d - n)$.

Si ces conditions sont réalisées, alors

$\text{Ext}_R^{d-n}(M, R)$ est de Cohen-Macaulay de dimension n ,

il existe un isomorphisme $M \simeq \text{Ext}_R^{d-n}(\text{Ext}_R^{d-n}(M, R), R)$.

Démonstration :

Supposons d'abord que M est de Cohen-Macaulay de dimension n .

Alors $Ext_R^i(M, R) = 0$ pour $i < d - n$ d'après le Corollaire 21.17 et $dim(Ext_R^{d-n+i}(M, R)) \leq (-i)$, donc $Ext_R^{d-n+i}(M, R) = 0$ pour $i > 0$, d'après le Théorème 21.18.

Réciproquement, $Ext_R^s(M, R) = 0$ pour $s < (d - n)$ implique $dim(M) \leq n$ (Corollaire 21.17). Comme $Ext_R^i(M, R) \neq 0$ pour $i = dp_R(M)$ (Corollaire 21.13), on a $dp_R(M) = d - n$, donc $prof(M) = dim(R) - dp_R(M) = n$ et M est de Cohen-Macaulay de dimension n .

Supposons maintenant les conditions (i) et (ii) réalisées.

Comme $dp_R(M) = d - n$, on a une résolution

$$0 \rightarrow L_{d-n} \rightarrow \dots \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Comme $Ext_R^s(M, R) = 0$ pour $s < d - n$, on en déduit une suite exacte

$$0 \rightarrow L_0^v \rightarrow \dots \rightarrow L_{d-n}^v \rightarrow Ext_R^{d-n}(M, R) \rightarrow 0.$$

C'est une résolution projective de $Ext_R^{d-n}(M, R)$. On a donc $dp_R(Ext_R^{d-n}(M, R)) \leq d - n$. Ceci implique $prof_R(Ext_R^{d-n}(M, R)) \geq n$. Mais $Supp(Ext_R^{d-n}(M, R)) \subset Supp(M)$, donc $n \geq dim(Ext_R^{d-n}(M, R))$ et $Ext_R^{d-n}(M, R)$ est de Cohen-Macaulay de dimension n .

Enfin, appliquant le foncteur $Hom_R(\cdot, R)$ à la résolution de $Ext_R^{d-n}(M, R)$, on trouve

$$0 \rightarrow L_{d-n}^{vv} \rightarrow \dots \rightarrow L_1^{vv} \rightarrow L_0^{vv} \rightarrow Ext_R^{d-n}(Ext_R^{d-n}(M, R), R) \rightarrow 0.$$

C'est une résolution de $Ext_R^{d-n}(Ext_R^{d-n}(M, R), R)$. Elle est évidemment isomorphe à la résolution de M et induit l'isomorphisme annoncé

$$M \simeq Ext_R^{d-n}(Ext_R^{d-n}(M, R), R).$$

21.5 La suite spectrale des $Exts$ pour la restriction des scalaires.

Dans ce paragraphe $f : A \rightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux.

Si M est un B -module, il induit, par restriction des scalaires, un A -module, noté $f_*(M)$, dont l'ensemble sous-jacent est M , muni de la structure naturelle définie par

$$\text{si } a \in A \text{ et } x \in f_*(M) \text{ alors } ax = f(a)x.$$

Il est clair que $f_*(\cdot)$ est un foncteur exact, i.e. si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de B -modules, alors

$$0 \rightarrow f_*(M') \rightarrow f_*(M) \rightarrow f_*(M'') \rightarrow 0$$

est une suite exacte de A -modules.

Si N est un A -module, $Hom_A(B, N)$ a une structure naturelle de B -module définie par

$$b \in B \text{ et } g \in Hom_A(B, N) \text{ alors } (bg)(\cdot) = g(b\cdot).$$

Plus généralement, la multiplication par b dans B est A -linéaire; elle induit donc une application $Ext_A^q(B, N) \rightarrow Ext_A^q(B, N)$ qui donne à $Ext_A^q(B, N)$ une structure naturelle de B -module.

Lemme 21.21 : Il y a un isomorphisme naturel $f_*(\text{Hom}_B(M, \text{Hom}_A(B, N))) \simeq \text{Hom}_A(f_*(M), N)$.

Démonstration : Si $f \in \text{Hom}_B(M, \text{Hom}_A(B, N))$, on définit $g_f \in \text{Hom}_A(f_*(M), N)$ par $g_f(x) = f(x)(1)$.

Si $g \in \text{Hom}_A(f_*(M), N)$, on définit $f_g \in \text{Hom}_B(M, \text{Hom}_A(B, N))$ par $f_g(x)(b) = g(bx)$.

On vérifie alors directement que $f_{g_f} = f$ et $g_{f_g} = g$.

Corollaire 21.22 : Si E est un A -module injectif, $\text{Hom}_A(B, E)$ est un B -module injectif.

Démonstration : C'est clair.

Théorème 21.23 : Soient A un anneau et B une A -algèbre. Si N est un A -module et M un B -module, il existe une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = f_*(\text{Ext}_B^p(M, \text{Ext}_A^q(B, N)))$$

qui converge vers l'homologie d'un complexe total K^* , d'homologie

$$H^n(K^*) = \text{Ext}_A^n(f_*(M), N).$$

Démonstration :

Soient P_* une résolution projective du B -module M et E^* une résolution injective du A -module N . On considère le double complexe positif

$$f_*(\text{Hom}_B(P_p, \text{Hom}_A(B, E^q))) = \text{Hom}_A(f_*(P_p), E^q).$$

L'étude de la deuxième suite spectrale de ce double complexe donne

$$E_1^{p,q} = H^p(\text{Hom}_A(f_*(P_p), E^q)),$$

donc

$$E_1^{0,q} = \text{Hom}_A(f_*(M), E^q) \quad \text{et} \quad E_1^{p,q} = 0 \quad \text{pour} \quad p > 0.$$

Il en résulte que l'homologie du complexe total K^* associé au complexe double est

$$H^n(K^*) = E_2^{0,n} = \text{Ext}_A^n(f_*(M), N).$$

D'autre part, on a $H^q(\text{Hom}_A(B, E^*) = \text{Ext}_A^q(B, N)$. Comme $\text{Hom}_B(P_p, \cdot)$ est un foncteur exact, on en déduit

$$E_1^{p,q} = H^q(f_*(\text{Hom}_B(P_p, \text{Hom}_A(B, E^*)))) = f_*(\text{Hom}_B(P_p, \text{Ext}_A^q(B, N))).$$

Il en résulte

$$E_2^{p,q} = H^p(f_*(\text{Hom}_B(P_p, \text{Ext}_A^q(B, N)))) = f_*(\text{Ext}_B^p(M, \text{Ext}_A^q(B, N))).$$

Soulignons quelques cas particuliers de cet énoncé que nous utiliserons fréquemment.

Corollaire 21.24 : Soient R un anneau local régulier de dimension d et A une R -algèbre finie de dimension n , qui est de Cohen-Macaulay comme R -module. Si $f : R \rightarrow A$ est l'homomorphisme naturel, on a un isomorphisme naturel de foncteurs

$$f_*(\text{Ext}_A^p(*, \text{Ext}_R^{d-n}(A, R))) \simeq \text{Ext}_R^{p+n}(f_*(*), R).$$

Démonstration : Comme $\text{Ext}_R^i(A, R) = 0$ pour $i \neq d - n$ (Théorème 21.20), c'est une conséquence immédiate du Théorème précédent.

Corollaire 21.25 : Soient A un anneau local noethérien de dimension d et M un A -module de type fini de Cohen-Macaulay de dimension d . Si $B = A/\mathcal{I}$ est un quotient artinien de A , on a

$$\text{Ext}_A^d(N, M) \simeq \text{Hom}_B(N, \text{Ext}_A^d(B, M))$$

pour tout B -module de type fini N .

Démonstration : La suite spectrale $E_2^{p,q} = \text{Ext}_B^p(N, \text{Ext}_A^q(B, M))$ converge vers $\text{Ext}_A^p(N, M)$. Comme $\text{Ext}_A^q(B, M) = 0 = \text{Ext}_A^q(N, M)$ pour $q < d$ (corollaire 21.16), on a

$$\text{Hom}_B(N, \text{Ext}_A^d(B, M)) = E_2^{0,d} \simeq \text{Ext}_A^d(N, M).$$

Corollaire 21.26 : Soient A un anneau local noethérien et M un A -module de type fini. Si (a_1, \dots, a_r) est une suite A et M -régulière, il y a, pour tout $A/(a_1, \dots, a_r)$ -module de type fini N et pour tout $i \geq 0$, des isomorphismes naturels

$$\text{Ext}_{A/(a_1, \dots, a_r)}^i(N, M/(a_1, \dots, a_r)M) \simeq \text{Ext}_A^{i+r}(N, M).$$

Démonstration : Utilisant que (a_1, \dots, a_r) est une suite A et M -régulière, on montre

$$\text{Ext}_A^r(A/(a_1, \dots, a_r), M) \simeq M/(a_1, \dots, a_r)M \quad \text{et}$$

$$\text{Ext}_A^i(A/(a_1, \dots, a_r), M) = (0) \quad \text{pour } i \neq r.$$

L'isomorphisme annoncé est alors dans la suite spectrale de changement d'anneaux.

Chapter 22

Dualités.

22.1 Dualité sur un anneau local régulier.

Théorème 22.1 : Soit R un anneau local régulier de dimension d . Si M est un R -module de type fini, il existe une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^{d-q}(M, R), R)$$

qui converge vers l'homologie d'un complexe K^* tel que

$$H^d(K^*) = M \quad \text{et} \quad H^i(K^*) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq d.$$

Démonstration :

On considère une résolution projective (P_i) de M et une résolution injective E^j de R . Elles induisent un double complexe

$$\text{Hom}_R((P_{d-q})^\vee, E^p),$$

muni de dérivations

$$d : \text{Hom}_R((P_{d-q})^\vee, E^p) \rightarrow \text{Hom}_R((P_{d-(q+1)})^\vee, E^p) \quad \text{et} \quad \delta : \text{Hom}_R((P_{d-q})^\vee, E^p) \rightarrow \text{Hom}_R((P_{d-q})^\vee, E^{p+1}).$$

On a d'une part

$$E_1^{p,q} = H^p(\text{Hom}_R((P_{d-q})^\vee, E^*)) = \text{Ext}_R^p((P_{d-q})^\vee, R),$$

donc

$$E_1^{p,q} = 0 \quad \text{pour} \quad p > 0 \quad \text{et} \quad E_1^{0,q} = P_{d-q}.$$

L'application $\delta_1 : E_1^{0,q} \rightarrow E_1^{0,q+1}$ est l'application $P_{d-q} \rightarrow P_{d-(q+1)}$ de la résolution de M . Il reste

$$E_2^{p,q} = 0 \quad \text{pour} \quad (p, q) \neq (0, d) \quad \text{et} \quad E_2^{0,d} = M.$$

Donc l'homologie du complexe total associé K^* est

$$H^d(K^*) = M \quad \text{et} \quad H^i(K^*) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq d.$$

D'autre part, on a

$$E_1^{p,q} = H^q(\text{Hom}_R((P_{d-*})^\vee, E^p)) = \text{Hom}_R(\text{Ext}_R^{d-q}(M, R), E^p),$$

donc

$$E_2^{p,q} = H^p(\text{Hom}_R(\text{Ext}_R^{d-q}(M, R), E^*)) = \text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^{d-q}(M, R), R).$$

Le Théorème est démontré.

Donnons quelques applications de cet énoncé.

Corollaire 22.2 : *Si M est un R -module de type fini de dimension n il existe une application naturelle*

$$M \rightarrow \text{Ext}_R^{d-n}(\text{Ext}_R^{d-n}(M, R), R)$$

qui est injective si et seulement si M est équidimensionnel et \mathcal{S}_1 et bijective si et seulement si M est équidimensionnel et \mathcal{S}_2 .

Démonstration : On considère donc la suite spectrale $E_2^{p,q} = \text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^{d-q}(M, R), R)$. On sait que sa limite M admet une filtration M_i telle qu'il y a des isomorphismes canoniques $M_s/M_{s+1} \simeq E_\infty^{s,d-s}$.

Comme $\dim(M) = n$, on a $\dim(\text{Ext}_R^i(M, R)) \leq n$. Il en résulte que

$$E_2^{p,q} = 0, \quad \text{donc} \quad E_\infty^{p,q} = 0, \quad \text{pour} \quad p < d - n \quad \text{ou} \quad q > n.$$

En particulier, on a

$$E_\infty^{s,d-s} = 0 \quad \text{pour} \quad s < d - n, \quad \text{et} \\ E_r^{d-n,n} \subset E_2^{d-n,n} \quad \text{pour} \quad r \geq 2, \quad \text{donc} \quad E_\infty^{d-n,n} \subset E_2^{d-n,n}.$$

Autrement dit, $M_s/M_{s+1} = 0$ pour $s < d - n$ et

$$M/M_{d-n+1} \simeq E_\infty^{d-n,n} \subset E_2^{d-n,n} = \text{Ext}_R^{d-n}(\text{Ext}_R^{d-n}(M, R), R).$$

Nous avons décrit l'application naturelle

$$M \rightarrow \text{Ext}_R^{d-n}(\text{Ext}_R^{d-n}(M, R), R).$$

Cette application est injective si et seulement si

$$M_s/M_{s+1} \simeq E_\infty^{s,d-s} = 0 \quad \text{pour} \quad s > d - n.$$

Mais on sait que M est équidimensionnel et \mathcal{S}_1 si et seulement si

$$\text{Ext}_R^{d-n+i}(\text{Ext}_R^{d-n+i}(M, R), R) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i, \quad \text{soit} \quad E_2^{s,d-s} = 0 \quad \text{pour} \quad s > d - n.$$

Nous devons donc prouver que

$$E_2^{s,d-s} = 0 \quad \text{pour } s > d - n \iff E_\infty^{s,d-s} = 0 \quad \text{pour } s > d - n.$$

$$\text{Mais } E_2^{s,d-s} = 0 \quad \text{pour } s > d - n \implies E_\infty^{s,d-s} = 0 \quad \text{pour } s > d - n$$

est évident.

Réciproquement, supposons qu'il existe $i > 0$ tel que

$$E_2^{d-n+i,n-i} = \text{Ext}_R^{d-n+i}(\text{Ext}_R^{d-n+i}(M, R), R) \neq 0.$$

Dans ce cas, on a

$$\dim(\text{Ext}_R^{d-n+i}(\text{Ext}_R^{d-n+i}(M, R), R) = n - i,$$

d'après le Corollaire 21.17. Mais

$$E_2^{d-n+i-2,n-i+1} = 0 \quad \text{pour } i > 0 \quad \text{et} \quad \dim(E_2^{d-n+i+2,n-i-1}) \leq n - i - 2.$$

Ceci implique $E_3^{d-n+i,n-i} \neq 0$, puis $E_r^{d-n+i,n-i} \neq 0$ pour $r \geq 2$, par une récurrence évidente, donc

$$E_\infty^{d-n+i,n-i} \neq 0.$$

Supposons maintenant que M est équidimensionnel et \mathcal{S}_1 et montrons que

$$M \text{ est } \mathcal{S}_2 \iff E_\infty^{d-n,n} = E_2^{d-n,n}.$$

Rappelons que M est équidimensionnel et \mathcal{S}_2 si et seulement si

$$E_2^{d-n+i,n-j} = \text{Ext}_R^{d-n+i}(\text{Ext}_R^{d-n+j}(M, R), R) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \quad \text{et} \quad i < j + 2.$$

En particulier, si M est \mathcal{S}_2 on a $E_2^{d-n+r,n-r+1} = 0$, pour $r > 0$. Donc les dérivations

$$d_r : E_r^{d-n,n} \rightarrow E_r^{d-n+r,n-r+1}$$

sont nulles, et

$$E_2^{d-n,n} = E_3^{d-n,n} = \dots = E_r^{d-n,n} = E_\infty^{d-n,n}.$$

Réciproquement, si $E_2^{d-n,n} = E_3^{d-n,n} = \dots = E_r^{d-n,n} = E_\infty^{d-n,n}$, les dérivations

$$d_r : E_r^{d-n,n} \rightarrow E_r^{d-n+r,n-r+1}$$

sont nulles pour tout $r > 1$. Comme de plus $E_r^{d-n-i,m} = 0$ pour tout $i > 0$, on a

$$E_{r+1}^{d-n+r,n-r+1} = \text{Ker}(E_r^{d-n+r,n-r+1} \rightarrow E_r^{d-n+2r,n-2r+2}) \quad \text{pour } r \geq 1.$$

Supposons que M n'est pas \mathcal{S}_2 . Soit alors r minimum tel que

$$E_2^{d-n+r,n-r+1} = \text{Ext}_R^{d-n+r}(\text{Ext}_R^{d-n+r-1}(M, R), R) \neq 0.$$

Comme M est équidimensionnel et \mathcal{S}_1 , on a $\dim(\text{Ext}_R^{d-n+r-1}(M, R)) \leq n - r$. On en déduit

$$\dim(\text{Ext}_R^{d-n+r}(\text{Ext}_R^{d-n+r-1}(M, R), R)) = \dim(\text{Ext}_R^{d-n+r-1}(M, R)) = n - r,$$

$$\text{soit } \dim(E_2^{d-n+r, n-r+1}) = n - r.$$

Mais , pour tout $i > 1$, on a

$$\dim(\text{Ext}_R^{d-n+r+i}(\text{Ext}_R^{d-n+r+i-2}(M, R), R)) \leq (n - r - i),$$

$$\text{donc } \dim(E_i^{d-n+r+i, n-r-i+2}) \leq (n - r - i).$$

On en déduit facilement que $E_s^{d-n+r, n-r+1}$ est non nul de dimension $n - r$, pour tout s , donc que

$$E_\infty^{d-n+r, n-r+1} \neq 0.$$

Mais ceci contredit la convergence de la suite spectrale vers (0) en degré $d + 1$. Le Corollaire est démontré.

22.2 Modules dualisants sur un anneau de Cohen-Macaulay.

Définition 22.3 : Soit (A, \mathcal{M}) un anneau local de Cohen-Macaulay. On dit qu'un A -module de type fini D est dualisant si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) L'application naturelle $A \rightarrow \text{Hom}_A(D, D)$ est injective.
- (ii) D est de Cohen-Macaulay.
- (iii) $\text{Ext}_A^{\dim A}(A/\mathcal{M}, D) \simeq A/\mathcal{M}$.

Remarques :

(i) : Si A est artinien, i.e. $\dim(A) = 0$, nous avons vu qu'un A -module de type fini D vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) si et seulement si l'homomorphisme d'évaluation

$$e_{D, M} : M \rightarrow \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(M, D), D)$$

est un isomorphisme pour tout M de type fini. C'est le Théorème 6.15.

(ii) : Si R est un anneau local régulier, un R -module est dualisant si et seulement si il est libre de rang 1.

(iii) : On a évidemment $\text{Supp}(D) = \text{Spec}A$, donc $\dim D = \dim A$, et plus précisément

$$\text{Ass}(D) = \text{Ass}(A).$$

Dégageons une fois pour toutes l'outil suivant.

Lemme 22.4 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local et M un A -module. Soient i et r des entiers tels que $l(\text{Ext}_A^i(A/\mathcal{M}, M)) = r$. Alors, pour tout A -module N de longueur finie, on a

$$l(\text{Ext}_A^i(N, M)) \leq rl(N).$$

Démonstration :

Soit $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules de longueur finie.

On a $l(N) = l(N') + l(N'')$. La suite exacte induite

$$\text{Ext}_A^i(N'', D) \rightarrow \text{Ext}_A^i(N, D) \rightarrow \text{Ext}_A^i(N', D)$$

démontre alors le Lemme par récurrence sur $l(N)$.

Théorème 22.5 : *Si D est A -module dualisant et \mathcal{P} un idéal premier de A , alors $D_{\mathcal{P}}$ est un $A_{\mathcal{P}}$ -module dualisant.*

Démonstration :

On peut évidemment supposer $\dim(A/\mathcal{P}) = 1$, soit $\dim A_{\mathcal{P}} = \dim A - 1$. Posons $d = \dim A$.

Il est clair que $D_{\mathcal{P}}$ est de Cohen-Macaulay et que l'application naturelle $A_{\mathcal{P}} \rightarrow \text{Hom}_{A_{\mathcal{P}}}(D_{\mathcal{P}}, D_{\mathcal{P}})$ est injective. Il nous faut prouver

$$\text{Ext}_{A_{\mathcal{P}}}^{d-1}(A_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}, D_{\mathcal{P}}) \simeq A_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}.$$

Nous savons (corollaire 21.16) que le $A_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$ -espace vectoriel $\text{Ext}_{A_{\mathcal{P}}}^{d-1}(A_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}, D_{\mathcal{P}})$ est non nul. Soit n son rang. Nous voulons prouver $n = 1$.

Comme $\text{Ext}_A^{d-1}(A/\mathcal{P}, D)$ est un A/\mathcal{P} -module de rang n , on peut trouver n éléments du module linéairement indépendants sur A/\mathcal{P} . Ils induisent une suite exacte

$$0 \rightarrow n(A/\mathcal{P}) \rightarrow \text{Ext}_A^{d-1}(A/\mathcal{P}, D) \rightarrow C \rightarrow 0,$$

où C est un A/\mathcal{P} -module de torsion, donc un A -module de longueur finie.

Si $a \notin \mathcal{P}$, considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & 0_C : a \\ & & & & & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & n(A/\mathcal{P}) & \rightarrow & \text{Ext}_A^{d-1}(A/\mathcal{P}, D) & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\ & & a \downarrow & & a \downarrow & & a \downarrow \\ 0 & \rightarrow & n(A/\mathcal{P}) & \rightarrow & \text{Ext}_A^{d-1}(A/\mathcal{P}, D) & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & n((A/\mathcal{P})/a(A/\mathcal{P})) & \rightarrow & \text{Ext}_A^{d-1}(A/\mathcal{P}, D)/a\text{Ext}_A^{d-1}(A_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}, D) & \rightarrow & C/aC \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Il démontre, en utilisant le diagramme du serpent :

$$nl(A/(\mathcal{P} + aA)) - l(\text{Ext}_A^{d-1}(A/\mathcal{P}, D)/a\text{Ext}_A^{d-1}(A_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}, D)) = l(0_C : a) - l(C/aC).$$

Mais l'exactitude de la dernière colonne démontre

$$l(0_C : a) - l(C/aC) = l(C) - l(C) = 0, \quad \text{donc}$$

$$nl(A/(\mathcal{P} + aA)) = l(\text{Ext}_A^{d-1}(A/\mathcal{P}, D)/a\text{Ext}_A^{d-1}(A/\mathcal{P}, D)).$$

Comme $A/(\mathcal{P} + aA)$ est un A -module de longueur finie, on a d'après le Corollaire 21.16

$$\text{Ext}_A^{d-1}(A/(\mathcal{P} + aA), D) = 0,$$

donc une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Ext}_A^{d-1}(A/\mathcal{P}, D) \xrightarrow{a} \text{Ext}_A^{d-1}(A/\mathcal{P}, D) \rightarrow \text{Ext}_A^d(A/(\mathcal{P} + aA), D),$$

et une inclusion

$$\text{Ext}_A^{d-1}(A/\mathcal{P}, D)/a\text{Ext}_A^{d-1}(A/\mathcal{P}, D) \subset \text{Ext}_A^d(A/(\mathcal{P} + aA), D).$$

On trouve alors

$$nl(A/(\mathcal{P} + aA)) \leq l(\text{Ext}_A^d(A/(\mathcal{P} + aA), D)).$$

Mais d'après le Lemme 22.4, on a

$$l(\text{Ext}_A^d(A/(\mathcal{P} + aA), D)) \leq l(A/(\mathcal{P} + aA)).$$

Il en résulte que $n = 1$ et le Théorème est démontré.

Théorème 22.6 : *Soit (A, \mathcal{M}) un anneau local de Cohen-Macaulay. Si D est un A -module dualisant, l'application naturelle $A \rightarrow \text{Hom}_A(D, D)$ est un isomorphisme*

Démonstration : On fait une récurrence sur $d = \dim A$.

Pour $d = 0$, c'est une conséquence du Théorème 6.15 et du Lemme 22.4. En effet, on a $l(\text{Hom}_A(D, D)) \leq l(D) = l(A)$. Comme $A \rightarrow \text{Hom}_A(D, D)$ est injective, on en déduit $l(\text{Hom}_A(D, D)) = l(D) = l(A)$, donc l'application est nécessairement surjective.

Supposons maintenant $d = 1$. Soit $B = \text{coker}(A \rightarrow \text{Hom}_A(D, D))$. D'après le cas précédent et le Théorème 22.5 $A_{\mathcal{P}} \rightarrow \text{Hom}_{A_{\mathcal{P}}}(D_{\mathcal{P}}, D_{\mathcal{P}})$ est un isomorphisme pour tout idéal premier minimal \mathcal{P} de A . Donc $l(B) < \infty$.

Soit $a \in A$ un élément A et D -régulier. La suite exacte

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{a} A \rightarrow A/aA \rightarrow 0$$

induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(A, D) \xrightarrow{a} \text{Hom}_A(A, D) \rightarrow \text{Ext}_A^1(A/aA, D) \rightarrow 0$$

qui montre

$$\text{Ext}_A^1(A/aA, D) \simeq D/aD.$$

Par le Corollaire 21.26 (suite spectrale de changement d'anneau), on en déduit

$$\text{Hom}_{A/aA}(A/\mathcal{M}, D/aD) \simeq \text{Ext}_A^1(A/\mathcal{M}, D) \simeq A/\mathcal{M}.$$

Montrons que D/aD est un A/aA -module dualisant. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{a} & A & \rightarrow & A/aA \rightarrow 0 \\
 & & e_A \downarrow & & e_A \downarrow & & e_{A/aA} \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \text{Hom}_A(D, D) & \xrightarrow{a} & \text{Hom}_A(D, D) & \rightarrow & \text{Hom}_{A/aA}(D/aD, D/aD) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & B & \xrightarrow{a} & B & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

dont les lignes et les colonnes sont exactes. D'après le diagramme du serpent, il donne

$$l(A/aA) - l(\text{Hom}_A(D, D)/a\text{Hom}_A(D, D)) = l(B) - l(B) = 0.$$

Comme $\text{Hom}_A(D, D)/a\text{Hom}_A(D, D) \subset \text{Hom}_{A/aA}(D/aD, D/aD)$, on en déduit

$$l(A/aA) \leq l(\text{Hom}_{A/aA}(D/aD, D/aD)).$$

Par le Lemme 22.4, on a

$$l(A/aA) \geq l(\text{Hom}_{A/aA}(A/aA, D/aD)) = l(D/aD) \geq l(\text{Hom}_{A/aA}(D/aD, D/aD)), \quad \text{donc}$$

$$l(A/aA) = l(D/aD) = l(\text{Hom}_{A/aA}(D/aD, D/aD)).$$

Il en résulte (Théorème 6.15) que D/aD est un A/aA -module dualisant. Revenant à notre diagramme commutatif, nous savons que l'homomorphisme $e_{A/aA}$ est un isomorphisme (car $\dim(A/aA) = 0$), donc $B \xrightarrow{a} B$ est surjectif, ce qui implique $B = (0)$ par le Lemme de Nakayama.

Si $d = 2$, considérons toujours $B = \text{coker}(A \rightarrow \text{Hom}_A(D, D))$. Supposons $B \neq (0)$. Nous venons de démontrer que si $\mathcal{P} \in \text{Supp}(B)$, alors $\dim(A_{\mathcal{P}}) \geq 2$, donc $\text{prof}(A_{\mathcal{P}}) \geq 2$.

Soit \mathcal{P} est un idéal premier minimal de B . Le Lemme 16.17 appliqué à la suite exacte

$$0 \rightarrow A_{\mathcal{P}} \rightarrow \text{Hom}_{A_{\mathcal{P}}}(D_{\mathcal{P}}, D_{\mathcal{P}}) \rightarrow B_{\mathcal{P}} \rightarrow 0$$

montre $\text{prof}(A_{\mathcal{P}}) = 1$ (car $l(B_{\mathcal{P}}) < \infty$ et $\text{prof}(\text{Hom}_{A_{\mathcal{P}}}(D_{\mathcal{P}}, D_{\mathcal{P}})) \geq 1$), donc une contradiction. Le Théorème est démontré.

Théorème 22.7 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local de Cohen-Macaulay, D un A -module de type fini et $a \in \mathcal{M}$ un élément régulier dans A et D . Alors D est un A -module dualisant si et seulement si D/aD est un A/aA -module dualisant.

Démonstration :

Il est clair que D est de Cohen-Macaulay de dimension $\dim(A)$ si et seulement si D/aD est de Cohen-Macaulay de dimension $\dim(A/aA)$.

Appliquant le Corollaire 21.26, on a

$$\text{Ext}_A^{\dim A}(A/\mathcal{M}, D) \simeq \text{Ext}_{A/aA}^{\dim A - 1}(A/\mathcal{M}, D/aD).$$

On considère à nouveau le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{a} & A & \rightarrow & A/aA & \rightarrow & 0 \\
& & e_A \downarrow & & e_A \downarrow & & e_{A/aA} \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \text{Hom}_A(D, D) & \xrightarrow{a} & \text{Hom}_A(D, D) & \rightarrow & \text{Hom}_{A/aA}(D/aD, D/aD) & \rightarrow & 0
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes.

Si D est un A -module dualisant, e_A est un isomorphisme d'après le Théorème 22.6. Donc $e_{A/aA}$ est injectif et D/aD est un A/aA -module dualisant.

Réciproquement, si D/aD est un A/aA -module dualisant, $e_{A/aA}$ est un isomorphisme. Ceci démontre $\text{Ker}(e_A) = (0)$ (et $\text{Coker}(e_A) = (0)$), en utilisant le diagramme du serpent et le Lemme de Nakayama.

Théorème 22.8 : *Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local de Cohen-Macaulay de dimension d et D un A -module de type fini de Cohen-Macaulay de dimension d . Alors D est un A -module dualisant si et seulement si $l(\text{Ext}_A^d(M, D)) = l(M)$ pour tout A -module de longueur finie M .*

Démonstration : On fait une récurrence sur d , le résultat étant acquis pour $d = 0$ (Théorème 6.15). Si $d > 0$, soit a un élément A et D -régulier. Comme pour tout A -module de longueur finie M tel que $aM = (0)$ il existe un isomorphisme $\text{Ext}_A^d(M, D) \simeq \text{Ext}_{A/aA}^{d-1}(M, D/aD)$, on conclut avec le Théorème 22.7.

Théorème 22.9 : *Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local de Cohen-Macaulay de dimension d et D un A -module de type fini de Cohen-Macaulay de dimension d tel que $l(\text{Ext}_A^d(A/\mathcal{M}, D)) = 1$.*

Pour que D soit un A -module dualisant, il faut et il suffit que $d_i(A)(D) = d$.

Démonstration : Supposons d'abord que D est dualisant. Soit (a_1, \dots, a_d) une suite A et D -régulière. Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{M}/(a_1, \dots, a_d) \rightarrow A/(a_1, \dots, a_d) \rightarrow A/\mathcal{M} \rightarrow 0,$$

de A -modules de longueurs finies. La somme alternée des longueurs est nulle.

Comme $\text{Ext}_A^{d-1}(\mathcal{M}/(a_1, \dots, a_d), D) = 0$ et $dp_A(A/(a_1, \dots, a_d)) = d$, elle induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ext}_A^d(A/\mathcal{M}, D) \rightarrow \text{Ext}_A^d(A/(a_1, \dots, a_d), D) \rightarrow$$

$$\text{Ext}_A^d(\mathcal{M}/(a_1, \dots, a_d), D) \rightarrow \text{Ext}_A^{d+1}(A/\mathcal{M}, D) \rightarrow 0.$$

Comme $\text{Ext}_A^d(\cdot, D)$ préserve la longueur (Théorème 22.8), elle démontre

$$\text{Ext}_A^{d+1}(A/\mathcal{M}, D) = 0.$$

Le Lemme 22.4 implique alors $\text{Ext}_A^{d+1}(N, D) = 0$ pour tout A -module N de dimension 0.

On en déduit $\text{Ext}_A^{d+i}(N, D) = 0$ pour $i \geq 1$, pour tout A -module N de dimension 0, par récurrence sur i . En effet, supposons cette assertion démontrée pour i . L'application injective

$$0 \rightarrow \text{Ext}_A^{d+i+1}(A/\mathcal{M}, D) \rightarrow \text{Ext}_A^{d+i+1}(A/(a_1, \dots, a_d), D) = (0)$$

démontre $\text{Ext}_A^{d+i+1}(A/\mathcal{M}, D) = (0)$, et on conclut par le Lemme 22.4.

Montrons ensuite, par récurrence sur r , que pour tout A -module M , de type fini et de dimension $\leq r$, on a $Ext_A^{d+i}(M, D) = 0$ pour $i \geq 1$.

Un tel module admet une filtration finie $(M_i)_{i \geq 0}$ telle que pour tout $i \geq 1$ il existe un idéal premier \mathcal{P}_i vérifiant $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathcal{P}_i$. Il suffit donc de prouver $Ext_A^{d+i}(A/\mathcal{P}, D) = 0$ pour tout idéal premier \mathcal{P} tel que $dim(A/\mathcal{P}) = r > 0$. Soit $a \in \mathcal{M}$, $a \notin \mathcal{P}$. La suite exacte

$$0 \rightarrow A/\mathcal{P} \xrightarrow{a} A/\mathcal{P} \rightarrow A/(\mathcal{P} + aA) \rightarrow 0$$

induit une suite exacte

$$Ext_A^{d+i}(A/\mathcal{P}, D) \xrightarrow{a} Ext_A^{d+i}(A/\mathcal{P}) \rightarrow Ext_A^{d+i+1}(A/(\mathcal{P} + aA), D).$$

Comme $dim(A/(\mathcal{P} + aA)) < r$, on a $Ext_A^{d+i+1}(A/(\mathcal{P} + aA), D) = (0)$. On conclut par Nakayama. Utilisant le Théorème 21.14, on a démontré que $di_A(D) = d$.

Réciproquement, supposons $di_A(D) = d$. Toute suite exacte

$$0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$$

de A -modules de longueurs finies induit une suite exacte

$$0 \rightarrow Ext_A^d(N'', D) \rightarrow Ext_A^d(N, D) \rightarrow Ext_A^d(N', D) \rightarrow 0.$$

On démontre immédiatement par récurrence sur $l(N)$ que

$$l(Ext_A^d(N, D)) = l(N),$$

ce qui démontre que D est dualisant (Théorème 22.8).

Corollaire 22.10 : Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local de Cohen-Macaulay et D un A -module dualisant. Si M est un A -module de type fini,

$$prof(M) + \max\{i, Ext_A^i(M, D) \neq 0\} = dim(A).$$

Démonstration : On a $Ext_A^i(M, D) = (0)$ pour $i > dim(A)$ (Théorème 22.9). Faisons une récurrence sur $prof(M)$:

Si $prof(M) = 0$, on a $Hom_A(A/\mathcal{M}, M) \neq 0$. Il existe donc une application injective $A/\mathcal{M} \rightarrow M$ qui induit une application surjective $Ext_A^d(M, D) \rightarrow Ext_A^d(A/\mathcal{M}, D)$ (car $Ext_A^{d+1}(\cdot, D) = 0$), donc $Ext_A^d(M, D) \neq 0$.

Si $prof(M) > 0$, on considère un élément a régulier dans M , la suite exacte

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{a} M \rightarrow M/aM \rightarrow 0,$$

et la suite exacte induite

$$Ext_A^{i-1}(M/aM, D) \rightarrow Ext_A^i(M, D) \xrightarrow{a} Ext_A^i(M, D) \rightarrow Ext_A^i(M/aM, D).$$

L'hypothèse de récurrence et le Lemme de Nakayama prouve l'assertion.

Théorème 22.11 : *Si A est un anneau local de Cohen-Macaulay, deux A -modules dualisants sont isomorphes.*

Démonstration par récurrence sur $\dim A$:

Pour $\dim(A) = 0$, c'est le Théorème 6.16.

Soient D et D' deux A -modules dualisants.

Supposons $\dim A > 0$. Soit a un élément régulier dans A , D et D' . La suite exacte

$$0 \rightarrow D' \xrightarrow{a} D' \rightarrow D'/aD' \rightarrow 0$$

induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}(D, D') \xrightarrow{a} \operatorname{Hom}(D, D') \rightarrow \operatorname{Hom}(D, D'/aD') \rightarrow 0$$

car $\operatorname{Ext}_A^1(D, D') = 0$ d'après le Corollaire 22.10.

Mais $\operatorname{Hom}(D, D'/aD') = \operatorname{Hom}(D/aD, D'/aD')$. Nous savons que D/aD et D'/aD' sont deux A/aA -modules dualisants. Ils sont donc isomorphes par hypothèse de récurrence. Soit alors $u \in \operatorname{Hom}(D, D')$ un homomorphisme dont l'image v dans $\operatorname{Hom}(D/aD, D'/aD')$ est un isomorphisme. Le diagramme qui suit, combiné avec le Lemme de Nakayama, démontre que u est aussi un isomorphisme.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & K & \xrightarrow{a} & K & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & D & \xrightarrow{a} & D & \rightarrow & D/aD \rightarrow 0 \\ & & u \downarrow & & u \downarrow & & v \downarrow \\ 0 & \rightarrow & D' & \xrightarrow{a} & D' & \rightarrow & D'/aD' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & C & \xrightarrow{a} & C & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Théorème 22.12 : *Soient (A, \mathcal{M}) un anneau local de Cohen-Macaulay de dimension d et D un A -module dualisant.*

Si B est une A -algèbre finie et \mathcal{N} un idéal maximal de B tel que $B_{\mathcal{N}}$ est de Cohen-Macaulay de dimension n , alors $\operatorname{Ext}_A^{d-n}(B, D)_{\mathcal{N}}$ est un $B_{\mathcal{N}}$ -module dualisant.

Démonstration par récurrence sur n .

Pour $n = 0$, on peut, d'après le Théorème chinois, supposer que B est local d'idéal maximal \mathcal{N} .

Soit (a_1, \dots, a_d) une suite A -régulière telle que $(a_1, \dots, a_d)B = (0)$. On a, d'après le Corollaire 21.26

$$\operatorname{Ext}_A^d(B, D) \simeq \operatorname{Hom}_A(B, D/(a_1, \dots, a_d)D).$$

Comme $D/(a_1, \dots, a_d)D$ est un $A/(a_1, \dots, a_d)$ -module dualisant, on sait que $\operatorname{Hom}_A(B, D/(a_1, \dots, a_d)D)$ est un B -module dualisant (Théorème 6.17).

Supposons $n > 0$ et montrons par récurrence sur n que $\operatorname{Ext}_A^{d-n+1}(B, D)_{\mathcal{N}} = 0$ et que $\operatorname{Ext}_A^{d-n}(B, D)_{\mathcal{N}}$ est un $B_{\mathcal{N}}$ -module dualisant.

Considérons $f : A \rightarrow B_{\mathcal{N}}$ l'homomorphisme structural. Comme B est fini sur A , l'idéal maximal $\mathcal{N}B_{\mathcal{N}}$ est le seul idéal premier de $B_{\mathcal{N}}$ contenant $f(\mathcal{M})$. Donc $f(\mathcal{M})$ n'est pas contenu dans un idéal premier associé de $B_{\mathcal{N}}$. D'après le Lemme d'évitement généralisé (Théorème 1.31), on montre facilement qu'il existe $a \in \mathcal{M}$, régulier dans A et dans $B_{\mathcal{N}}$ et tel que $\dim(B/aB) = n - 1$. La suite exacte

$$0 \rightarrow B_{\mathcal{N}} \xrightarrow{a} B_{\mathcal{N}} \rightarrow B_{\mathcal{N}}/aB_{\mathcal{N}} \rightarrow 0$$

induit une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ext}_A^{d-n}(B, D)_{\mathcal{N}} \xrightarrow{a} \text{Ext}_A^{d-n}(B, D)_{\mathcal{N}} \rightarrow \text{Ext}_A^{d-n+1}(B/aB, D)_{\mathcal{N}} \\ \rightarrow \text{Ext}_A^{d-n+1}(B, D)_{\mathcal{N}} \xrightarrow{a} \text{Ext}_A^{d-n+1}(B, D)_{\mathcal{N}} \rightarrow \text{Ext}_A^{d-n+2}(B/aB, D)_{\mathcal{N}}. \end{aligned}$$

Celle-ci prouve que $\text{Ext}_A^{d-n+1}(B, D)_{\mathcal{N}} = 0$ par le Lemme de Nakayama puis que

$$\text{Ext}_A^{d-n}(B, D)_{\mathcal{N}}/a\text{Ext}_A^{d-n}(B, D)_{\mathcal{N}} \simeq \text{Ext}_A^{d-n+1}(B/aB, D)_{\mathcal{N}}.$$

Mais il est clair par hypothèse de récurrence que $B_{\mathcal{N}}/aB_{\mathcal{N}}$ est un anneau local de Cohen-Macaulay et $\text{Ext}_A^{d-n+1}(B/aB, D)_{\mathcal{N}}$ un $B_{\mathcal{N}}/aB_{\mathcal{N}}$ -module dualisant. On conclut au moyen du Théorème 22.7

Définition 22.13 : *On dit qu'un anneau local noethérien de Cohen-Macaulay A est de Gorenstein si A est un A -module dualisant.*

Il est clair qu'un anneau local régulier est de Gorenstein.

Théorème 22.14 : *Si A est un anneau de Gorenstein et (a_1, \dots, a_r) une suite A -régulière, l'anneau quotient $A/(a_1, \dots, a_r)$ est de Gorenstein.*

Démonstration : Il suffit évidemment de le prouver pour $r = 1$.

Le A/aA -module $\text{Ext}_A^1(A/aA, A)$ est dualisant d'après le Théorème 22.12. L'isomorphisme

$$\text{Ext}_A^1(A/aA, A) \simeq A/aA,$$

est clair.

Définition 22.15 : *Un anneau quotient d'un anneau régulier R par une suite R -régulière est une intersection complète.*

On a donc démontré qu'une intersection complète est de Gorenstein.

22.3 Dualité sur un anneau de Cohen-Macaulay.

Théorème 22.16 : *Soient A un anneau local de Cohen-Macaulay de dimension d et D un A -module dualisant. Si M un R -module de type fini,*

$$\dim(\text{Ext}_A^{d-l}(M, D)) \leq l \quad \text{pour } l \geq 0.$$

Soit n la dimension de M . Si $r > 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) *M est équidimensionnel et vérifie la condition \mathcal{S}_r .*
- (ii) *$\dim(\text{Ext}_A^{d-n+i}(M, D)) \leq (n - i - r)$ pour $i > 0$ (le module (0) a toutes les dimensions).*

Démonstration : Cet énoncé généralise le Théorème 21.18 concernant les anneaux réguliers. La démonstration est identique à un détail près. Pour un anneau régulier R , on utilise la relation

$$dp_R(M) + prof(M) = dim(R).$$

Pour un anneau de Cohen-Macaulay, la relation correspondante (Corollaire 22.10) est

$$\max\{i, Ext_A^i(M, D) \neq 0\} + prof(M) = dim(A).$$

Procédant de ce principe, on démontre de même les deux énoncés qui suivent.

Corollaire 22.17 : Soient A un anneau local de Cohen-Macaulay de dimension d et D un A -module dualisant. Soit M un A -module de type fini de dimension n . Si $r > 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) M est équidimensionnel et vérifie la condition \mathcal{S}_r .
- (ii) $Ext_A^{d-n+i}(Ext_A^{d-n+j}(M, D), D) = 0$ pour $i < j + r$ et $1 \leq j$.

Théorème 22.18 : Soient A un anneau local régulier de dimension d et D un A -module dualisant. Soit $M \neq (0)$ un A -module de type fini. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) M est de Cohen-Macaulay de dimension n .
- (ii) $Ext_A^s(M, D) = 0$ pour $s \neq (d - n)$.

Si ces conditions sont réalisées, alors

$Ext_A^{d-n}(M, D)$ est de Cohen-Macaulay de dimension n ,
il existe un isomorphisme $M \simeq Ext_A^{d-n}(Ext_A^{d-n}(M, D), D)$.

On applique comme dans le cas régulier ces résultats à la suite spectrale de dualité sur un anneau de Cohen-Macaulay, que nous introduisons maintenant.

Théorème 22.19 : Soit A un anneau local de Cohen-Macaulay de dimension d et D un A -module dualisant. Si M est un A -module de type fini, il existe une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = Ext_A^p(Ext_A^{d-q}(M, D), D)$$

qui converge vers l'homologie d'un complexe K^* tel que

$$H^d(K^*) = M \quad \text{et} \quad H^i(K^*) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq d.$$

Démonstration :

On considère une résolution projective (éventuellement infinie) (P_i) de M et une résolution injective (finie) E^j de D . Elles induisent un double complexe

$$Hom_A((P_{d-q})^\vee, E^p).$$

L'étude des deux suites spectrales associées à ce double complexe établit ce Théorème exactement comme dans le cas où l'anneau A est régulier. Nous ne revenons pas sur cette preuve, ni sur celle de l'énoncé suivant.

Corollaire 22.20 : Si M est un A -module de type fini de dimension n il existe une application naturelle

$$M \rightarrow \text{Ext}_A^{d-n}(\text{Ext}_A^{d-n}(M, D), D)$$

qui est injective si et seulement si M est équidimensionnel et \mathcal{S}_1 et bijective si et seulement si M est équidimensionnel et \mathcal{S}_2 .

22.4 Retour au cas gradué.

Définition 22.21 : Soient A est un anneau gradué relevant et P_A son polynôme de Hilbert. Si A est de Cohen-Macaulay, on dit qu'un A -module gradué D est dualisant pour A si

- (i) $D_{\mathcal{P}}$ est un $A_{\mathcal{P}}$ -module dualisant pour tout idéal premier gradué \mathcal{P} de A ,
- (ii) $P_A(n) = l(A_n) + (-1)^{\dim A - 1} l(D_{-n})$ pour tout entier n .

Théorème 22.22 :

- (i) Si $R = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_d]$, le R -module gradué $R[-d-1]$ est dualisant.
- (ii) Si M est un R -module gradué de polynôme de Hilbert P_M , on a pour tout $n \in \mathbf{Z}$:

$$P_M(n) = l(M_n) + \sum (-1)^{d-i} l(\text{Ext}_R^i(M, R[-d-1])_{-n}).$$

Démonstration :

Pour tout idéal premier gradué \mathcal{P} , l'anneau local $R_{\mathcal{P}}$ est régulier. Les $R_{\mathcal{P}}$ -modules dualisant sont donc les $R_{\mathcal{P}}$ -modules libres de rang 1.

Rappelons que $P_R(X) = (X+1)\dots(X+d)/d!$.

Il est clair que pour $n \geq -d$, on a $l(R_n) = P_R(n)$ et $l(R_{-d-1-n}) = 0$.

Pour $n \leq -d-1$, i.e. $-n \geq d+1$, on a

$$l(R_n) = 0 \quad \text{et} \quad l(R_{-d-1-n}) = (-n-d)(-n-d+1)\dots(-n-1)/d! = (-1)^d(n+1)\dots(n+d)/d!$$

ce qui prouve (i).

Pour démontrer (ii), on considère un résolution projective graduée, à homomorphismes de degré 0, du R -module M :

$$0 \rightarrow \bigoplus_j R[-n_{1j}] \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_j R[-n_{0j}] \rightarrow M \rightarrow 0.$$

On a $l(M_n) = \sum_{i,j} (-1)^i l(R_{n-n_{ij}})$ et $P_M(n) = \sum_{i,j} (-1)^i P_R(n-n_{ij})$.

Appliquons le foncteur $\text{Hom}_R(\cdot, R[-d-1])$ à cette résolution :

$$0 \rightarrow \bigoplus_j R[n_{0j} - d - 1] \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_j R[n_{1j} - d - 1] \rightarrow 0.$$

Ce complexe a pour modules d'homologie les R -modules gradués $Ext_R^i(M, R[-d-1])$. L'additivité de la fonction longueur entraîne alors, pour tout n , l'égalité :

$$\sum_{i,j} (-1)^i l(R_{n_{ij}-n-d-1}) = \sum_i (-1)^i l(Ext_R^i(M, R[-d-1])_{-n}).$$

Mais d'après (i), on a :

$$(-1)^i [l(R_{n-n_{ij}}) + (-1)^d l(R_{n_{ij}-n-d-1})] = (-1)^i P_R(n - n_{ij}).$$

Donc

$$\sum_{i,j} (-1)^i [l(R_{n-n_{ij}}) + (-1)^d l(R_{n_{ij}-n-d-1})] = \sum_{i,j} (-1)^i P_R(n - n_{ij}) = P_M(n).$$

Finalement on trouve l'égalité annoncée :

$$l(M_n) + \sum (-1)^{d-i} l(Ext_R^i(M, R[-d-1])_{-n}) = P_M(n).$$

Théorème 22.23 :

(i) Si $R = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_d]$ et A est une R -algèbre graduée finie de Cohen-Macaulay, de dimension $r+1$, le A -module gradué $D_A = Ext_R^{d-r}(A, R[-d-1])$ est un A -module gradué dualisant.

(ii) Si M est un R -module gradué de polynôme de Hilbert P_M , on a pour tout $n \in \mathbf{Z}$:

$$P_M(n) = l(M_n) + \sum (-1)^{r-i} l(Ext_A^i(M, D_A)_{-n}).$$

Démonstration :

Compte tenu du Théorème 22.12, pour démontrer (i) il nous reste à prouver

$$P_A(n) = l(A_n) + (-1)^r l((D_A)_{-n}).$$

Mais comme, d'après le Théorème 21.20, on a $Ext_R^i(A, R[-d-1]) = 0$ pour $i \neq (d-r)$, c'est une conséquence immédiate du Théorème 22.22.

Pour (ii), on utilisera le Théorème 22.22 d'une part, et les isomorphismes (homogènes de degrés 0)

$$Ext_R^{d-r+i}(M, R[-d-1]) \simeq Ext_A^i(M, Ext_R^{d-r}(A, R[-d-1]))$$

donnés par la suite spectrale de changement d'anneaux (Corollaire 21.24), d'autre part.

Concluons ce chapitre par le Théorème d'unicité qui suit. Le Lecteur pourra adapter au cas gradué la démonstration fournie dans le cas local!

Théorème 22.24 : Si A est un anneau gradué projetant de Cohen-Macaulay, deux A -modules dualisants gradués sont isomorphes.

Chapter 23

Schémas affines

23.1 L'espace affine \mathbf{A}_n .

Nous savons, c'est le Théorème des zéros de Hilbert, que

$$x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \mathcal{M}_x = (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$$

est une application bijective de l'ensemble \mathbf{C}^n dans l'ensemble des idéaux maximaux de $R = \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$. La Topologie de Zariski sur $\text{Spec}R$ induit donc sur \mathbf{C}^n une topologie, dite aussi de Zariski.

Un polynôme $P \in R = \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ est une fonction partout définie sur \mathbf{C}^n .

Une fonction rationnelle P/Q , $P, Q \in R = \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$, est définie sur ouvert de \mathbf{C}^n (pour la topologie de Zariski).

Définition 23.1 : Le corps des fractions de R est le corps des fonctions rationnelles sur \mathbf{C}^n .

L'anneau local $R_{\mathcal{M}_x}$ est l'anneau des fonctions définies au point x de \mathbf{C}^n (on dira aussi l'anneau local de x).

Si U est un ouvert pour la Topologie de Zariski, l'anneau $A(U) = \bigcap_{x \in U} R_{\mathcal{M}_x}$ est l'anneau des fonctions définies sur U .

Si $x \in U' \subset U$, les homomorphismes naturels

$$A(U) \rightarrow A(U') \rightarrow R_{\mathcal{M}_x}$$

sont les homomorphismes de restriction.

Remarque : On a évidemment $A(\mathbf{C}^n) = R$.

Définition 23.2 : \mathbf{C}^n muni de la Topologie de Zariski, de ses anneaux de fonctions et des homomorphismes de restriction est l'espace affine \mathbf{A}_n .

L'anneau local du point x de \mathbf{A}_n est noté $O_{\mathbf{A}_n, x}$.

L'anneau des fonctions définies sur U est noté $\Gamma(U, O_{\mathbf{A}_n})$.

Remarque : Les anneaux locaux des points de \mathbf{A}_n sont réguliers de dimension n .

23.2 Schémas affines.

Si \mathcal{I} est un idéal de $R = \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$, notons $X = V(\mathcal{I})$ le fermé de \mathbf{C}^n formé par les points x vérifiant $f(x) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{I}$.

Si $A = \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}$, les points de X sont en bijection naturelle avec le spectre maximal $\text{Spec}_m(A)$ de A ainsi qu'avec l'ensemble des homomorphismes de \mathbf{C} -algèbres $A \rightarrow \mathbf{C}$. La Topologie de Zariski sur $\text{Spec}(A)$ induit sur X une topologie, dite encore de Zariski.

Nous voulons définir les anneaux de fonctions sur l'espace topologique $X = V(\mathcal{I}) = \text{Spec}_m(A)$ et lui donner une structure de "sous-schéma fermé de \mathbf{A}_n ".

Définition 23.3 *Si $x \in X$, soit \mathcal{M}_x l'idéal maximal correspondant de A . L'anneau $O_{X,x} = A_{\mathcal{M}_x} = O_{\mathbf{A}_n,x}/\mathcal{I}O_{\mathbf{A}_n,x}$ est l'anneau local (des fonctions définies en x) du point x dans X .*

Si \mathcal{I} est un idéal premier, i.e. si A est un anneau intègre, les anneaux locaux des points de X sont tous contenus dans le corps des fractions de A . Si U est un ouvert de X , on définit dans ce cas $\Gamma(U, O_X) = \bigcap_{x \in U} O_{X,x}$ comme anneau des fonctions sur X définies dans U . Enfin le corps des fractions de A est le corps des fonctions rationnelles sur X .

Si A n'est pas un anneau intègre, nous ne disposons plus d'un corps de fonctions rationnelles où plonger tous les anneaux de fonctions. Ceci nous oblige à donner la définition suivante dont la lourdeur tient aux contorsions qui accompagnent habituellement la localisation dans les anneaux non intègres.

Définition 23.4 : *Soit U un ouvert de X . L'anneau $\Gamma(U, O_X)$ des fonctions sur X définies dans U est le sous-anneau de $\prod_{x \in U} O_{X,x}$ formé par les éléments*

$$(a_x/b_x)_{x \in U}, \quad a_x \in A, \quad b_x \in A - \mathcal{M}_x,$$

tels que

$$b_{x'}a_x - b_x a_{x'} = 0 \quad \forall x, x' \in U.$$

Si $x \in U' \subset U$, les applications naturelles

$$\Gamma(U, O_X) \rightarrow \Gamma(U', O_X) \rightarrow O_{X,x}$$

sont les homomorphismes de restriction.

Proposition 23.5 : *L'application naturelle $A \xrightarrow{i} \Gamma(V, O_X)$, définie par $i(a) = (a/1)_{x \in X}$, est un isomorphisme.*

Démonstration :

L'application $A \rightarrow \prod_{x \in X} O_{X,x}$ est injective (Théorème 7.25), donc i aussi.

Si $a = (a_x/b_x)_{x \in X} \in \Gamma(X, O_X)$, on a $b_x a_x = i(a_x)$. Autrement dit, l'idéal conducteur de a dans $i(A)$ n'est contenu dans aucun idéal maximal de A . c'est donc l'anneau A et $a \in i(A)$.

Définition 23.6 : X muni de la Topologie de Zariski, de ses anneaux de fonctions et des homomorphismes de restriction est un schéma affine.

X est un sous-schéma fermé de \mathbf{A}_n .

L'anneau des fonctions définies en tout point d'un schéma affine est l'anneau du schéma.

Si cet anneau est réduit, nous dirons que le schéma affine est réduit.

Si cet anneau est intègre, le schéma est une variété affine.

ATTENTION : Si les espaces topologiques $V(\mathcal{I}^2)$ et $V(\mathcal{I})$ sont homéomorphes, les schémas affines $V(\mathcal{I}^2)$ et $V(\mathcal{I})$ sont distincts si $\mathcal{I} \neq \mathcal{I}^2$.

Nous avons vu que \mathcal{I} est le noyau de l'application $R \rightarrow \Gamma(V(\mathcal{I}), O_{V(\mathcal{I})})$. Nous avons donc l'énoncé :

Proposition 23.7 : Deux idéaux \mathcal{I} et \mathcal{I}' de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ définissent le même sous-schéma fermé de \mathbf{A}_n si et seulement si $\mathcal{I} = \mathcal{I}'$.

Définition 23.8 :

(i) Si \mathcal{I} est un idéal de l'anneau A du schéma affine X , le schéma affine $X' = V(\mathcal{I})$ d'anneau $A' = A/\mathcal{I}$ est un sous-schéma fermé de X . L'idéal \mathcal{I} est l'idéal de X' dans X .

Il y a donc une correspondance bijective entre les sous-schémas fermés de X et les idéaux de l'anneau de $A = \Gamma(X, O_X)$. Cette correspondance induit une bijection entre les sous-variétés fermées de X et les idéaux premiers de A .

(ii) Si U est un ouvert de X , tout ouvert U' de U est un ouvert de V . Nous définissons l'anneau idéaux maximaux \mathcal{M}_x de A tels que $f \notin \mathcal{M}_x$, est un sous-schéma ouvert de X .

Définition 23.9 : Soient X un schéma affine d'anneau A et Y et Z deux sous-schémas fermés de X d'idéaux \mathcal{I}_Y et \mathcal{I}_Z dans A .

(i) $Y \cap Z$ est le sous-schéma fermé de X d'idéal $\mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z$.

(ii) $Y \cup Z$ est le sous-schéma fermé de X d'idéal $\mathcal{I}_Y \cap \mathcal{I}_Z$.

On a les propriétés évidentes idéaux maximaux \mathcal{M}_x de A tels que $f \notin \mathcal{M}_x$, est un sous-schéma ouvert de X .

Définition 23.10 : Soient X un schéma affine d'anneau A et Y et Z deux sous-schémas fermés de X d'idéaux \mathcal{I}_Y et \mathcal{I}_Z dans A .

(i) $Y \cap Z$ est le sous-schéma fermé de X d'idéal $\mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_Z$.

(ii) $Y \cup Z$ est le sous-schéma fermé de X d'idéal $\mathcal{I}_Y \cap \mathcal{I}_Z$.

On a les propriétés évidentes suivantes :

Proposition 23.11 :

(i) Tout ouvert de X est réunion finie d'ouverts de la forme $D(f)$.

(ii) $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.

Définition 23.12 : Soient U un ouvert de X et $B = \Gamma(U, O_X)$.

Supposons que B est une \mathbf{C} -algèbre de type fini, donc l'anneau de fonctions d'un schéma affine.

Si $x \in U$, soit \mathcal{N}_x l'idéal maximal de B noyau de l'application composée

$$B = \Gamma(U, O_X) \rightarrow O_{X,x} \rightarrow O_{X,x}/\mathcal{M}_x O_{X,x}.$$

Si $x \rightarrow \mathcal{N}_x$ est une bijection entre U et le schéma affine d'anneau B , et si pour tout $x \in U$ l'application naturelle $B_{\mathcal{N}_x} \rightarrow O_{U,x}$ est un isomorphisme, on dit que U est un ouvert affine de X .

Exercice : Soit X un schéma affine. Démontrer que si $f \in A = \Gamma(X, O_X)$, alors $D(f)$ est un ouvert affine de X d'anneau $A_f = A[Z]/(Zf - 1)$.

La définition, donnée plus haut, de l'anneau des fonctions définies sur un ouvert d'un schéma affine est peu maniable. Le Théorème 16.24 donne une description plus maniable de cet anneau.

Théorème 23.13 : Soient X un schéma affine et U un ouvert de X . Si $f_1, \dots, f_n \in A = \Gamma(X, O_X)$ sont des fonctions telles que $U = \cup D(f_i)$, il existe une identification naturelle

$$\Gamma(U, O_X) = \text{Ker}(h : \oplus_i A_{f_i} \rightarrow \oplus_{i,j} A_{f_i f_j}),$$

où

$$h(x_1, \dots, x_n) = (x_i - x_j)_{i,j} \quad \text{avec} \quad x_i - x_j \in A_{f_i f_j}$$

(il y a un abus de langage, nous écrivons aussi x_i ou x_j pour l'image de x_i ou x_j dans $A_{f_i f_j}$).

23.3 Dimension d'un schéma affine.

Définition 23.14 : La dimension $\dim(X)$ d'un schéma affine X est la borne supérieure de la dimension des anneaux locaux de ses points.

Théorème 23.15 : Soient X une variété affine et K son corps des fonctions rationnelles. Alors pour tout point $x \in X$, on a

$$\dim(O_{X,x}) = \dim(X) = d^0 \text{tr}_{\mathbb{C}}(K).$$

C'est un cas particulier du Théorème 15.24.

Théorème 23.16 : Soit X un schéma affine.

(i) Il existe un fermé $F \subset X$ tel que

$$\dim(O_{X,x}) = \dim(X) \iff x \in F.$$

(ii) Il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $U \subset F$ et U est dense dans F .

C'est une conséquence immédiate du Théorème 15.26.

23.4 Composantes irréductibles d'un schéma affine.

Définition 23.17 : Soient X un schéma affine d'anneau de fonctions A et $(0) = (\cap_s \mathcal{I}_s) \cap (\cap_t \mathcal{J}_t)$ une décomposition primaire minimale de (0) dans A , où les idéaux \mathcal{I}_s sont primaires pour des idéaux premiers minimaux \mathcal{P}_s et les idéaux \mathcal{J}_t primaires pour des idéaux premiers immergés \mathcal{P}'_t .

On dit que les sous-schémas fermés X_s d'anneaux A/\mathcal{I}_s sont les composantes irréductibles de X , et éventuellement que X a une composante immergée en $V(\mathcal{P}'_t)$ (rappelons que \mathcal{J}_t n'est pas uniquement déterminé).

Si X est sans composante immergée, on écrit $X = \cup_s X_s$.

Le sous-schéma fermé $V(\cap_s \mathcal{P}_s)$ de X est le réduit X_{red} de X .

Si $X = X_{red}$, i.e. si A est réduit, on dit que X est réduit.

Si X n'a qu'une composante irréductible et n'a pas de composante immergée, on dit que X est irréductible.

Remarques :

(i) Une variété est un schéma réduit irréductible.

(ii) Un schéma irréductible est connexe.

Selon le Théorème 15.24 (bien compris) les anneaux locaux des points d'un schéma X n'ayant qu'une composante irréductible sont tous de dimension égale à la dimension de X .

Définition 23.18 : Si toutes les composantes irréductibles d'un schéma affine ont la même dimension, on dit que le schéma est équidimensionnel.

Dans la suite de ce texte, nous ne considérerons que des schémas équidimensionnels sans composantes immergées. Soulignons pourtant que les schémas non équidimensionnels et (ou) à composantes immergées ont joué récemment un rôle important dans la classification des variétés, par exemple comme déformations (limites, cas spéciaux) de variétés.

Proposition 23.19 : Soit X un schéma affine sans composante immergée. S'il existe un ouvert dense connexe U de X dont tous les anneaux locaux sont intègres, alors X est une variété.

Démonstration :

Soit $(0) = (\cap_s \mathcal{I}_s)$ la décomposition primaire minimale de (0) dans l'anneau A de X . Si \mathcal{I}_s est \mathcal{P}_s -primaire, on a $\mathcal{P}_s \in U$ car U est dense dans $\text{Spec}(A)$. Comme l'anneau local d'un point x de U est intègre, il existe un unique idéal premier minimal \mathcal{P}_s de A tel que $x \in V(\mathcal{P}_s)$. Les fermés $V(\mathcal{P}_s) \cap U$ de U sont donc les composantes connexes de U . Mais U est connexe, donc X est irréductible.

L'anneau A de X n'a donc qu'un idéal premier associé \mathcal{P} . Un élément a de \mathcal{P} est nilpotent. Donc pour tout $x \in U$, l'image de a dans $O_{X,x}$ est nulle. Autrement dit, si \mathcal{J} est l'annulateur de a , alors $V(\mathcal{J}) \cap U = \emptyset$. Si $a \neq 0$, i.e. si \mathcal{J} est un idéal, cet idéal est nécessairement contenu dans \mathcal{P} (l'unique idéal premier associé à A), ce qui contredit $V(\mathcal{J}) \cap U = \emptyset$.

Théorème 23.20 : Si X et Y sont deux sous-schémas fermés équidimensionnels de \mathbf{A}_n et Z une composante irréductible de $X \cap Y$, on a

$$\dim(Z) + n \geq \dim(X) + \dim(Y).$$

Démonstration :

C'est le Théorème 15.29. En effet, soient \mathcal{I} (resp. \mathcal{J}) l'idéal de X (resp. Y) dans l'anneau $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ de \mathbf{A}_n . Soit \mathcal{N} l'idéal premier minimal de $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ correspondant à Z . Il existe évidemment un idéal premier minimal \mathcal{P} de \mathcal{I} et un idéal premier minimal \mathcal{P}' de \mathcal{J} tels que $\mathcal{P} + \mathcal{P}' \subset \mathcal{N}$. Comme \mathcal{N} est nécessairement un idéal premier minimal de $\mathcal{P} + \mathcal{P}'$, notre assertion est bien le Théorème 15.29.

23.5 Lieu singulier d'un schéma affine.

Définition 23.21 : un point x d'un schéma affine X est non singulier si l'anneau local $O_{X,x}$ est régulier.

L'ensemble des points singuliers de X est le lieu singulier $LS(X)$ de X .

Il est clair qu'un point non singulier est contenu dans une seule composante irréductible de X .

Le Corollaire 18.21 implique évidemment l'énoncé suivant.

Théorème 23.22 : Soit X un schéma affine équidimensionnel. Le lieu singulier de X est un fermé de X .

Si X est réduit, l'ouvert des points non singuliers de X est dense dans X .

23.6 Morphismes de schémas affines.

Considérons deux schémas affines X et Y d'anneaux $A(X)$ et $A(Y)$. Montrons qu'un homomorphisme de \mathbf{C} -algèbres $f : A(Y) \rightarrow A(X)$ définit une application continue $\pi_f : X \rightarrow Y$.

Soient x est un point de X et \mathcal{M}_x l'idéal maximal de $A(X)$ correspondant. Les applications injectives

$$\mathbf{C} \hookrightarrow A(Y)/f^{-1}(\mathcal{M}_x) \hookrightarrow A(X)/\mathcal{M}_x = \mathbf{C}$$

montrent que $f^{-1}(\mathcal{M}_x)$ est un idéal maximal de $A(Y)$. Si y est le point de Y tel que $\mathcal{M}_y = f^{-1}(\mathcal{M}_x)$, posons $y = \pi_f(x)$.

Si $a \in A(Y)$, on a clairement $\pi_f^{-1}(D(a) \cap \pi_f(X)) = D(f(a))$, donc π_f est continue.

Remarquons enfin que l'homomorphisme f de l'anneau des fonctions définies sur Y dans l'anneau des fonctions définies sur X induit un homomorphisme local de $O_{Y,\pi_f(x)}$ dans $O_{X,x}$.

Définition 23.23 : L'application $\pi_f : X \rightarrow Y$ ainsi définie est un morphisme de schémas affines. Si f est un isomorphisme, ce morphisme est un isomorphisme.

Exemples :

(i) Soient G_1, \dots, G_r sont des éléments de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$, i.e. des fonctions définies sur \mathbf{A}_n .

L'homomorphisme $f : \mathbf{C}[Y_1, \dots, Y_r] \rightarrow \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ tel que $f(Y_i) = G_i$ induit le morphisme $\pi_f : \mathbf{A}_r \rightarrow \mathbf{A}_n$ tel que

$$\pi_f(x_1, \dots, x_n) = (G_1(x_1, \dots, x_n), \dots, G_r(x_1, \dots, x_n)).$$

Tout morphisme $\mathbf{A}_r \rightarrow \mathbf{A}_n$ est ainsi défini.

Si $d^0(G_i) = 1$, pour tout i , et si les G_i sont linéairement indépendants, ce morphisme est la projection, de centre $V(G_1, \dots, G_r)$, de \mathbf{A}_n sur l'espace affine \mathbf{A}_r d'anneau $\mathbf{C}[G_1, \dots, G_r]$.

(ii) Soient Y est un sous-schéma fermé de \mathbf{A}_r d'anneau de fonctions $\mathbf{C}[y_1, \dots, y_r]$ et X est un sous-schéma fermé de \mathbf{A}_n d'anneau de fonctions $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Si $h : \mathbf{C}[y_1, \dots, y_r] \rightarrow \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ un homomorphisme de \mathbf{C} -algèbres, soient $h(y_i) = g_i$, alors g_i est une fonction définie sur X et on a, pour $x \in X$,

$$\pi_h(x) = (g_1(x), \dots, g_r(x)) \in Y \subset \mathbf{A}_r.$$

(iii) Considérons toujours X un sous-schéma affine de \mathbf{A}_n d'anneau $\mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Soient $H_i \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$, pour $i = 1, \dots, m$, des polynômes de degré 1 linéairement indépendants.

L'homomorphisme $f : \mathbf{C}[H_1, \dots, H_m] \rightarrow \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ défini par $f(H_i) = cl(H_i) \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ induit le morphisme

$$\pi_f : X \rightarrow \mathbf{A}_m, \quad \pi_f(x_1, \dots, x_n) = (H_1(x_1, \dots, x_n), \dots, H_m(x_1, \dots, x_n)).$$

C'est la projection de X sur l'espace affine \mathbf{A}_m d'anneau $\mathbf{C}[H_1, \dots, H_m]$.

Il est clair que cette projection est la composition du plongement $X \subset \mathbf{A}_n$ et de la projection, de centre $V(H_1, \dots, H_m)$, de \mathbf{A}_n , sur l'espace affine \mathbf{A}_m d'anneau $\mathbf{C}[H_1, \dots, H_m]$.

23.7 Immersions.

Définition 23.24 : Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas affines. Si $\pi(X)$ est un ouvert affine U de Y et si $\pi : X \rightarrow U$ est un isomorphisme, on dit que π est une immersion ouverte.

Exercice : Démontrer le résultat suivant.

Proposition 23.25 : Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas affines. Si $\pi(X)$ est un ouvert U de Y homéomorphe à X , et si pour tout $x \in X$ l'homomorphisme local $O_{Y, \pi(x)} \rightarrow O_{X, x}$ est un isomorphisme, π est une immersion ouverte.

Exemple :

Soit $A =$ l'anneau de Y . Soient $g \in A$ Considérons Y' le schéma affine d'anneau $A' = A[Z]/(gZ - 1)$.

L'homomorphisme de \mathbf{C} -algèbres $f : A \rightarrow A'$ définit une immersion ouverte $\pi_f : Y' \rightarrow Y$ dont l'image est l'ouvert affine $D(g)$.

Proposition 23.26 : L'intersection de deux ouverts affines d'un schéma affine est un ouvert affine.

Démonstration :

Soient U et V deux ouverts affines de Y . Si A est l'anneau de Y , posons $B = \Gamma(U, O_U) \otimes_A \Gamma(V, O_V)$. C'est l'anneau d'un schéma affine X .

Soient $f_U : A \rightarrow \Gamma(U, O_U)$ et $f_V : A \rightarrow \Gamma(V, O_V)$ les flèches de restriction. L'homomorphisme $g : A \rightarrow B$ où $g(a) = f_U(a) \otimes 1 = 1 \otimes f_V(a)$ définit un morphisme $i : X \rightarrow Y$. On vérifie immédiatement que c'est est une immersion ouverte d'image $U \cap V$, i.e. que X est homéomorphe à $U \cap V$ et que tous les homomorphismes d'anneaux locaux $O_{Y, i(x)} \rightarrow O_{X, x}$ sont des isomorphismes.

Définition 23.27 : Un morphisme de schémas affines $\pi_f : X \rightarrow Y$ est une immersion fermée si l'homomorphisme $f : A(Y) \rightarrow A(X)$ est surjectif. Dans ce cas, X est isomorphe au sous-schéma fermé de Y d'anneau $A(Y)/\text{Ker } f$.

Exemple : Soit $y \in Y$. Si \mathcal{M}_y est l'idéal maximal de $A(Y)$ correspondant au point y , l'homomorphisme $A(Y) \rightarrow A(Y)/\mathcal{M}_y$ définit l'immersion fermée du schéma point $\{y\}$ dans Y .

Exercice : Démontrer l'assertion suivante.

Proposition 23.28 : Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas affines. Si $\pi(X)$ est un fermé F de Y homéomorphe à X , et si pour tout $x \in X$ l'homomorphisme local $O_{Y,\pi(x)} \rightarrow O_{X,x}$ est surjectif, le morphisme π est une immersion fermée.

23.8 Description locale d'un morphisme.

Théorème 23.29 : Soient X et Y deux schémas affines. Supposons donnés un recouvrement affine $(U_i)_i$ de Y et un recouvrement affine $(V_{ij})_{i,j}$ de X et des morphismes de schémas affines $\pi_{ij} : V_{ij} \rightarrow U_i$ tels que pour tout i, j, k, l on a $\pi_{ij}|_{V_{ij} \cap V_{kl}} = \pi_{kl}|_{V_{ij} \cap V_{kl}}$.

Alors il existe un morphisme de schémas affines $\pi : X \rightarrow Y$ tel que $\pi|_{V_{ij}} = \pi_{ij}$ pour tout (i, j) .

Démonstration :

Comme tout ouvert est réunion d'ouverts affines de la forme $D(h)$, on peut bien sûr supposer que les ouverts U_i (resp. V_{ij}) sont de la forme $D(f_i)$ (resp. $D(g_{ij})$). Considérons alors les homomorphismes d'anneaux $h_{ij} : A(Y)_{f_i} \rightarrow A(X)_{g_{ij}}$ correspondant aux morphismes π_{ij} . Les hypothèses de compatibilité de l'énoncé se traduisent par la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \oplus_i A(Y)_{f_i} & \rightarrow & \oplus_{ij} A(X)_{g_{ij}} \\ F \downarrow & & G \downarrow \\ \oplus_{i,s} A(Y)_{f_i f_s} & \rightarrow & \oplus_{i,s,j,t} A(X)_{g_{ij} g_{st}} \end{array}$$

où $F((y_i)_i) = ((y_i - y_j)_{ij})$ et $G((x_{ij})_{ij}) = ((x_{ij} - x_{st})_{ijst})$.

Il existe donc un homomorphisme h entre les noyaux des flèches verticales de ce diagramme permettant de le compléter en un grand diagramme commutatif. Mais d'après le Théorème 23.13, les noyaux de ces flèches sont $A(Y)$ et $A(X)$. En effet, comme $(D(f_i))$ (resp. $(D(g_{ij}))$) est un recouvrement de Y (resp. X), l'idéal engendré par les f_i (resp. g_{ij}) est l'idéal unité dans $A(Y)$ (resp. $A(X)$). L'homomorphisme $h : A(Y) \rightarrow A(X)$ construit a les propriétés annoncées.

Définition 23.30 : Si U (resp. V) est un sous-schéma ouvert d'un schéma affine, un morphisme $\pi : V \rightarrow U$ est la donnée d'un recouvrement $(U_i)_i$ de U et d'un recouvrement $(V_{ij})_{i,j}$ de V par des ouverts affines et de morphismes de schémas affines $\pi_{ij} : V_{ij} \rightarrow U_i$ tels que pour tout i, j, k, l on a $\pi_{ij}|_{V_{ij} \cap V_{kl}} = \pi_{kl}|_{V_{ij} \cap V_{kl}}$.

23.9 Produit de schémas affines.

Définition 23.31 : Si X et Y sont deux schémas affines d'anneaux $A(X)$ et $A(Y)$, on appelle produit de X et Y et on note $X \times_{\mathbf{C}} Y$ le schéma affine d'anneau $A(X) \otimes_{\mathbf{C}} A(Y)$ muni des morphismes de projection $X \times_{\mathbf{C}} Y \rightarrow X$ et $X \times_{\mathbf{C}} Y \rightarrow Y$ définis par les homomorphismes de \mathbf{C} -algèbres

$$A(X) \rightarrow A(X) \otimes_{\mathbf{C}} A(Y), \text{ avec } a \rightarrow a \otimes 1 \quad \text{et} \quad A(Y) \rightarrow A(X) \otimes_{\mathbf{C}} A(Y), \text{ avec } a \rightarrow 1 \otimes a.$$

Vérifier que l'ensemble sous-jacent à $X \times_{\mathbf{C}} Y$ est bien $X \times Y$

Exemple : \mathbf{A}_{n+m} est isomorphe à $\mathbf{A}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{A}_m$

On vérifie immédiatement l'énoncé suivant.

Proposition 23.32 : Si $x \in X$ et $y \in Y$, on a $\dim(O_{X \times_{\mathbf{C}} Y, (x,y)}) = \dim(O_{X,x}) + \dim(O_{Y,y})$.
On a $\dim(X \times_{\mathbf{C}} Y) = \dim X + \dim Y$.

Proposition 23.33 : Si $x \in X$ et $y \in Y$ sont des points non singuliers, alors (x, y) est un point non singulier de $X \times_{\mathbf{C}} Y$.

Définition 23.34 : Si X, Y et Z sont des schémas affines d'anneaux $A(X), A(Y)$ et $A(Z)$ et si $X \rightarrow Z$ et $Y \rightarrow Z$ sont deux morphismes de schémas affines, on appelle produit de X et Y sur Z et on note $X \times_Z Y$ le schéma affine d'anneau $A(X) \otimes_{A(Z)} A(Y)$ muni des morphismes de projection $X \times_Z Y \rightarrow X$ et $X \times_Z Y \rightarrow Y$ définis par les homomorphismes de \mathbf{C} -algèbres

$$A(X) \rightarrow A(X) \otimes_{A(Z)} A(Y), a \rightarrow a \otimes 1 \quad \text{et} \quad A(Y) \rightarrow A(X) \otimes_{A(Z)} A(Y), a \rightarrow 1 \otimes a.$$

Exemple :

(i) Soient U et V deux ouverts affines de Y . Nous avons montré plus haut que

$$U \cap V = U \times_Y V.$$

(ii) Plus généralement, on démontre facilement l'énoncé suivant.

Proposition 23.35 : Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas affines.

(i) Si Z est un sous-schéma fermé de Y , le morphisme de projection $X \times_Y Z \rightarrow X$ est une immersion fermée.

(ii) Si U est un ouvert affine de Y , le morphisme de projection $X \times_Y U \rightarrow X$ est une immersion ouverte.

Définition 23.36 : Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas affines.

Si V est un sous-schéma affine fermé (resp. ouvert) de Y , alors le sous-schéma affine fermé (resp. ouvert) $X \times_Y Z$ de X est l'image inverse $\pi^{-1}(Z)$ de Z dans X .

Si y est un point de Y , l'image inverse $X \times_Y \{y\}$ du schéma réduit concentré au point y est la fibre $\pi^{-1}(y)$ du point $y \in Y$ par π .

Soulignons à nouveau que si \mathcal{M}_y est l'idéal du point y de Y , alors $\mathcal{M}_y A(X)$ est l'idéal de la fibre de Y dans l'anneau de X .

Exemples :

Considérons les morphismes $\pi_i : \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_2$ définis par les homomorphismes d'anneaux $f_i : \mathbf{C}[X_1, X_2] \rightarrow \mathbf{C}[T]$ avec $f_1(X_i) = T^i$; $f_2(X_1) = T(T-1)$, $f_2(X_2) = T(T-1)(T-2)$; $f_3(X_i) = T^{i+1}$. Alors π_1 est une immersion fermée.

La fibre de $(0, 0)$ par π_2 est le sous-schéma fermé réduit de \mathbf{A}_1 d'anneau $\mathbf{C}[T]/T(T-1)$. Chacun des deux points de cette fibre a "multiplicité" 1.

La fibre de $(0, 0)$ par π_3 est le sous-schéma fermé de \mathbf{A}_1 d'anneau $\mathbf{C}[T]/T^2$. L'unique point de cette fibre, l'origine, a "multiplicité" 2.

23.10 Dimensions des fibres d'un morphisme.

Proposition 23.37 : Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas affines. Si $x \in X$ et $y = \pi(x)$, on a

$$\dim(O_{Y,y}) + \dim(O_{\pi^{-1}(y),x}) \geq \dim(O_{X,x}).$$

De plus si l'homomorphisme $A(Y) \rightarrow A(X)$ est injectif, il existe un ouvert non vide U de X tel que pour tout x dans U il y a égalité.

L'inégalité est le Théorème 15.18.

Pour démontrer l'existence de U , considérons l'application injective de \mathbf{C} -algèbre de type fini $A(Y) \rightarrow A(X)$. D'après le Lemme de normalisation, il existe $y_1, \dots, y_n \in A(Y)$ algébriquement indépendants et tels que $A(Y)$ est fini sur l'anneau $R = \mathbf{C}[y_1, \dots, y_n]$. Posons $S = R - 0$. Alors, toujours d'après le Lemme de normalisation, il existe $z_1, \dots, z_m \in A(X)$ algébriquement indépendants sur le corps $S^{-1}R$ tel que $S^{-1}A(X)$ est entier sur $S^{-1}R[z_1, \dots, z_m]$. Comme $A(X)$ est une \mathbf{C} -algèbre de type fini, il existe $s \in S$ tel que $A(X)_s$ est fini sur $R_s[z_1, \dots, z_m]$.

Soit alors \mathcal{P} un idéal premier minimal de $A(X)$ tel que $s \notin \mathcal{P}$ et

$$\mathcal{P}A(X)_s \cap R_s[z_1, \dots, z_m] = (0).$$

Pour tout idéal maximal \mathcal{M} de $A(X)$ tel que $s \notin \mathcal{M}$ et contenant \mathcal{P} on a

$$\dim A(X)_{\mathcal{M}} = \dim A(X)_{\mathcal{M}}/\mathcal{P} = n + m.$$

Si \mathcal{Q}_i , avec $i = 1, \dots, r$, sont les idéaux premiers minimaux de $A(X)_s$ tels que $\mathcal{Q}_i \cap R_s[z_1, \dots, z_m] \neq (0)$, il existe $t \in \bigcap_{1 \leq i \leq r} \mathcal{Q}_i$, avec $t \notin \mathcal{P}$ (Lemme d'évitement). L'ouvert $U = D(t)$ a les propriétés annoncées dans l'énoncé.

Théorème 23.38 (Théorème de semi-continuité) :

Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas affines. La fonction $\dim(O_{\pi^{-1}(\pi(x)),x})$, définie dans X et à valeurs dans \mathbf{Z} , est semi-continue supérieurement.

C'est le Théorème 15.28. En effet, soit \mathcal{M}_x l'idéal maximal de l'anneau $A(X)$ correspondant au point x . On a

$$O_{\pi^{-1}(\pi(x)),x} = (A(X)/\mathcal{M}_x \cap A(Y))_{\mathcal{M}_x} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = A(X)/\mathcal{M}_x = A(Y)/(\mathcal{M}_x \cap A(Y)).$$

23.11 Morphismes finis

Définition 23.39 : Un morphisme $\pi : X \rightarrow Y$ de schémas affines est fini si l'homomorphisme $A(Y) \rightarrow A(X)$ le définissant est fini.

Remarque : $A(X)$ est une $A(Y)$ -algèbre de type fini, donc $A(X)$ est finie sur $A(Y)$ si et seulement si elle est entier sur $A(Y)$.

Le Théorème de relèvement implique le résultat suivant.

Théorème 23.40 : Si $\pi : X \rightarrow Y$ est un morphisme fini de schémas affines, $\pi(X)$ est un fermé de Y .

Démonstration :

Soit \mathcal{I} le noyau de l'homomorphisme $f : A(Y) \rightarrow A(X)$. Alors pour tout idéal maximal \mathcal{M} de $A(Y)$ contenant \mathcal{I} , il existe un idéal maximal \mathcal{N} de $A(X)$ tel que $f^{-1}(\mathcal{N}) = \mathcal{M}$. Donc $\pi(X) = V(\mathcal{I})$.

Le Lemme de normalisation peut s'énoncer de la manière suivante.

Théorème 23.41 : Si X est un sous-schéma affine fermé, de dimension d , de \mathbf{A}_n , il existe une projection $\mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{A}_d$ telle que le morphisme (de projection) composé $X \rightarrow \mathbf{A}_d$ est surjectif fini.

Un cas particulier du "main theorem" de Zariski peut aussi se lire

Théorème 23.42 : Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas affines. Si $x \in X$ est un point tel que $\dim(O_{\pi^{-1}(\pi(x)),x}) = 0$, il existe un voisinage ouvert affine U de x dans X et une factorisation, du morphisme composé $U \rightarrow Y$,

$$U \xrightarrow{i} Z \rightarrow Y$$

telle que i est une immersion ouverte et $Z \rightarrow Y$ un morphisme fini.

Démonstration :

En effet, $A(X)$ est une $A(Y)$ -algèbre de type fini. Si \mathcal{M}_x est l'idéal maximal de $A(X)$ correspondant au point x , cet idéal est isolé au dessus de $\mathcal{M}_x \cap A(Y)$.

Donc il existe une sous- $A(Y)$ -algèbre finie B de $A(X)$, et un élément $t \in B - (\mathcal{M}_x \cap B)$ tels que $B_t = A(X)_t$.

Si Z est le schéma d'anneau B et U l'ouvert affine de X (et de Z) d'anneau $A(X)_t = B_t$, on a décrit la factorisation annoncée.

Chapter 24

Schémas projectifs

24.1 L'espace projectif \mathbf{P}_n .

Nous savons, c'est une conséquence directe du Théorème des zéros de Hilbert, que l'application

$$x = (x_0, \dots, x_n) \rightarrow \mathcal{M}_x = (x_i X_j - x_j X_i)_{i,j}$$

est une correspondance bijective entre les points de l'espace projectif de dimension n et les idéaux premiers gradués maximaux relevants de l'anneau gradué $R = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$.

Il est clair que \mathcal{M}_x est l'idéal des polynômes homogènes qui s'annulent en x . Il est tout aussi clair que R/\mathcal{M}_x est isomorphe à un anneau de polynômes en une variable sur \mathbf{C} .

La topologie de Zariski sur $\text{Spec}(R)$ induit sur l'espace projectif une topologie, dite encore de Zariski.

Si \mathcal{I} est un idéal gradué de R , nous noterons (pour un instant) $V(\mathcal{I})$ l'ensemble des points x de l'espace tels que $F(x) = 0$ pour tout élément homogène $F \in \mathcal{I}$ (si F n'est pas homogène $F(x) = 0$ n'a pas de sens). Les ensembles $V(\mathcal{I})$ sont clairement les fermés de la Topologie de Zariski sur l'espace projectif.

Remarquons enfin que si $E = (X_0, \dots, X_n)_1$, les points de l'espace projectif sont aussi en bijection naturelle avec l'ensemble des classes de formes linéaires non nulles sur le \mathbf{C} -espace vectoriel E , pour la relation d'équivalence projective ($f \sim g$ s'il existe $a \in \mathbf{C} - \{0\}$ tel que $g = af$).

Si F/G est une fraction homogène de degré 0, elle induit évidemment une fonction définie sur l'ouvert complémentaire du fermé $V((G))$ de l'espace projectif et à valeurs dans \mathbf{C} .

Définition 24.1 : *Le corps $\mathbf{C}(X_i/X_j)_{i,j}$ des fractions homogènes de degré 0 en (X_0, \dots, X_n) est le corps des fonctions rationnelles sur l'espace projectif.*

L'anneau local $R_{\mathcal{M}_x}^{(0)}$ des fractions homogènes de degré 0 définies au point x est l'anneau local des fonctions en x .

Si U est un ouvert de l'espace projectif pour la Topologie de Zariski, l'anneau des fonctions définies sur U est $A(U) = \bigcap_{x \in U} R_{\mathcal{M}_x}^{(0)}$.

Si $x \in U' \subset U$, les homomorphismes naturels

$$A(U) \rightarrow A(U') \rightarrow (R_{\mathcal{M}_x})^0.$$

sont les homomorphismes de restriction.

Il est clair que l'anneau local $R_{\mathcal{M}_x}^{(0)}$ des fonctions définies au point x est le sous-anneau de l'anneau local $R_{\mathcal{M}_x}$ formé par les fractions homogènes de degré 0. Son idéal maximal $\mathcal{M}_x^{(0)}$ est l'ensemble des fractions homogènes de degré 0 définies en x et qui s'annulent en x .

Définition 24.2 : \mathbf{P}_n est l'espace projectif de dimension n muni de la Topologie de Zariski, de ses anneaux de fonctions et des homomorphismes de restriction.

L'anneau local du point x (des fonctions définies...) est noté $O_{\mathbf{P}_n, x}$, l'anneau des fonctions définies sur U est noté $\Gamma(U, O_{\mathbf{P}_n})$.

Remarque : Les anneaux locaux des points de \mathbf{P}_n sont réguliers de dimension n .

Définition 24.3 : Si U est un ouvert de \mathbf{P}_n et si $x \in U$, on pose $O_{U, x} = O_{\mathbf{P}_n, x}$ et si $U' \subset U$, on pose $\Gamma(U', O_U) = \Gamma(U', O_{\mathbf{P}_n})$. U muni de la Topologie induite et de ses anneaux de fonctions est un sous-schéma ouvert de \mathbf{P}_n .

Supposons que $B = \Gamma(U, O_{\mathbf{P}_n})$ est une \mathbf{C} -algèbre de type fini, donc l'anneau de fonctions d'un schéma affine.

Si $x \in U$, soit \mathcal{N}_x l'idéal maximal de B noyau de l'application composée

$$B = \Gamma(U, O_{\mathbf{P}_n}) \rightarrow O_{U, x} \rightarrow O_{U, x} / \mathcal{M}_x^0 O_{U, x}.$$

Si $x \rightarrow \mathcal{N}_x$ est une bijection entre U et le schéma affine d'anneau B , et si pour tout $x \in U$ l'application naturelle $B_{\mathcal{N}_x} \rightarrow O_{U, x}$ est un isomorphisme, on dit que U est un ouvert affine de \mathbf{P}_n .

Exemples :

(i) Si $D(X_i) = \mathbf{P}_n - V(X_i)$, on a $\Gamma(D(X_i), O_{\mathbf{P}_n}) = \mathbf{C}[X_0/X_i, \dots, X_n/X_i] = R_{X_i}^{(0)}$. On vérifie sans difficulté que $D(X_i)$ est un ouvert affine de \mathbf{P}_n .

Comme $\mathbf{P}_n = \cup_{0 \leq i \leq n} D(X_i)$, on a un recouvrement de \mathbf{P}_n par des ouverts affines.

Si $\mathcal{I} = \oplus \mathcal{I}_n$ est un idéal gradué de R , soit

$$\mathcal{I}_{X_i}^{(0)} = \{F/X_i^n, \quad F \in \mathcal{I}_n, \quad n \geq 0\}.$$

C'est un idéal de $\mathbf{C}[X_0/X_i, \dots, X_n/X_i]$ et le localement fermé $V(\mathcal{I}) \cap D(X_i)$ de l'espace topologique \mathbf{P}_n est homéomorphe au fermé $V(\mathcal{I}_{X_i}^{(0)})$ de l'espace topologique $D(X_i)$.

(ii) Plus généralement, si F est un élément homogène de R , soit $D(F) = \mathbf{P}_n - V(F)$.

On a $\Gamma(D(F), O_{\mathbf{P}_n}) = R_F^{(0)}$ et on vérifie facilement que l'ouvert $D(F)$ est un ouvert affine d'anneau $R_F^{(0)}$.

Si \mathcal{I} est un idéal gradué de R et si

$$\mathcal{I}_F^{(0)} = \{G/F^n, \quad G \in \mathcal{I}_{nd^0 F}, \quad n \geq 0\},$$

on a à nouveau un homéomorphisme $V(\mathcal{I}) \cap D(F) \simeq V(\mathcal{I}_F^{(0)}) \subset D(F)$.

Soulignons les propriétés évidentes suivantes :

Proposition 24.4 :

(i) Tout ouvert de \mathbf{P}_n est réunion finie d'ouverts affines de la forme $D(F)$.

(ii) $D(F) \cap D(G) = D(FG)$.

24.2 Schémas projectifs.

Si \mathcal{I} est un idéal gradué de $R = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$, notons d'abord $X = V(\mathcal{I})$ le fermé de \mathbf{P}_n formé par les points x vérifiant $F(x) = 0$ pour tout $F \in \mathcal{I}$.

Soit $A = (R/\mathcal{I})$. L'ensemble X est en bijection avec l'ensemble des idéaux premiers relevant maximaux de A . On note encore \mathcal{M}_x l'idéal premier maximal relevant de A associé à x . La topologie de Zariski sur $\text{Spec}(A)$ induit sur X une topologie, dite encore de Zariski.

Nous voulons définir les anneaux de fonctions sur l'espace topologique $X = V(\mathcal{I})$ et lui donner ainsi une structure de sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n .

Définition 24.5 : Si $x \in X$, l'anneau local des fonctions définies au point x de X est l'anneau $A_{\mathcal{M}_x}^{(0)}$ des fractions homogènes de degré 0 de $A_{\mathcal{M}_x}$. Il est noté $O_{X,x}$.

Si $\mathcal{I}_x^{(0)}$ est l'idéal de $O_{\mathbf{P}_n,x}$ formé des fractions homogènes de degré 0, définies en x et dont le numérateur est dans \mathcal{I} , il est clair que

$$O_{X,x} = O_{\mathbf{P}_n,x} / \mathcal{I}_x^{(0)}$$

Si \mathcal{I} est un idéal premier, i.e. si A est intègre, les anneaux locaux des points de X sont tous contenus dans le corps des fractions de degré 0 de A . C'est le corps des fonctions sur X .

Si U est un ouvert de X , on définit dans ce cas $\Gamma(U, O_X) = \bigcap_{x \in U} O_{X,x}$ comme anneau des fonctions sur X définies dans U .

Si \mathcal{I} n'est pas premier, on doit, comme dans le cas affine, faire un effort pénible.

Définition 24.6 : Soit U est un ouvert de X . L'anneau $\Gamma(U, O_X)$ des fonctions sur X définies dans U est le sous-anneau de $\prod_{x \in U} O_{X,x}$ formé par les éléments

$$(a_x/b_x)_{x \in U}, \quad a_x/b_x \in A_{\mathcal{M}_x}^{(0)},$$

tels que

$$b_{x'} a_x = b_x a_{x'}, \quad \forall x, x' \in U.$$

Si $x \in U' \subset U$, les applications naturelles

$$\Gamma(U, O_X) \rightarrow \Gamma(U', O_X) \rightarrow O_{X,x}$$

sont les homomorphismes de restriction.

Définition 24.7 : X muni de la topologie de Zariski, de ses anneaux de fonctions et des homomorphismes de restriction est un schéma projectif.

On pose $X = \text{Proj}(A)$. C'est le sous-schéma fermé $V(\mathcal{I})$ de \mathbf{P}_n .

Si A est intègre, c'est une variété projective et les fractions homogènes de degré 0 du corps des fractions de A forment le corps de fonctions rationnelles sur X .

Définition 24.8 : Si U est un ouvert de X et si $x \in U$, on pose $O_{U,x} = O_{X,x}$ et si $U' \subset U$, on pose $\Gamma(U', O_U) = \Gamma(U', O_X)$.

U muni de la Topologie induite et de ses anneaux de fonctions est un sous-schéma ouvert de X .

Un sous-schéma ouvert d'un schéma projectif (d'une variété projective), muni de ses anneaux de fonctions et des homomorphismes de restriction est un schéma quasi-projectif (une variété quasi-projective).

Dans la suite de ce texte, on dira simplement schéma pour schéma quasi-projectif et variété pour variété quasi-projective.

Définition 24.9 : Soient U un ouvert de X et $B = \Gamma(U, O_X)$.

Supposons que B est une \mathbf{C} -algèbre de type fini.

Si $x \in U$, soit \mathcal{N}_x l'idéal maximal de B noyau de l'application composée

$$B = \Gamma(U, O_X) \rightarrow O_{U,x} \rightarrow O_{U,x}/\mathcal{M}_x^0 O_{U,x}.$$

Si $x \rightarrow \mathcal{N}_x$ est une bijection entre U et le schéma affine d'anneau B , et si pour tout $x \in U$ l'application naturelle $B_{\mathcal{N}_x} \rightarrow O_{U,x}$ est un isomorphisme, on dit que U est un ouvert affine de X .

On vérifie alors immédiatement les assertions suivantes.

Proposition 24.10 : Soit $X = \text{Proj}(A) = V(\mathcal{I})$ un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n .

L'ouvert $X \cap D(X_i)$ de X est un ouvert affine d'anneau $\mathbf{C}[X_0/X_i, \dots, X_n/X_i]/\mathcal{I}_{X_i}^{(0)} = A_{X_i}^{(0)}$, donc un sous-schéma fermé de l'ouvert affine $D(X_i)$ de \mathbf{P}_n .

Plus généralement, si F est un élément homogène de R , le sous-schéma ouvert $X \cap D(F)$ de X est un ouvert affine de X . C'est le sous-schéma fermé de $D(F)$ d'anneau $R_F^0/\mathcal{I}_F^{(0)} = A_F^{(0)}$.

Tout ouvert de X est réunion d'ouverts affines de la forme $X \cap D(F)$.

$$(X \cap D(F)) \cap (X \cap D(G)) = X \cap D(FG).$$

Les ouverts $X \cap D(X_i)$ forment un recouvrement de X par des ouverts affines.

Définition 24.11 : Soit Z un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n .

On dit qu'un polynôme homogène $F \in \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$ s'annule sur Z si $F/X_i^{d^0 F}$ s'annule sur le sous-schéma fermé $Z \cap D(X_i)$ de l'espace affine $D(X_i)$ pour $i = 0, \dots, n$.

Si $\mathcal{I}(Z)$ est l'idéal gradué des polynômes qui s'annulent sur Z , on dit que $A = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]/\mathcal{I}(Z)$ est le cône projetant de Z .

ATTENTION : Si un polynôme homogène s'annule en tous points de Z , il ne s'annule pas nécessairement sur Z .

Théorème 24.12 : Soit Z un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n .

L'idéal gradué $\mathcal{I}(Z)$ n'a pas de composante irrelevante.

Si \mathcal{J} est un idéal gradué de $\mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $Z = V(\mathcal{J})$

(ii) $\mathcal{I}(Z)_r = \mathcal{J}_r$ pour r assez grand.

(iii) Il existe un idéal irrelevant \mathcal{J}' tel que $\mathcal{J} = \mathcal{I}(Z) \cap \mathcal{J}'$.

L'application $\mathcal{I} \rightarrow V(\mathcal{I})$ est donc une bijection entre l'ensemble des idéaux gradués de $\mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$, sans composante irrelevante dans leur décomposition primaire, et les sous-schémas fermés non vide de \mathbf{P}_n . L'application réciproque associe à $Z \subset \mathbf{P}_n$ l'idéal gradué de son cône projetant dans \mathbf{P}_n .

Démonstration :

Soit F un polynôme homogène. Il est clair que si $(X_0, \dots, X_n)^r F \in \mathcal{I}(Z)$ pour $r \gg 0$, alors $F \in \mathcal{I}(Z)$. Ceci signifie précisément que $\mathcal{I}(Z)$ n'a pas de composant irrélégante (i.e. (X_0, \dots, X_n) -primaire).

On a

$$V(\mathcal{I}(Z)) = V(\mathcal{J}) \Leftrightarrow V(\mathcal{I}(Z)) \cap D(X_k) = V(\mathcal{J}) \cap D(X_k) \quad \text{pour } k = 0, \dots, n.$$

Autrement dit, $\mathcal{I}_{X_k}^{(0)} = \mathcal{J}_{X_k}^{(0)}$ pour $k = 0, \dots, n$. Ceci signifie

$$(X_0, \dots, X_n)^r \mathcal{I}(Z) = (X_0, \dots, X_n)^r \mathcal{J} \quad \text{pour } r \gg 0,$$

$$\text{soit } \mathcal{I}(Z)_r = \mathcal{J}_r \quad \text{pour } r \gg 0.$$

On a montré $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

L'équivalence $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ est un exercice élémentaire sur la décomposition primaire.

Exemple :

Dans \mathbf{P}_1 , on a $V(X_0) = V(X_0^2, X_0X_1)$. En effet, $(X_0^2, X_0X_1) = (X_0) \cap (X_0^2, X_1)$ et (X_0^2, X_1) est un idéal irrélégant de $\mathbf{C}[X_0, X_1]$.

Remarque : Dans la suite de ce texte nous parlerons souvent de l'anneau gradué d'un sous-schéma fermé Z de \mathbf{P}_n malgré l'ambiguïté de cette expression. Seul est uniquement défini le cône projetant de Z dans \mathbf{P}_n .

24.3 Dimension des schémas.

Définition 24.13 : La dimension d'un schéma est la borne supérieure de la dimension de ses anneaux locaux.

Théorème 24.14 : Soit X est un schéma.

Il existe un fermé F de X tel que $\text{dom}(O_{X,x}) = \dim(X) \Leftrightarrow x \in F$.

Il existe un ouvert U de X tel que $U \subset F$ et U est dense dans F .

Comme X est réunion finie d'ouverts affines, c'est une conséquence immédiate du Théorème correspondant pour les schémas affines (Théorème 23.16).

On en déduit évidemment l'énoncé suivant.

Théorème 24.15 : Si V est une variété de corps des fonctions rationnelles K , on a pour tout point $x \in V$

$$\dim(O_{V,x}) = \dim(V) = d^0 \text{tr}_{\mathbf{C}}(K).$$

24.4 Composantes irréductibles d'un schéma.

Définition 24.16 : Soient X un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n et $\mathcal{I}(X) \subset \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$ l'idéal de son cône projetant.

Soit $\mathcal{I}(X) = (\cap_s \mathcal{J}_s) \cap (\cap_t \mathcal{J}'_t)$ une décomposition primaire de cet idéal, où les idéaux \mathcal{J}_s sont primaires pour des idéaux premiers minimaux \mathcal{P}_s de $\mathcal{I}(X)$ et les idéaux \mathcal{J}'_t primaires pour des idéaux premiers immergés \mathcal{Q}_t .

On dit que les sous-schémas fermés $X_s = V(\mathcal{J}_s)$ sont les composantes irréductibles de X et éventuellement, que X a une composante immergée en $V(\mathcal{Q}_t)$ (rappelons que \mathcal{J}'_t n'est pas uniquement déterminé). Si X est sans composante immergée, on écrit $X = \cup_s X_s$.

Le sous-schéma fermé $V(\cap_s \mathcal{P}_s)$ est le réduit X_{red} de X .

Si $X = X_{red}$, on dit que X est réduit.

Si $\mathcal{I}(X)$ n'a qu'une composante irréductible et n'a pas de composante immergée, on dit que X est irréductible.

Une variété projective est un sous-schéma fermé réduit et irréductible d'un espace projectif.

On vérifie facilement l'énoncé suivant :

Proposition 24.17 : Si U est un ouvert affine de X et Y une composante irréductible de X telle que $U \cap Y \neq \emptyset$, alors $U \cap Y$ est une composante irréductible de U . De plus toutes les composantes irréductibles de U sont ainsi obtenues.

Définition 24.18 : Si toutes les composantes irréductibles de X ont la même dimension, on dit que X est équidimensionnel.

Définition 24.19 : Soit U un sous-schéma ouvert d'un schéma projectif X .

Si X_i avec $i = 1, \dots, l$, sont les composantes irréductibles de X , alors les composantes irréductibles de U sont les schémas non vides $U \cap X_i$.

Si X a une composante immergée le long d'une sous-variété V , et si $U \cap V \neq \emptyset$, on dit que U a une composante immergée le long de $U \cap V$.

Remarques :

(i) Il est clair que si un schéma n'a qu'une composante irréductible, les anneaux locaux de ses points sont tous de dimension égale à la dimension de X .

(ii) La dimension d'un schéma est la borne supérieure des dimensions de ses composantes irréductibles.

Proposition 24.20 : Soit X un schéma sans composante immergée. S'il existe un ouvert dense connexe U de X dont tous les anneaux locaux sont intègres, alors X est une variété.

Démonstration :

On peut évidemment supposer que X est projectif.

Comme U est dense, toute composante irréductible rencontre U . Comme l'anneau local d'un point de U est intègre, ce point est dans une seule composante irréductible. Les composantes irréductibles de U sont donc aussi ses composantes connexes. Mais U est connexe, donc X est irréductible.

Il en résulte que l'anneau gradué relevant $A = \mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ d'un plongement de X dans \mathbf{P}_n n'a qu'un idéal premier minimal \mathcal{P} . Un élément homogène a de \mathcal{P} est nilpotent. Comme pour tout i

l'anneau $\Gamma(D(x_i), O_X)$ est intègre (Proposition 23.19), la fonction $a/x_i^{d^0 a}$ est nulle. Donc pour tout i il existe n_i tel que $x_i^{n_i} a = 0$. Comme (0) n'a pas de composante irrelevante dans A , ceci implique $a = 0$, donc $\mathcal{P} = 0$ et X est une variété.

Enonçons enfin dans le cas projectif le premier Théorème d'intersection. Il se déduit clairement de l'énoncé affine.

Théorème 24.21 : *Si X et Y sont deux sous-schémas fermés équidimensionnels de \mathbf{P}_n et si Z est une composante irréductible de $X \cap Y$, on a*

$$\dim(Z) + n \geq \dim(X) + \dim(Y).$$

24.5 Lieu singulier d'un schéma.

Définition 24.22 : *un point x d'un schéma X est non singulier si l'anneau local $O_{X,x}$ est régulier. L'ensemble des points singuliers de X est le lieu singulier $LS(X)$ de X .*

Il est clair qu'un point non singulier est contenu dans une seule composante irréductible de X .

Exercice : Démontrer le résultat qui suit.

Proposition 24.23 : *Soient $X = \text{Proj}(A)$ un schéma projectif, x un point de X et \mathcal{M}_x l'idéal maximal relevant correspondant de A . Alors x est un point non singulier de X si et seulement si l'anneau local $A_{\mathcal{M}_x}$ est régulier.*

L'énoncé suivant se déduit immédiatement du cas affine.

Théorème 24.24 : *Soit X un schéma équidimensionnel. Le lieu singulier de X est un fermé de X . Si X est réduit, l'ouvert des points non singuliers de X est dense dans X .*

Remarque : L'énoncé précédent reste vrai sans l'hypothèse d'équidimensionalité. La preuve n'est pas plus difficile, mais certainement plus ennuyeuse à rédiger, comme à lire.

24.6 Exemples de schémas projectifs.

Points. Si $x \in \mathbf{P}_n$, le sous-schéma $V(\mathcal{M}_x)$ est la variété concentrée au point x . Elle est évidemment non singulière de dimension 0.

Hyperplans. Si H est un polynôme homogène de degré 1, le sous-schéma $V(H)$ est un hyperplan de \mathbf{P}_n . C'est une variété non singulière de dimension $n - 1$.

Si $n = 1$ cet hyperplan est un point, une droite si $n = 2$ et un plan si $n = 3$.

Hypersurfaces. Si F est un polynôme homogène de degré r de $\mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$, le sous-schéma $V(F)$ est une hypersurface, de degré r , \mathbf{P}_n .

Un hyperplan est une hypersurface de degré 1.

Si $x \in V(F) = X$, l'anneau local $O_{X,x}$ est un quotient de l'anneau régulier, de dimension n , $O_{\mathbf{P}_n,x}$, par un élément. Une hypersurface de \mathbf{P}_n est donc équidimensionnelle, sans composante immergée, de dimension $n - 1$.

Exercices :

1) Montrer qu'un sous-schéma équidimensionnel, sans composante immergée et de dimension $n - 1$, de \mathbf{P}_n est une hypersurface de \mathbf{P}_n .

2) Montrer que si le lieu singulier d'une hypersurface de \mathbf{P}_n est de dimension $\leq n - 3$, cette hypersurface est une variété. Utiliser le Théorème 18.14 et la Proposition 24.23.

Définition 24.25 : Si $X = V(\mathcal{I}) \subset \mathbf{P}_n$ et $Y = V(\mathcal{J}) \subset \mathbf{P}_n$, on pose

$$X \cap Y = V(\mathcal{I} + \mathcal{J}) \quad \text{et} \quad X \cup Y = V(\mathcal{I} \cap \mathcal{J}).$$

Remarques : Il est clair que tout sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n est intersection d'hypersurfaces.

Exercice : Montrer que si $X \subset \mathbf{P}_n$ est l'intersection de r hypersurfaces, alors toutes les composantes irréductibles de X sont de dimension $\geq n - r$.

Définition 24.26 : Si un sous-schéma fermé X , de dimension d , de \mathbf{P}_n est l'intersection de $n - d$ hypersurfaces, on dit que X est une intersection complète d'hypersurfaces de \mathbf{P}_n .

Exercice : Montrer que si le lieu singulier d'une intersection complète de dimension d de \mathbf{P}_n est de dimension $\leq d - 2$, c'est une variété. Utiliser le Théorème 18.14 et la Proposition 24.23.

La réunion de deux hypersurfaces est une hypersurface.

Sous-espaces linéaires. Une intersection d'hyperplans est un espace linéaire.

On vérifie immédiatement qu'un sous-espace linéaire de \mathbf{P}_n est une intersection complète d'hyperplans.

Exercices :

1) Montrer que la surface (quadrique) d'équation $X_0X_3 - X_1X_2 = 0$ de \mathbf{P}_3 contient une infinité de droites. En fait elle contient deux "familles" distinctes de droites, nous reviendrons plus loin sur cette étude.

Montrer plus précisément qu'étant donnée une droite de cette surface, par exemple $L = V(X_0, X_2)$, il existe une infinité de droites disjointes de cette droite et une infinité de droite la rencontrant.

2) Trouver 27 droites distinctes sur la surface (cubique) d'équation $X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = 0$ de \mathbf{P}_3 .

Quel est le nombre de points d'incidence (intersection de 2 droites) ?

Combien de droites rencontre une droite donnée de cette configuration ?

3) Soit $\mathcal{I} \subset \mathbf{C}[X_0, \dots, X_5]$ l'idéal gradué engendré par les 2-mineurs de la matrice $\begin{pmatrix} X_0 & X_3 \\ X_1 & X_4 \\ X_2 & X_5 \end{pmatrix}$.

(i) Montrer que $X = V(\mathcal{I})$ est une variété non singulière de dimension 3.

- (ii) Montrer que X contient une infinité de plans deux à deux disjoints.
- (iii) Décrire les composantes irréductibles et le lieu singulier du schéma $X \cap V(X_5)$.
- (iv) Montrer que $X \cap V(X_4, X_5)$ est la réunion d'un plan et d'une droite qui ne se coupent pas.
- (v) Décrire les hyperplans dont l'intersection avec X est une variété.

24.7 Anneaux de fonctions des schémas projectifs.

Comme dans le cas affine, la définition des anneaux de fonctions est peu maniable. L'énoncé qui suit en donne une autre description.

Proposition 24.27 : Soient $X = V(\mathcal{I})$ un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n et $D(F_i)$, pour $i = 1, \dots, n$, des ouverts affines de \mathbf{P}_n .

Si $U = \cup(D(F_i) \cap X)$, on a un isomorphisme naturel

$$\Gamma(U, O_X) \simeq K = \text{Ker}[\oplus(R/\mathcal{I})_{F_i}^{(0)} \xrightarrow{l} \oplus(R/\mathcal{I})_{F_i F_j}^{(0)}]$$

où $l((a_i)_i) = (a_i - a_j)_{ij}$.

Démonstration :

Les homomorphismes de restriction

$$\Gamma(U, O_X) \rightarrow \Gamma(D(F_i) \cap X, O_X) = (R/I)_{F_i}^{(0)}$$

définissent l'application naturelle $\Gamma(U, O_X) \rightarrow K$.

Si $x \in D(F_i) \cap X$, on a un homomorphisme de restriction $(R/I)_{F_i}^{(0)} \rightarrow O_{X,x}$.

Si de plus, $x \in D(F_i) \cap D(F_j) \cap X$, les applications

$$(R/I)_{F_i}^{(0)} \rightarrow O_{X,x} \quad \text{et} \quad (R/I)_{F_j}^{(0)} \rightarrow O_{X,x}$$

se factorisent à travers $(R/I)_{F_i F_j}^{(0)}$. On en déduit que si $(a_s)_s \in K$, alors a_i et a_j ont la même image dans $O_{X,x}$. On définit ainsi une application $K \rightarrow \Gamma(U, O_X)$ qui est l'inverse de la précédente.

Théorème 24.28 : Si V est une variété projective, $\mathbf{C} = \Gamma(V, O_V)$.

Lemme 24.29 : Si X est un schéma projectif, $\Gamma(X, O_X)$ est une \mathbf{C} -algèbre entière.

Démonstration du Lemme :

Si s est une fonction partout définie sur $X = V(I)$, pour tout point x de X il existe un élément homogène $G \in R$ tel que $G(x) \neq 0$ et que $Gs \in (R/I)_{d^0 G}$. Donc le conducteur J de s dans R/I n'est pas contenu dans un idéal premier relevant de R/I . Il est alors irrelevant et $J_r = (R/I)_r$ pour $r \gg 0$. Ceci implique $s(R/I)_r \subset (R/I)_r$ pour $r \gg 0$ ce qui démontre que s est entier sur \mathbf{C} (car $(R/I)_r$ est un \mathbf{C} -espace vectoriel de rang fini).

Démonstration du Théorème 24.28 :

Si V est une variété, $\Gamma(V, O_V)$ est contenu dans le corps des fonctions rationnelles de V . C'est donc une extension algébrique de \mathbf{C} et le Théorème est démontré.

Théorème 24.30 : Si X est un schéma projectif, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est une \mathbf{C} -algèbre finie.

Ce Théorème est un cas particulier du résultat plus général qui suit, dont l'importance apparaîtra dans l'étude des faisceaux cohérents sur un schéma projectif. Cet énoncé précise et améliore le Théorème 16.24, pour les modules gradués de type fini sur un anneau de polynômes sur \mathbf{C} .

Théorème 24.31 : Soit M un module gradué de type fini sur $R = \mathbf{C}[X_0, X_1, \dots, X_n]$. Posons

$$H(M)_t = \text{Ker}[\oplus_i M_{X_i}^{(t)} \xrightarrow{l} \oplus_{ij} M_{X_i X_j}^{(t)}]$$

où $l((z_i)_i) = (z_i - z_j)_{ij}$. Alors

- (i) Pour tout t_0 , le R -module gradué $H(M)_{t \geq t_0} = \oplus_{t \geq t_0} H(M)_t$ est de type fini.
- (i') Si ce R -module n'est pas nul, il est de profondeur ≥ 1 .
- (ii) Si M ne contient pas de sous-module de dimension 1, on a $H(M)_t = 0$ pour $t \ll 0$.
- (ii') Si M ne contient pas de sous-module de dimension 1 et si le R -module gradué $H(M) = \oplus_t H(M)_t$ n'est pas nul, il est de profondeur ≥ 2 .
- (iii) L'application $h_t : M_t \rightarrow \oplus_i M_{X_i}^{(t)}$ définie par $h_t(z) = (z)_i$ a son image dans $H(M)_t$. Le module $\oplus_t \text{Ker}(h_t)$ est le plus grand sous-module gradué de longueur finie de M . On a $\text{Coker}(h_t) = 0$ pour $t \gg 0$.

Démonstration du Théorème 24.31 :

Remarquons d'abord que les foncteurs $H(\cdot)_t$ et $H(\cdot)_{t \geq t_0}$ sont exacts à gauche. En effet, une suite exacte $0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow C \rightarrow 0$ de R -modules gradués, à homomorphismes de degré 0, induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \oplus_i K_{X_i}^t & \rightarrow & \oplus_i M_{X_i}^t & \rightarrow & \oplus_i C_{X_i}^t & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \oplus_{ij} K_{X_i X_j}^t & \rightarrow & \oplus_{ij} M_{X_i X_j}^t & \rightarrow & \oplus_{ij} C_{X_i X_j}^t & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes. En utilisant le diagramme du serpent, on en déduit l'exactitude à gauche de $H(\cdot)_t$, donc aussi de $H(\cdot)_{t \geq t_0}$.

Rappel : Tout R -module gradué de type fini M admet une filtration finie

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_l = M,$$

par des modules gradués, telle que, pour $i = 1, \dots, l$, il existe un idéal gradué premier \mathcal{P}_i , un entier r_i et un isomorphisme $M_i/M_{i-1} \simeq R/\mathcal{P}_i[r_i]$.

Montons que $H(R/\mathcal{P})_{t \geq 0}$ est une R/\mathcal{P} -algèbre finie.

Soit $s \in H(R/\mathcal{P})_t$ avec $s \neq 0$ et $t \geq 0$. Il existe n_i tel que $sX_i^{n_i} \in (R/\mathcal{P})_{t+n_i}$. Donc, si $n \gg 0$ on a $s(R/\mathcal{P})_n \subset (R/\mathcal{P})_{n+t}$. Il existe donc n_0 tel que $s(\oplus_{n \geq n_0} (R/\mathcal{P})_n) \subset (\oplus_{n \geq n_0} (R/\mathcal{P})_n)$. On en déduit que s est entier sur R/\mathcal{P} . Mais s est contenu dans le corps des fractions de R/\mathcal{P} , donc dans la clôture intégrale de R/\mathcal{P} . Finalement, $H(R/\mathcal{P})_{t \geq 0}$ est un sous- R/\mathcal{P} -module de la clôture intégrale de R/\mathcal{P} . Comme celle-ci est finie sur R/\mathcal{P} (Corollaire 12.2), on a bien prouvé que $H(R/\mathcal{P})_{t \geq 0}$ est fini sur R/\mathcal{P} .

Compte tenu du rappel précédent, on a démontré que $H(M)_{t \geq t_0}$ est un R -module gradué de type fini pour $t_0 \gg 0$, ce qui implique que $H(M)_t$ est un \mathbf{C} -espace vectoriel fini pour tout $t \gg 0$.

Pour prouver (i), il suffit de vérifier que $H(M)_t$ est un \mathbf{C} -espace vectoriel fini pour tout t .

Il est clair que si N est un R -module de longueur finie on a $H(N)_t = 0$ pour tout t , soit $H(M)_t = H(M/N)_t$. On peut donc remplacer M par M/N , autrement dit supposer que M ne contient pas de sous-module de longueur finie, c'est à dire que l'idéal (X_0, X_1, \dots, X_n) n'est pas associé à M . Par un Lemme d'évitement, il existe alors X , un élément homogène de degré 1 de R , tel que X est M -régulier. L'application injective

$$M[-1] \xrightarrow{X} M$$

induit alors un homomorphisme injectif de \mathbf{C} -espaces vectoriels

$$H(M)_{t-1} \xrightarrow{X} H(M)_t$$

qui démontre (i).

Pour prouver (i'), remarquons que si $x \in H(M)_t$ annule l'idéal irrelevant (X_0, X_1, \dots, X_n) de R , l'image de x dans $\oplus_i M_{X_i}^t$ est évidemment nulle, donc $x = 0$.

Pour prouver (ii), supposons $H(M)_t \neq 0$ pour tout t . Soit, comme précédemment, X un élément homogène de degré 1 de R , tel que X est M -régulier. Comme $XH(M)_t \subset H(M)_{t+1}$, il existe t_0 tel que $H(M)_{t_0+1} = XH(M)_{t_0}$, donc $(X_0, X_1, \dots, X_n)H(M)_{t_0} \subset XH(M)_{t_0}$. Soit alors N le sous- R -module de $H(M)_{t \geq t_0}$ engendré par $H(M)_{t_0}$. On a $(X_0, X_1, \dots, X_n)N \subset XN$, donc $\dim N \leq 1$. Il est clair que $N \cap M \neq (0)$, donc M contient un sous- R -module de dimension ≤ 1 , ce qui démontre (ii).

Pour (ii'), on prend toujours un élément X , homogène de degré 1 de R , régulier dans M . Il induit une suite exacte

$$0 \rightarrow H(M)[-1] \xrightarrow{X} H(M) \rightarrow \oplus_t H(M/XM)_t.$$

Mais d'après (i'), on sait que $H(M)/XH(M)$ est un sous-module d'un module de profondeur ≥ 1 , donc que $H(M)$ est de profondeur ≥ 2 .

Pour (iii), il est clair que $h_t(M_t) \subset H(M)_t$. Comme $z \in \text{Ker } h_t$ si et seulement si $X_i^n z = 0$ pour tout i et pour $n \gg 0$, le module $\oplus_t \text{Ker}(h_t)$ est le plus grans sous-module de longueur finie de M .

Enfin si $x \in H(M)_t$, il existe, par définition de $H(M)_t$, un entier n tel que $X_i^n x \in h_{t+n}(M_{t+n})$. Donc tout élément du module de type fini $\oplus_{t \geq t_0} \text{Coker}(h_t)$ est annulé par un idéal irrelevant. Ce module est bien de longueur finie.

24.8 Morphismes de schémas.

Définition 24.32 : Soient $X \subset \text{Proj}(A)$ et $Y \subset \text{Proj}(B)$ deux schémas (quasi-projectifs). Un morphisme $\pi : X \rightarrow Y$ est la donnée de recouvrements affines $Y = \cup D(F_i)$, $F_i \in B$, $X = \cup D(G_{ij})$, $G_{ij} \in A$ et de morphismes de schémas affines $\pi_{ij} : D(G_{ij}) \rightarrow D(F_i)$ tels que

$$\pi_{ij}(D(G_{ij}G_{lk})) \subset D(F_i F_l) \text{ et } \pi_{ij}|_{D(G_{ij}G_{lk})} = \pi_{lk}|_{D(G_{ij}G_{lk})} \text{ pour tout } (i, j, l, k).$$

Si $\pi : X \rightarrow Y$ et $\pi' : X \rightarrow Y$ sont deux morphismes, et s'il existe un recouvrement de X par des ouverts U_s tel que $\pi|_{U_s} = \pi'|_{U_s}$ pour tout s , alors π et π' sont identifiés.

Si π est un homéomorphisme d'espaces topologiques et si pour tout $x \in X$ l'homomorphisme local induit $O_{Y, \pi(x)} \rightarrow O_{X, x}$ est un isomorphisme, π est un isomorphisme.

Je laisse le plaisir au Lecteur de montrer que si π est un isomorphisme, alors il existe un isomorphisme inverse.

Remarque : Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Si V est un ouvert de Y et si $U = \pi^{-1}(V)$, il y a un homomorphisme naturel de \mathbf{C} -algèbres induit par π :

$$\Gamma(V, O_Y) \rightarrow \Gamma(U, O_X)$$

Ces homomorphismes commutent avec les homomorphismes de restriction.

Le morphisme π induit pour tout $x \in X$ un homomorphisme local

$$O_{Y, \pi(x)} \rightarrow O_{X, x}.$$

Définition 24.33 *Si π est un homéomorphisme d'espaces topologiques et si pour tout $x \in X$ l'homomorphisme local induit $O_{Y, \pi(x)} \rightarrow O_{X, x}$ est un isomorphisme, π est un isomorphisme.*

Je laisse le plaisir au Lecteur de montrer que si π est un isomorphisme, alors il existe un isomorphisme inverse.

On a évidemment l'énoncé suivant :

Proposition 24.34 : *Le composé de deux morphismes est un morphisme.*

Définition 24.35 : *Si π induit un isomorphisme entre X et un sous-schéma ouvert de Y , on dit que π est une immersion ouverte.*

S'il existe un sous-schéma fermé Z de Y tel que π se factorise par un isomorphisme $X \rightarrow Z$, on dit que π est une immersion fermée.

La preuve de l'énoncé suivant est immédiate.

Proposition 24.36 :

(i) *Si $\pi(X)$ est un ouvert de Y , si X est homéomorphe à $\pi(X)$ et si pour tout $x \in X$ l'homomorphisme local $O_{Y, \pi(x)} \rightarrow O_{X, x}$ est un isomorphisme, alors π est une immersion ouverte.*

(ii) *Une immersion ouverte surjective est un isomorphisme.*

Par contre la démonstration de celui qui suit est remise à plus tard.

Théorème 24.37 : *Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Si $\pi(X)$ est un fermé de Y , si X est homéomorphe à $\pi(X)$ et si pour tout $x \in X$ l'homomorphisme local $O_{Y, \pi(x)} \rightarrow O_{X, x}$ est surjectif, π est une immersion fermée.*

Définition 24.38 : *Si pour tout ouvert affine U de Y l'image inverse $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert affine de X , on dit que le morphisme π est affine.*

Si π est affine et si pour tout ouvert U de Y l'homomorphisme d'anneaux $\Gamma(U, O_Y) \rightarrow \Gamma(\pi^{-1}U, O_X)$ est entier (resp. fini), on dit que π est entier (resp. fini).

Théorème 24.39 : *S'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_i$ de Y tel que $\pi|_{\pi^{-1}(U_i)}$ est affine (resp. entier, fini), alors π est affine (resp. entier, fini).*

Veillez admettre ce résultat pour lequel je ne trouve pas de preuve simple. Il est possible que je n'en ai pas besoin dans cette forme.

24.9 Exemples de morphismes de schémas.

Soient $X = Proj(B)$ et $Y = Proj(A)$ deux schémas projectifs.

Supposons donné un homomorphisme gradué, de degré r , d'anneaux, $h : A \rightarrow B$, i.e. tel que les éléments $h(A_i) \subset B_{ir}$.

Pour tout élément homogène $F \in A$, il y a un homomorphisme

$$A_F^{(0)} \rightarrow B_{h(F)}^{(0)},$$

donc un homomorphisme de schéma affine

$$D(h(F)) \rightarrow D(F).$$

Comme ces morphismes vérifient évidemment les conditions de recollements de la définition, on a défini un morphisme (affine) $\cup D(g_i) = X - V(h(A_1)) \rightarrow Y$.

Les morphismes de Verones et les morphismes de projection sont de cette nature

Morphismes de Veronese.

Commençons par un exemple. Considérons l'homomorphisme, gradué de degré 2, d'anneaux

$$f : \mathbf{C}[Y_0, Y_1, Y_2] \rightarrow \mathbf{C}[X_0, X_1], \quad f(Y_i) = X_0^{2-i} X_1^i.$$

Comme $V((X_0^{2-i} X_1^i)_i) = \emptyset$, i.e. l'idéal $(X_0^{2-i} X_1^i)_i$ est irrelevant, il définit un morphisme $\mathbf{P}_1 \rightarrow \mathbf{P}_2$. Plus précisément, la factorisation de f par

$$\mathbf{C}[Y_0, Y_1, Y_2]/(Y_0 Y_2 - Y_1^2) \rightarrow \mathbf{C}[X_0, X_1]$$

induit un isomorphisme

$$\mathbf{P}_1 = Proj(\mathbf{C}[X_0, X_1]) \simeq C = Proj(\mathbf{C}[Y_0, Y_1, Y_2]/(Y_0 Y_2 - Y_1^2)).$$

C'est une immersion fermée de \mathbf{P}_1 dans \mathbf{P}_2 .

Plus généralement, soient P_0, \dots, P_N , avec $N + 1 = \binom{n+r}{n}$, les monômes de degré r en X_0, \dots, X_n , rangés par ordre lexicographique. l'homomorphisme

$$f : \mathbf{C}[Y_0, \dots, Y_N] \rightarrow \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n], \quad f(Y_i) = P_i$$

définit un morphisme $\pi : \mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{P}_N$ (l'idéal (P_0, \dots, P_N) de $\mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$ est évidemment irrelevant). Ce morphisme est une immersion fermée, le plongement de Veronese, de \mathbf{P}_n dans \mathbf{P}_N . On a $\pi(x_0, \dots, x_n) = (x_0^r, x_0^{r-1} x_1, \dots, x_n^r)$.

Exercices :

1) Soit $A = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]/\mathcal{I}$, où \mathcal{I} est l'idéal gradué engendré par les 2-mineurs de la matrice

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & \dots & X_{n-1} \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{pmatrix}$$

Montrer que $Proj(A) \subset \mathbf{P}_n$ est le plongement de Veronese de \mathbf{P}_1 dans \mathbf{P}_n .

On peut aussi montrer que \mathcal{I} est l'idéal gradué du cône projetant de ce plongement, i.e. que \mathcal{I} n'a pas de composante irrelevante dans sa décomposition primaire. Ce résultat est plus difficile à prouver mais plus précis.

2) Soit \mathcal{J} l'idéal gradué engendré dans $\mathbf{C}[X_0, \dots, X_4]$ par les 2-mineurs de la matrice

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ X_1 & X_3 & X_4 \\ X_2 & X_4 & X_5 \end{pmatrix}$$

Montrer que $Proj(\mathbf{C}[X_0, \dots, X_4]/\mathcal{J})$ est le plongement de Veronese de \mathbf{P}_2 dans \mathbf{P}_5 .

Dans ce cas aussi on peut montrer que \mathcal{J} n'a pas de composante irrelevante, donc que c'est l'idéal gradué du cône projetant de ce plongement.

Décrire l'image dans \mathbf{P}_4 , d'une droite de \mathbf{P}_2 , par ce plongement.

Projections.

Soient $m \leq n$ deux entiers > 0 . L'inclusion

$$\mathbf{C}[X_0, \dots, X_m] \subset \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$$

définit un morphisme de $\pi : \mathbf{P}_n - V(X_0, \dots, X_m)$ dans \mathbf{P}_m . C'est le morphisme de projection dont le centre est l'espace linéaire $V(X_0, \dots, X_m)$. On a évidemment $\pi((x_0, \dots, x_n)) = ((x_0, \dots, x_m))$.

Si X est un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n d'anneau gradué $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n] = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]/\mathcal{I}$, l'homomorphisme composé $\mathbf{C}[X_0, \dots, X_m] \rightarrow \mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ induit un morphisme

$$X - (X \cap V(X_0, \dots, X_m)) \rightarrow \mathbf{P}_m.$$

Si $J = I \cap \mathbf{C}[X_0, \dots, X_m]$, on a évidemment une factorisation par un morphisme

$$X - (X \cap V(X_0, \dots, X_m)) \rightarrow V(J) \subset \mathbf{P}_m$$

. On dit que $V(J)$ est la projection, de centre $V(X_0, \dots, X_m)$, de X dans \mathbf{P}_m . Si $X \cap V(X_0, \dots, X_m) = \emptyset$, i.e. X ne rencontre pas le centre de projection, ce morphisme est défini sur X .

Exercices :

(i) Montrer qu'une projection d'un espace linéaire L est un espace linéaire L' .

Si P est le centre de cette projection, montrer que $\dim(L') + \dim(L \cap P) = \dim(L)$.

(ii) Soit $A = \mathbf{C}[X_0^4, X_0^3 X_1, X_0^2 X_1^2, X_0 X_1^3, X_1^4]$ le cône projetant du plongement de Veronese de \mathbf{P}_1 dans \mathbf{P}_4 .

Montrer que la restriction à $Proj(A)$ de la projection de centre $(0, 0, 1, 0, 0)$ est une immersion fermée de \mathbf{P}_1 dans \mathbf{P}_3 . Décrire son idéal gradué dans \mathbf{P}_3 .

(iii) Plus généralement, montrer que

$$Proj(\mathbf{C}[Y_0, \dots, Y_3]/(Y_0 Y_3 - Y_1 Y_2, Y_1^{n-1} - Y_0^{n-2} Y_2, Y_2^{n-1} - Y_1 Y_3^{n-2}))$$

est une projection dans \mathbf{P}_3 du plongement de Veronese de \mathbf{P}_1 dans \mathbf{P}_n (considérer l'anneau gradué $\mathbf{C}[X_0^n, X_0^{n-1} X_1, X_0 X_1^{n-1}, X_1^n]$).

Montrer que c'est une immersion fermée de \mathbf{P}_1 dans \mathbf{P}_3 .

24.10 Produits de schémas projectifs.

Immersion de Segre. Produits d'espaces projectifs.

Commençons par un exemple.
Considérons l'homomorphisme

$$f : \mathbf{C}[Y_0, \dots, Y_5] \rightarrow \mathbf{C}[X_0, X_1] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[T_0, T_1, T_2],$$

$$\text{avec } f(Y_i) = X_0 T_i, \text{ pour } i \leq 2 \text{ et } f(Y_i) = X_1 T_{i-3}, \text{ pour } i \geq 3.$$

Il induit pour $i \leq 2$ des homomorphismes d'anneaux surjectifs

$$f_{Y_i}^{(0)} : \mathbf{C}[Y_0/Y_i, \dots, Y_5/Y_i] \rightarrow \mathbf{C}[X_1/X_0] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[T_0/T_i, T_1/T_i, T_2/T_i]$$

et pour $i \geq 3$ des homomorphismes d'anneaux surjectifs

$$f_{Y_i}^{(0)} : \mathbf{C}[Y_0/Y_i, \dots, Y_5/Y_i] \rightarrow \mathbf{C}[X_0/X_1] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[T_0/T_{i-3}, T_1/T_{i-3}, T_2/T_{i-3}].$$

Nous avons donc une immersion fermée de $D(X_0) \times D(T_i)$ dans $D(Y_i)$ pour $i \leq 2$ et de $D(X_1) \times D(T_i)$ dans $D(Y_{i+3})$ pour $i \geq 3$.

L'idéal de l'image de l'immersion fermée $D(X_0) \times D(T_0) \subset D(Y_0)$ (par exemple) est engendré par $(Y_4/Y_0 - Y_1 Y_3/Y_0^2$ et $Y_5/Y_0 - Y_2 Y_3/Y_0^2$.

Le noyau de f est l'idéal $(Y_i Y_{3+j} - Y_j Y_{3+i})_{i,j \leq 2}$ de $\mathbf{C}[Y_0, \dots, Y_5]$. On vérifie immédiatement que ces immersions fermées se recollent en un homéomorphisme d'espaces topologiques

$$\pi : \mathbf{P}_1 \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_2 \rightarrow V((Y_i Y_{3+j} - Y_j Y_{3+i})_{i,j \leq 2})$$

$$\text{tel que } \pi((x_0, x_1), (t_0, t_1, t_2)) = (x_0 t_0, x_0 t_1, x_0 t_2, x_1 t_0, x_1 t_1, x_1 t_2)$$

Définition 24.40 : La sous-variété fermée $V((Y_i Y_{3+j} - Y_j Y_{3+i})_{i,j \leq 2})$ de \mathbf{P}_5 est le produit $\mathbf{P}_1 \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_2$.

Nous avons recollé ensemble les produits d'espaces affines $D(X_i) \times D(T_j)$.

Nous avons aussi décrit les morphismes de "projection"

$$p_1 : V((Y_i Y_{3+j} - Y_j Y_{3+i})_{i,j \leq 2}) \rightarrow \mathbf{P}_1 \quad \text{et} \quad p_2 : V((Y_i Y_{3+j} - Y_j Y_{3+i})_{i,j \leq 2}) \rightarrow \mathbf{P}_2$$

Cette définition est convenable. La propriété universelle du produit est vérifiée: Si X est un schéma et si $g_1 : X \rightarrow \mathbf{P}_1$ et $g_2 : X \rightarrow \mathbf{P}_2$ sont des morphismes, il existe un morphisme unique $g : X \rightarrow V((Y_i Y_{3+j} - Y_j Y_{3+i})_{i,j \leq 2})$ tel que $g_1 = p_1 \circ g$ et $g_2 = p_2 \circ g$.

Remarque : Nous avons déjà étudié ce "plongement" de $\mathbf{P}_1 \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_2$ dans \mathbf{P}_5 . Son idéal gradué dans

$\mathbf{C}[Y_0, \dots, Y_5]$ est engendré par les mineurs maximaux de la matrice $\begin{pmatrix} Y_0 & Y_3 \\ Y_1 & Y_4 \\ Y_2 & Y_5 \end{pmatrix}$.

Ce cas particulier étant bien compris, nous procéderons de manière identique pour définir en général la variété projective $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$.

Soit $N = (n + 1)(m + 1) - 1$. On considère l'homomorphisme

$$f : \mathbf{C}[Y_0, \dots, Y_N] \rightarrow \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[T_0, \dots, T_m],$$

$$f(Y_i) = P_i \quad \text{avec} \quad (P_0, P_1, \dots, P_N) = (X_0T_0, X_0T_1, \dots, X_nT_{m-1}, X_nT_m).$$

Il permet de la même manière de construire une application continue

$$\pi : \mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m \rightarrow \mathbf{P}_N.$$

Son image est une sous-variété V de \mathbf{P}_N à laquelle $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$ est homéomorphe et dont l'idéal gradué est engendré par des polynômes homogènes de degré 2. On a

$$\pi((x_0, \dots, x_n), (t_0, \dots, t_m)) = (x_0t_0, x_0t_1, \dots, x_nt_m).$$

La restriction de cette application à chaque ouvert affine $D(X_s) \times D(T_t)$ est une immersion ouverte.

Soit I le noyau de f . Cet idéal de $\mathbf{C}[Y_0, \dots, Y_N]$ est engendré par les polynômes de degré 2 correspondant aux relations évidentes $(X_iT_j)(X_kT_l) - (X_iT_l)(X_kT_j) = 0$.

Définition 24.41 : La sous-variété fermée $V(I)$ de \mathbf{P}_N est le produit $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$.

Bien sûr, il faut vérifier que cette définition est convenable, i.e. la solution du problème universel. Nous épargnons au Lecteur (comme à l'auteur) cette fastidieuse vérification.

Définition 24.42 : Le plongement de $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$ dans \mathbf{P}_N est le plongement de Segre.

Exercice : On considère le plongement de Segre

$$\mathbf{P}_1 \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_1 \subset \mathbf{P}_3$$

défini par l'homomorphisme d'anneaux gradués

$$\mathbf{C}[Y_0, Y_1, Y_2, Y_3] \rightarrow \mathbf{C}[X_0T_0, X_0T_1, X_1T_0, X_1T_1].$$

(i) Montrer que son image est la surface (quadrique) d'équation $Y_0Y_3 - Y_1Y_2 = 0$.

(ii) Montrer que si $x \in Proj(\mathbf{C}[X_0, X_1])$, l'image de l'ensemble de points $\{(x, y)_y\}$ est une droite de \mathbf{P}_3 . Nous reviendrons sur ces droites lorsque nous disposerons des fibres d'un morphisme.

Hypersurfaces de $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$.

Considérons toujours l'anneau bigradué $\mathbf{C}[X_0, \dots, X_n] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[T_0, \dots, T_m]$ et l'homomorphisme

$$f : \mathbf{C}[Y_0, \dots, Y_N] \rightarrow \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[T_0, \dots, T_m],$$

$$f(Y_i) = P_i \quad \text{avec} \quad (P_0, P_1, \dots, P_N) = (X_0T_0, X_0T_1, \dots, X_nT_{m-1}, X_nT_m).$$

qui nous ont permis de définir le plongement de Segre de $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$ dans \mathbf{P}_N .

Remarquons d'abord que si $F(X_i, T_j)$ est un polynôme bihomogène, de bidegré (d, d) , en les variables (X_i, T_j) , il existe un polynôme $G \in \mathbf{C}[Y_0, \dots, Y_N]$ tel que $F = f(G)$. Donc l'intersection $Z = \mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m \cap V(G)$ est un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$.

Rappelons que $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$ est recouvert par les espaces affines $D(X_i) \times D(T_j)$ d'anneaux de fonctions $\mathbf{C}[X_0/X_i, \dots, X_n/X_i] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[T_0/T_j, \dots, T_m/T_j]$.

On a $Z_{i,j} = Z \cap (D(X_i) \times D(T_j)) = V(F/X_i^d T_j^d)$. Les schémas affines $Z_{i,j}$ se "recollent" donc en un sous-schéma fermé, de dimension $n + m - 1$ de $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$. Ce sous-schéma fermé est une hypersurface, notée $V(F)$, de bidegré (d, d) de $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$.

Considérons plus généralement un polynôme $F(X_i, T_j)$, bihomogène en les groupes de variables (X_i) et (T_j) . Si F est de bidegré (p, q) définissons $V(F) \cap (D(X_i) \times D(T_j)) = V(F/X_i^p T_j^q)$ et montrons que ces schémas affines se recollent bien en un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$.

Supposons par exemple $p \leq q$ et remarquons que pour tout monôme $P(X_i)$ de degré $q - p$ le polynôme PF est bihomogène de bidegré (q, q) . Autrement dit, $V(PF)$ est une hypersurface, de bidegré (q, q) , de $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$.

On a $V(PF) \cap (D(X_i) \times D(T_j)) = V((P/X_i^{q-p})(F/X_i^p T_j^q)) \subset V(F/X_i^p T_j^q)$.

Il est clair que si E est l'ensemble des monômes homogènes de degré $q - p$ en les X_i , on a

$$V(F/X_i^p T_j^q) = \bigcap_{P \in E} V(PF) \cap (D(X_i) \times D(T_j)).$$

Définition 24.43 : On pose $V(F) = \bigcap_{P \in E} V(PF)$. C'est une hypersurface, de bidegré (p, q) , de $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$.

Comme $V(F) \cap (D(X_i) \times D(T_j)) = V(F/X_i^p T_j^q)$, il est clair que les anneaux locaux des points d'une hypersurface de $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$ sont de dimension $(m + n - 1)$ et que tout sous-schéma fermé de $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$ est intersection d'hypersurfaces. Il est tout aussi clair que F est irréductible si et seulement si l'hypersurface $V(F)$ est une sous-variété (de dimension $m + n - 1$) de $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$.

Exercice : Démontrer le résultat suivant :

Proposition 24.44 : Toute sous-variété de dimension $m + n - 1$ de $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$ est une hypersurface.

Produits de schémas.

Définition 24.45 : Soit $F \in \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]_q$. L'hypersurface de $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$ définie par le polynôme bihomogène, de bidegré $(q, 0)$, en les variables (X_i) et (T_j) est le produit $V(F) \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$ de l'hypersurface $V(F)$ de \mathbf{P}_n avec \mathbf{P}_m .

Si $Y = \bigcap V(F_i)$ et $Z = \bigcap V(G_j)$ sont des sous-schémas fermés de \mathbf{P}_n et \mathbf{P}_m , on définit $Y \times_{\mathbf{C}} Z$ comme le sous-schéma fermé de $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$ intersection des hypersurfaces $V(F_i) \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$ et $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} V(G_j)$ de $\mathbf{P}_n \times_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m$.

Si U est un sous-schéma ouvert de Y et U' un sous-schéma ouvert de Z , on définit $U \times_{\mathbf{C}} U'$ comme le sous-schéma ouvert de $Y \times_{\mathbf{C}} Z$ complémentaire du fermé $((Y - U) \times_{\mathbf{C}} Z) \cup (Y \times_{\mathbf{C}} (Z - U'))$

On a bien sûr comme pour les schémas affines les énoncés suivants:

Proposition 24.46 : Soient X et Y deux schémas quasi-projectifs.

Si $x \in X$ et $y \in Y$, alors $\dim(O_{X \times_{\mathbf{C}} Y, (x,y)}) = \dim(O_{X,x}) + \dim(O_{Y,y})$.

On a $\dim(X \times_{\mathbf{C}} Y) = \dim X + \dim Y$.

Proposition 24.47 : Soient X et Y deux schémas quasi-projectifs et x et y des points non singuliers de X et Y . Alors (x, y) est un point non singulier de $X \times_{\mathbf{C}} Y$.

24.11 Image d'une variété projective.

Théorème 24.48 : Soient X une variété projective et $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}_m$ un morphisme. Alors il existe une sous-variété projective Y de \mathbf{P}_m telle que π se factorise par un morphisme surjectif $\bar{\pi} : X \rightarrow Y$. Nous écrivons $Y = \pi(X)$.

Démonstration :

Si $X \subset \mathbf{P}_n$, soit $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ l'anneau gradué intègre de ce plongement. Notons $\mathbf{C}[Y_0, \dots, Y_m]$ l'anneau gradué de \mathbf{P}_m . Considérons des recouvrements affines $\mathbf{P}_n = \cup D(F_i)$, $X = \cup D(G_{ij})$ et des morphismes

$$\pi_{ij} : D(G_{ij}) \rightarrow D(F_i) \quad \text{avec} \quad \pi|_{D(G_{ij})} = \pi_{ij}.$$

Soient $h_{ij} : \mathbf{C}[Y_0, \dots, Y_m]_{F_i}^{(0)} \rightarrow \mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]_{G_{ij}}^{(0)}$ les homomorphismes correspondants d'anneaux de fonctions. On montre sans difficultés que l'idéal

$$I = \{a \in \mathbf{C}[Y_0, \dots, Y_m], \quad h_{ij}(a^{d^0 F_i} / f_i^{d^0 a}) = 0, \quad \forall i, j\}$$

est premier et gradué. Il est clair que le morphisme π se factorise par un morphisme $\bar{\pi}$ de X dans $Y = V(I)$. Montrons que $\bar{\pi}$ est surjectif.

D'après la construction de Y , il existe une application injective h du corps des fonctions $K(Y)$ de Y dans le corps des fonctions $K(X) = \mathbf{C}(x_i/x_j)$ de X .

Soit y un point de Y , $A = h(O_{Y,y})$ et \mathcal{M} l'idéal maximal de A . Si $y \notin \pi(X)$, alors $y \notin \pi(D(x_i))$ pour tout i , donc $\mathcal{M}A[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i] = A[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i]$ pour tout i . Autrement dit, il existe r_i tel que $x_i^{r_i} \in \mathcal{M}A[x_0, \dots, x_n]_{r_i}$. Finalement, il existe r tel que $(x_0, \dots, x_n)_r \subset \mathcal{M}(x_0, \dots, x_n)_r$. Mais d'après le Lemme de Nakayama, ceci implique $(x_0, \dots, x_n)_r = 0$. Or l'anneau gradué de X , $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$, est un sous-anneau gradué de $A[x_0, \dots, x_n] = A$, donc $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n] = \mathbf{C}$, ce qui entraîne $X = \emptyset$ et $Y = \emptyset$. Le Théorème est démontré.

Corollaire 24.49 : Si $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}_n$ un morphisme de schémas et si X est un schéma projectif, alors $\pi(X)$ est un fermé de \mathbf{P}_n .

Démonstration : D'après le Théorème précédent, chacune des composantes irréductibles de X a pour image un fermé. Une réunion finie de fermés est fermée.

Chapter 25

Faisceaux cohérents.

25.1 Faisceaux de O_X -modules.

Définition 25.1 : Si X est un schéma, un faisceau \mathcal{F} de O_X -modules est la donnée suivante :

(1) Pour tout ouvert U de X le $\Gamma(U, O_X)$ -module $\Gamma(U, \mathcal{F})$ des sections de \mathcal{F} sur U .

(2) Pour tout $V \subset U$, ouverts de X , l'homomorphisme de restriction $\rho_{UV} : \Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{F})$ compatible avec l'homomorphisme de restriction $\Gamma(U, O_X) \rightarrow \Gamma(V, O_X)$

Les modules de sections et les homomorphismes de restriction doivent remplir les conditions suivantes :

(i) $\Gamma(\emptyset, \mathcal{F}) = (0)$.

(ii) $\rho_{UU} = Id_{\Gamma(U, \mathcal{F})}$ pour tout U .

(iii) $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$ pour tout $W \subset V \subset U$.

(iv) La condition de recollement : Si U_i est un recouvrement ouvert de U et si $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$ sont des sections telles que $\rho_{U_i, U_i \cap U_j}(s_i) = \rho_{U_j, U_i \cap U_j}(s_j)$ pour tout (i, j) , il existe une section $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, unique, telle que $\rho_{UU_i}(s) = s_i$ pour tout i .

Il est clair que si U est un ouvert de X et \mathcal{F} un faisceau de O_X -modules, il définit un faisceau restreint $\mathcal{F}|_U$ de O_U -modules.

Retenons, une fois pour toutes, l'interprétation suivante de la condition de recollement.

Proposition 25.2 : Soit \mathcal{F} un faisceau de O_X -modules. Soient U un ouvert de X et $U = \cup_{i=1}^n U_i$ un recouvrement ouvert fini de U . Alors il existe une identification naturelle

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) = \text{Ker}[\oplus_i \Gamma(U_i, \mathcal{F}) \xrightarrow{\phi} \oplus_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F}),$$

où $\phi(s_1, \dots, s_n) = \rho_{U_i, U_i \cap U_j}(s_i) - \rho_{U_j, U_i \cap U_j}(s_j)$.

Exemples :

Le faisceau structural.

Si X est un schéma, O_X lui-même est un faisceau de O_X -modules. C'est le faisceau structural.

Faisceaux cohérents sur un schéma affine.

Si X est un schéma affine d'anneau $\Gamma(X, O_X) = A$ et si N est un A -module de type fini, le faisceau \mathcal{N} associé à N est défini de la façon suivante :

Soit $U = \cup_1^n D(f_i)$ un ouvert de X , alors

$$\Gamma(U, \mathcal{N}) = \text{Ker}[\oplus_i M_{f_i} \xrightarrow{\phi} \oplus_{ij} M_{f_i f_j}]$$

où $\phi(x_1, \dots, x_n) = (x_i - x_j)_{ij}$

On vérifie immédiatement que pour tout $f \in A$, on a $\Gamma(D(f), \mathcal{M}) = M_f$.

Le faisceau structural sur un schéma affine est évidemment cohérent.

Définition 25.3 : *Un sous-faisceau \mathcal{G} de \mathcal{F} est la donnée pour tout ouvert U de X d'un sous- $\Gamma(U, O_X)$ -module, $\Gamma(U, \mathcal{G})$, de $\Gamma(U, \mathcal{F})$ tel que \mathcal{G} est un faisceau de O_X -modules et que tous les homomorphismes de restriction commutent.*

Définition 25.4 : Faisceaux d'idéaux.

Si Y est un sous-schéma fermé de X , le faisceau $\mathcal{J}_{Y/X}$ d'idéaux de Y dans X (on dira souvent, par abus de langage, l'idéal de Y dans X) est défini par

$$\Gamma(U, \mathcal{J}_{Y/X}) = \text{Ker}[\Gamma(U, O_X) \rightarrow \Gamma(U \cap Y, O_Y)].$$

Le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_{Y/X}$ est clairement un sous-faisceau du faisceau structural O_X . On vérifie facilement qu'on a ainsi défini une bijection entre les sous-schémas fermés de X et les faisceaux d'idéaux sur X .

Soit X un schéma affine d'anneau $\Gamma(X, O_X) = A$. Si M est un A -module de type fini et N un sous- A -module de M , le faisceau cohérent \mathcal{N} , associé à N , est un sous-faisceau du faisceau cohérent \mathcal{M} associé à M .

25.2 Faisceaux cohérents.

Définition 25.5 : *Si X est un schéma et \mathcal{F} un faisceau de O_X -modules, on dit que \mathcal{F} est un faisceau cohérent s'il existe un recouvrement affine U_i de X et pour tout i un $\Gamma(U_i, O_X)$ -module de type fini M_i tel que la restriction de \mathcal{F} à U_i soit \mathcal{M}_i .*

Le lecteur démontrera sans moi les énoncés qui suivent.

Théorème 25.6 : *Si U est un ouvert affine de X et \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X , alors $\Gamma(U, \mathcal{F})$ est un $\Gamma(U, O_X)$ -module de type fini et la restriction du faisceau \mathcal{F} à U est le faisceau associé à $\Gamma(U, \mathcal{F})$.*

Un faisceau cohérent \mathcal{F} sur un schéma X est donc déterminé par la donnée d'un recouvrement ouvert affine (U_i) de X et pour tout i du $\Gamma(U_i, O_X)$ -module de type fini $\Gamma(U_i, \mathcal{F})$.

Proposition 25.7 : *Un sous-faisceau d'un faisceau cohérent est cohérent.*

En particulier, un faisceau d'idéaux est cohérent.

Définition 25.8 : Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur le schéma X . Soient $x \in X$, et U un voisinage affine de x . Si \mathcal{M}_x est l'idéal maximal de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ correspondant au point x , on note

\mathcal{F}_x le $\mathcal{O}_{X,x}$ -module de type fini $\Gamma(U, \mathcal{F})_{\mathcal{M}_x}$ et
 $\mathcal{F}(x)$ le \mathbf{C} -espace vectoriel de rang fini $\mathcal{F}_x/\mathcal{M}_x\mathcal{F}_x$.

Il est clair, d'après le Théorème 25.6, que cette définition est convenable, i.e. que contrairement aux apparences \mathcal{F}_x ne dépend pas du voisinage ouvert affine choisi.

Le Théorème 7.23 se lit alors

Théorème 25.9 : Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur le schéma X . La fonction $x \rightarrow \text{rg}_{\mathbf{C}}\mathcal{F}_x$, définie sur X et à valeurs entières, est semi-continue supérieurement.

Définition 25.10 : Un homomorphisme $\mathcal{E} \xrightarrow{h} \mathcal{F}$ de faisceaux cohérents est la donnée pour tout ouvert U de X d'un homomorphisme $\Gamma(U, \mathcal{E}) \xrightarrow{h(U)} \Gamma(U, \mathcal{F})$ de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ -modules commutant aux homomorphismes de restriction.

Si pour tout ouvert affine U l'homomorphisme $h(U)$ est injectif (resp. surjectif), on dit que h est injectif (resp. surjectif).

Si $\mathcal{F} \xrightarrow{h'} \mathcal{G}$ est un homomorphisme de faisceaux cohérents tel que $h'(U) \circ h(U) = 0$ pour tout ouvert U , on dit que

$$\mathcal{E} \xrightarrow{h} \mathcal{F} \xrightarrow{h'} \mathcal{G}$$

est un complexe de faisceaux cohérents.

Si pour tout ouvert affine U , la suite

$$\Gamma(U, \mathcal{E}) \xrightarrow{h(U)} \Gamma(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{h'(U)} \Gamma(U, \mathcal{G})$$

est exacte, le complexe est exact.

Théorème 25.11 : Soit U un ouvert du schéma X . Le foncteur $\Gamma(U, \cdot)$, défini dans la catégorie des faisceaux cohérents sur X et à valeur dans la catégorie des $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ -modules est exact à gauche. Autrement dit, si $h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est un homomorphisme injectif de faisceaux cohérents sur X , l'homomorphisme $h(U) : \Gamma(U, \mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$ est injectif.

Démonstration :

Si U est un ouvert affine, il n'y a rien à démontrer.

Sinon, soit $U = \cup_{i=1}^n U_i$ un recouvrement affine fini de U . Alors l'assertion se déduit immédiatement du diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(U, \mathcal{E}) & \rightarrow & \Gamma(U, \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \oplus_{i=1}^n \Gamma(U_i, \mathcal{E}) & \subset & \oplus_{i=1}^n \Gamma(U_i, \mathcal{F}) \end{array}$$

ATTENTION, si U n'est pas un ouvert affine, le foncteur $\Gamma(U, \cdot)$ n'est pas exact dans la catégorie des faisceaux cohérents. En fait, nous montrerons, éventuellement, plus loin, le résultat suivant.

Théorème 25.12 : *Un schéma X est affine si et seulement si pour toute suite exacte*

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{h} \mathcal{F} \xrightarrow{h'} \mathcal{G} \rightarrow 0$$

de faisceaux cohérents sur X , la suite de $\Gamma(X, O_X)$ -modules

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{h^{(X)}} \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{h'^{(X)}} \Gamma(X, \mathcal{G}) \rightarrow 0$$

est exacte.

Définition 25.13 : *Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux faisceaux cohérents sur X , les faisceaux cohérents $\text{Hom}_{O_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ et $\mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G}$, sur X , sont définis par*

$$\Gamma(U, \text{Hom}_{O_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) = \text{Hom}_{\Gamma(U, O_X)}(\Gamma(U, \mathcal{F}), \Gamma(U, \mathcal{G})), \quad (1)$$

$$\Gamma(U, \mathcal{F} \otimes_{O_X} \mathcal{G}) = \Gamma(U, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(U, O_X)} \Gamma(U, \mathcal{G}), \quad (2)$$

pour tout ouvert affine U de X .

Il est clair que les foncteurs $\text{Hom}_{O_X}(\cdot, \mathcal{G})$, $\text{Hom}_{O_X}(\mathcal{F}, \cdot)$ et $\mathcal{F} \otimes_{O_X} \cdot$, de la catégorie des faisceaux cohérents sur X dans elle-même, ont les variances et les exactitudes à droites ou à gauches qu'on attend d'eux.

ATTENTION, si U n'est pas un ouvert affine, les relations (1) et (2) ne sont pas toujours vérifiées.

On vérifie immédiatement l'énoncé suivant :

Proposition 25.14 : *S'il existe un recouvrement affine (U_i) de X tel que $\Gamma(U_i, \mathcal{F})$ est un $\Gamma(U_i, O_X)$ -module libre pour tout i , les foncteurs $\mathcal{F} \otimes_{O_X} \cdot$ et $\text{Hom}_{O_X}(\mathcal{F}, \cdot)$ sont exacts.*

Définition 25.15 : *Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X . S'il existe un recouvrement de X par des ouverts affines U_i tels que $\Gamma(U_i, \mathcal{F})$ est un $\Gamma(U_i, O_X)$ -module libre pour tout i , on dit que \mathcal{F} est localement libre.*

Il est clair que \mathcal{F} est localement libre si et seulement si \mathcal{F}_x est un $O_{X,x}$ -module libre pour tout $x \in X$.

On a alors évidemment :

Proposition 25.16 : *Si \mathcal{F} est un faisceau cohérent localement libre sur un schéma connexe X alors le rang du $O_{X,x}$ -module libre \mathcal{F}_x ne dépend pas de x .*

Définition 25.17 : *Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent localement libre sur un schéma X . S'il existe un entier r tel que le rang du $O_{X,x}$ -module libre \mathcal{F}_x (i.e. le rang du \mathbf{C} -espace vectoriel $\mathcal{F}(x)$) soit r pour tout x , on dit que \mathcal{F} est un fibré algébrique de rang r sur X . Si ce rang est 1, on dit que \mathcal{F} est un fibré (parfois un faisceau) inversible sur X .*

25.3 Fonctions de degré r sur \mathbf{P}_n .

Définition 25.18 : Le faisceau inversible $O_{\mathbf{P}_n}(r)$ des fonctions de degré r sur \mathbf{P}_n est défini par

$$\Gamma(D(X_i), O_{\mathbf{P}_n}(r)) = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]_{X_i}^{(r)}.$$

Il est clair que $O_{\mathbf{P}_n}(r)$ est un faisceau inversible puisque $\Gamma(D(X_I), O_{\mathbf{P}_n}(r))$ est un $\Gamma(D(X_I), O_{\mathbf{P}_n})$ -module libre de rang 1 de base $X_i^r/1$.

Définition 25.19 : Si $X = \text{Proj}(\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n])$ est un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n , on note $O_X(r)$ le faisceau inversible sur X défini par

$$\Gamma(D(X_i \cap X), O_X(r)) = \mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]_{x_i}^{(r)}.$$

Si \mathcal{F} est un faisceau cohérent sur X , on note $\mathcal{F}(r) = \mathcal{F} \otimes_{O_X} O_X(r)$.

ATTENTION, cette notation est malheureuse car il n'apparaît pas qu'elle est attachée à un plongement fixé de X dans un espace projectif.

25.4 Faisceau cohérent associé à un module gradué de type fini.

Définition 25.20 : Soit $X = \text{Proj}(\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n])$ un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n .

Si M est un $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ -module gradué de type fini, on note \widetilde{M} le faisceau cohérent sur X défini par $\Gamma(D(x_i), \widetilde{M}) = M_{x_i}^{(0)}$.

Si $h : M \rightarrow N$ est un homomorphisme, gradué de degré 0, de $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ -modules gradués de type fini, on note $\tilde{h} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$ l'homomorphisme de faisceaux cohérents qu'il induit.

Exemple : Le faisceau cohérent associé au module gradué $(\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n])[r]$ est $O_X(r)$.

Proposition 25.21 : Si $K \rightarrow M \rightarrow N$ est une suite exacte, à homomorphismes de degré 0, de $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ -modules gradués de type fini, alors

$$\widetilde{K} \rightarrow \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$$

est une suite exacte faisceaux cohérents sur X .

C'est clair.

Exercice : Démontrer la Proposition suivante.

Proposition 25.22 : Soit K un $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ -module gradué de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) $\widetilde{K} = (0)$.
- (ii) $K_n = (0)$ pour $n \gg 0$.

La Proposition qui suit est alors une conséquence immédiate du dernier énoncé.

Proposition 25.23 : Soit $f : M \rightarrow N$ un homomorphisme homogène de degré 0 de $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ -modules gradués de type fini. L'homomorphisme de faisceaux associés $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ est injectif (resp. surjectif) si et seulement si $\text{Ker } f$ (resp. $\text{Coker } f$) est de longueur finie.

Enfin, on vérifie facilement l'énoncé qui suit :

Proposition 25.24 : $\tilde{M}(r) = \widetilde{M[r]}$

Le théorème suivant, fondamental pour la suite de notre propos, demande un peu plus de travail (que nous repoussons à plus tard).

Théorème 25.25 : Soit $X = \text{Proj}(\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n])$ un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n . Pour tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur X , il existe un $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ -module gradué de type fini M tel que $\mathcal{F} = \tilde{M}$.

25.5 Sections d'un faisceau cohérent sur un schéma projectif.

Théorème 25.26 : Si \mathcal{F} est un faisceau cohérent sur un schéma projectif X , le \mathbf{C} -espace vectoriel $\Gamma(X, \mathcal{F})$ est de rang fini.

Nous avons voulu dégager cet énoncé mais il fait partie du résultat plus général qui suit :

Théorème 25.27 : Soit X un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n et $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ un anneau gradué de ce plongement. Si \mathcal{F} est un faisceau cohérent non nul sur X et t_0 un entier, alors

(i) Le $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ -module gradué $F_{t_0} = \bigoplus_{t \geq t_0} \Gamma(X, \mathcal{F}(t))$ est de type fini et de profondeur non nulle. On a $\mathcal{F} = \tilde{F}_{t_0}$.

(ii) Si M est un $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ -module gradué de type fini tel que $\mathcal{F} = \tilde{M}$, il existe un application naturelle

$$\bigoplus_{t \geq t_0} M_t \rightarrow \bigoplus_{t \geq t_0} \Gamma(X, \mathcal{F}(t))$$

dont le noyau et le conoyau sont de longueurs finies.

(iii) Si de plus \mathcal{F} ne contient pas de sous-faisceau dont le support est réduit à un point, le $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ -module gradué $F = \bigoplus_t \Gamma(X, \mathcal{F}(t))$ est de type fini et de profondeur au moins 2.

(iv) Si M est un $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ -module gradué de type fini de profondeur ≥ 2 tel que $\mathcal{F} = \tilde{M}$, l'application naturelle

$$\bigoplus_t M_t \rightarrow \bigoplus_t \Gamma(X, \mathcal{F}(t))$$

est un isomorphisme.

Démonstration du Corollaire :

Compte tenu du Théorème 25.25, (i), (ii) et (iii) sont de simples traductions du Théorème 24.31. Il suffit de remarquer que si M est un $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ -module gradué de type fini tel que $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, on a

$$\bigoplus_{t \geq t_0} \Gamma(X, \mathcal{F}(t)) = H(M)_{t \geq t_0}$$

en utilisant les notations du Théorème 24.31.

Enfin pour (iv), nous savons d'après (ii) que le noyau et le conoyau de l'application naturelle $M \rightarrow \bigoplus_t \Gamma(X, \mathcal{F}(t))$ sont de longueurs finies. Comme M est de profondeur ≥ 2 , l'application est injective. Le Lemme 16.17 montre ensuite qu'elle est surjective.

25.6 Faisceau cohérent engendré par ses sections.

Définition 25.28 : On dit qu'un faisceau cohérent \mathcal{F} sur un schéma X est engendré par ses sections si pour tout ouvert U de X l'image de l'homomorphisme de restriction $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$ engendre le $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ -module $\Gamma(U, \mathcal{F})$.

On a alors évidemment

Proposition 25.29 : Si $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un homomorphisme surjectif de faisceaux cohérents sur X et si \mathcal{F} est engendré par ses sections, alors \mathcal{G} est engendré par ses sections.

On a aussi, d'après le Théorème 25.6 :

Théorème 25.30 : Tout faisceau cohérent sur un schéma affine est engendré par ses sections.

Pour les faisceaux cohérents sur un schéma projectif, on utilisera souvent le résultat suivant :

Théorème 25.31 : Soient X un schéma projectif d'anneau gradué $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ et M un $\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ -module gradué de type fini. Si M est engendré par des éléments de degré $\leq r$, le faisceau cohérent $\widetilde{M}(r)$, sur X , est engendré par ses sections.

Démonstration :

Soit $s \in \Gamma(D(x_i), \widetilde{M}(r))$. Alors pour $l \gg 0$, on a $x_i^l s \in M_{r+l}$. Mais si $A = \mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$, on a $M_{r+l} = A_l M_r$ donc $x_i^l s = \sum_j a_j m_j$, avec $a_j \in A_l$ et $m_j \in M_r$. Soit $s = \sum_j (a_j/x_i^l)(m_j/1)$ et comme $m_j \in M_r \subset \Gamma(X, \widetilde{M}(r))$ le Théorème est démontré.

Corollaire 25.32 : Si X est un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n , le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(r)$ est engendré par ses sections pour $r \geq 0$.

Si \mathcal{F} est un faisceau cohérent sur X , alors $\mathcal{F}(r)$ est engendré par ses sections pour $r \gg 0$.

25.7 Image inverse d'un faisceau cohérent.

Définition 25.33 : Soient $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas affines et \mathcal{F} un faisceau cohérent sur Y . Le faisceau cohérent sur X associé au $\Gamma(X, O_X)$ -module de type fini $\Gamma(X, O_X) \otimes_{\Gamma(Y, O_Y)} \Gamma(Y, \mathcal{F})$ est l'image inverse de \mathcal{F} par π ; il est noté $\pi^*\mathcal{F}$.

Définition 25.34 : Soient $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas et \mathcal{F} un faisceau cohérent sur Y . Soient (U_i) un recouvrement affine de Y et (V_{ij}) un recouvrement affine de $\pi^{-1}(U_i)$. Si $\pi_{ij} : V_{ij} \rightarrow U_i$ sont les morphismes de schémas affines induits par π , l'image inverse $\pi^*\mathcal{F}$ de \mathcal{F} par π est le faisceau cohérent sur X dont, pour tout (i, j) , la restriction à V_{ij} est $\pi_{ij}^*(\mathcal{F}/U_i)$.

Exemple : Si $i : X \rightarrow \mathbf{P}_n$ est une immersion fermée, le faisceau inversible $O_X(r)$ sur X est l'image inverse par i du faisceau inversible $O_{\mathbf{P}_n}(r)$ sur \mathbf{P}_n . On a $O_X(r) = i^*(O_{\mathbf{P}_n}(r))$

Enfin l'énoncé suivant se passe de démonstration.

Théorème 25.35 : L'image inverse d'un faisceau cohérent engendré par ses sections est engendré par ses sections.

25.8 Morphismes dans \mathbf{P}_n . Faisceaux inversibles très amples.

Théorème 25.36 : Un faisceau inversible \mathcal{L} sur X est engendré par ses sections si et seulement si il existe un morphisme $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}_n$ tel que $\mathcal{L} \simeq \pi^*(O_{\mathbf{P}_n}(1))$.

Démonstration :

La condition est clairement suffisante d'après le Théorème 25.35.

Réciproquement, soient $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ des sections engendrant \mathcal{L} . Construisons un morphisme $X \rightarrow \mathbf{P}_n$ ayant la propriété requise.

Soit U_i l'ouvert des points x de X tels que l'application $O_{X,x} \xrightarrow{s_i} \mathcal{L}_x$ est un isomorphisme. Soit V un ouvert affine de U_i . Décrivons un morphisme $V \rightarrow D(X_i) \subset \mathbf{P}_n$. Si $A = \Gamma(V, O_X)$, on a par hypothèse $\Gamma(V, \mathcal{L}) = As_i$, donc pour tout j il existe $a_j \in A$, unique, tel que $s_j = a_j s_i$. L'homomorphisme d'anneaux $f : \mathbf{C}[X_0/X_i, \dots, X_n/X_i] \rightarrow A$ défini par $f(X_j/X_i) = a_j$ définit évidemment un morphisme $V \rightarrow D(X_i)$. Mais X est recouvert par de tels ouverts affines et ces morphismes se recollent entre eux en un morphisme $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}_n$. Enfin, on a, toujours pour $V \subset U_i$ un isomorphisme naturel

$$X_i \mathbf{C}[X_0/X_i, \dots, X_n/X_i] \otimes_{\mathbf{C}[X_0/X_i, \dots, X_n/X_i]} A \simeq As_i.$$

Ces isomorphismes se recollent en l'isomorphisme $\mathcal{L} \simeq \pi^*(O_{\mathbf{P}_n}(1))$ annoncé.

Définition 25.37 : Soient X un schéma projectif et \mathcal{L} un faisceau inversible sur X . S'il existe un plongement projectif $X \subset \mathbf{P}_n$ tel que $\mathcal{L} \simeq O_X(1)$ on dit que \mathcal{L} est très ample.

Nous reviendrons plus loin sur l'étude des faisceaux inversibles très amples.

Chapter 26

Image inverse d'un fermé et fibre d'un point.

Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Si Z est un sous-schéma fermé de Y , nous voulons donner à $\pi^{-1}(Z)$ une structure de sous-schéma fermé de X .

26.1 Extension d'un faisceau d'idéaux par un morphisme.

Si $f : A \rightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux et I un idéal de A , on dit souvent que l'idéal $f(I)B$ est l'extension de l'idéal I par f (ou à B). Cette notation nous convient bien et nous l'étendons naturellement.

Définition 26.1 : Soit $\pi : X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas. Soient (U_i) un recouvrement affine de Y , $(V_{i,j})$ un recouvrement affine de $\pi^{-1}(U_i)$ et $f_{ij} : \Gamma(U_i, O_Y) \rightarrow \Gamma(V_{i,j}, O_X)$ les homomorphismes d'anneaux définissant π .

Si \mathcal{I} est un faisceau d'idéaux sur Y , son extension, notée $\mathcal{I}O_X$, par π (ou à X) est le faisceau d'idéaux sur X défini sur le recouvrement affine (V_{ij}) par

$$\Gamma(V_{ij}, \mathcal{I}O_X) = f_{ij}(\Gamma(U_i, \mathcal{I})\Gamma(V_{ij}, O_X)).$$

Il faut bien sur vérifier que le faisceau d'idéaux ainsi défini ne dépend pas des recouvrements affines choisis. Ceci étant fait, nous pouvons enfin définir l'image inverse d'un fermé.

26.2 Image inverse d'un fermé par un morphisme.

Définition 26.2 : Soient Z un sous-schéma fermé de Y et $\mathcal{J}_{Z/Y}$ le faisceau d'idéaux de Y dans X . L'image inverse $\pi^{-1}(Z)$ de Z par π (ou dans X) est le sous-schéma fermé de X dont le faisceau d'idéaux (ou l'idéal) est l'extension à X de $\mathcal{J}_{Z/Y}$.

On vérifie alors immédiatement l'énoncé suivant.

Proposition 26.3 : Si l'image inverse de Z dans X est X , le morphisme π se factorise par un morphisme $X \rightarrow Z$ et l'immersion fermée $Z \subset Y$.

26.3 Fibre d'un point.

Définition 26.4 Si $Z = y$ est un point de Y , le sous-schéma fermé $\pi^{-1}(y)$ de X est la fibre de y par π .

Nous avons déjà défini la fibre d'un morphisme de schémas affines précédemment, il est clair que nous retombons sur nos pieds.

Le résultat qui suit est local, c'est la Proposition 23.37 réécrite.

Proposition 26.5 : Soient X et Y deux schémas et $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme. Si $x \in X$ et $y = \pi(x)$, on a

$$\dim O_{Y,y} + \dim O_{\pi^{-1}(y),x} \geq \dim O_{X,x}.$$

Si de plus π est surjectif, il existe un ouvert non vide U de X tel que pour $x \in U$ on a

$$\dim O_{Y,y} + \dim O_{\pi^{-1}(y),x} = \dim O_{X,x}.$$

Les deux énoncés qui suivent s'en déduisent immédiatement.

Corollaire 26.6 : Si $\pi : X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas, on a

$$\dim X \leq \dim Y + \sup_{y \in \pi(X)} (\dim(\pi^{-1}(y))).$$

Théorème 26.7 : Si $\pi : X \rightarrow Y$ est un morphisme de variétés projectives, on a

$$\dim X = \dim(\pi(X)) + \inf_{y \in \pi(X)} (\dim(\pi^{-1}(y))).$$

Nous savons (Théorème 24.48) que $\pi(X)$ est une variété. Tous les anneaux locaux de X sont de dimension $\dim(X)$. On conclut à nouveau par la Proposition 23.37.

Pour terminer ce court chapitre, énonçons le Théorème de semi-continuité et le "main theorem" en toute généralité (comme ce sont des assertions de nature locale, elles sont déjà démontrées).

Théorème 26.8 : Le Théorème de semi-continuité.

Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. La fonction $\dim(O_{\pi^{-1}(\pi(x)),x})$, définie dans X et à valeurs dans \mathbf{Z} , est semi-continue supérieurement.

Théorème 26.9 : Le "main theorem".

Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Si $x \in X$ est un point tel que $\dim(O_{\pi^{-1}(\pi(x)),x}) = 0$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et une factorisation, du morphisme composé $U \rightarrow Y$,

$$U \xrightarrow{i} Z \rightarrow Y$$

telle que i est une immersion ouverte et $Z \rightarrow Y$ un morphisme fini.

Chapter 27

Espace tangent. Variété duale.

Rappelons l'énoncé suivant (Critère Jacobien et Corollaire 3.6) :

Théorème 27.1 : Soit $X = V(f_1, \dots, f_r)$ un sous-schéma fermé de \mathbf{A}_n . Soient x est un point de X et $d = \dim O_{X,x}$. Soit \mathcal{J}_l l'idéal engendré par les l -mineurs de la matrice jacobienne (df_i/dX_j) .

Alors $x \in V(\mathcal{J}_{n-d+1})$ et x est un point singulier de X si et seulement si $x \in V(\mathcal{J}_{n-d})$.

Donc, si X est équidimensionnel de dimension d , le lieu singulier $LS(X)$ de X est $X \cap V(\mathcal{J}_{n-d})$. De plus, si X est réduit, l'ouvert $X - LS(X)$ est dense dans X .

Corollaire 27.2 : Soient G_1, \dots, G_r des polynômes homogènes de $\mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$. Soient x est un point de $X = V(G_1, \dots, G_r) \subset \mathbf{P}_n$ et $d = \dim O_{X,x}$. Soit \mathcal{J}_l l'idéal engendré par les l -mineurs de la matrice jacobienne (dG_i/dX_j) .

Alors $x \in V(\mathcal{J}_{n-d+1})$ et x est un point singulier de X si et seulement si $x \in V(\mathcal{J}_{n-d})$.

Si X est équidimensionnel de dimension d , le lieu singulier $LS(X)$ de X est $X \cap V(\mathcal{J}_{n-d})$. De plus, si X est réduit, l'ouvert $X - LS(X)$ est dense dans X .

Démonstration du Corollaire :

Plaçons nous, par exemple, dans l'ouvert affine $D(X_0)$. Soit G un polynôme homogène de degré s . Si $i \geq 1$, on a

$$(dG/dX_i)/X_0^{s-1} = d(G/X_0^s)/d(X_i/X_0).$$

D'autre part l'égalité d'Euler $sG = \sum_0^n X_i dG/dX_i$ entraîne

$$(dG/dX_0)/X_0^{s-1} = (1/s)G/X_0^s - \left[\sum_{i \geq 1} (X_i/X_0) d(G/X_0^s)/d(X_i/X_0) \right].$$

Il en résulte qu'en un point de $V \cap D(X_0)$ les matrices

$$(d(G_i/X_0^{d^0 G_i})/d(X_j/X_0))_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n} \quad \text{et} \quad ((dG_i/dX_j)/X_0^{d^0 G_i - 1})_{1 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq n}$$

ont même rang, ce qui démontre le corollaire.

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Corollaire 27.3 : Soit $X = \text{Proj}(A) \subset \mathbf{P}_n$. Alors X est lisse si et seulement si $A_{\mathcal{P}}$ est un anneau régulier pour tout idéal premier \mathcal{P} distinct de l'idéal irrelevant.

27.1 Hyperplans tangents. Espace tangent

Définition 27.4 : Soient x un point non-singulier d'un sous-schéma X de \mathbf{P}_n et H un hyperplan de \mathbf{P}_n passant par x .

On dit que H est transverse à X en x si l'anneau local $O_{X \cap H, x}$ est régulier de dimension $\dim(O_{X, x}) - 1$. Sinon, on dit que H est tangent à X en x .

L'espace linéaire intersection des hyperplans tangents à X en x est l'espace tangent à X en x .

Exercice : Soit $X = V(F)$, avec $F \in \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$, une hypersurface de \mathbf{P}_n . Vérifier que $V(\sum dF/dX_i(x)X_i)$ est l'unique hyperplan tangent en un point non-singulier x de X .

Proposition 27.5 : Soit x un point non-singulier de $X = Proj(\mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]/(F_1, \dots, F_r))$.

L'espace linéaire tangent à X en x est l'intersection des hyperplans $V(\sum_{i=0}^n dF_j/dX_i(x)X_i)$. Il est de dimension $\dim(O_{V, x})$.

Démonstration :

Comme x est un point non singulier de X , la matrice $(dF_i/dX_j(x))$ a rang $(n - \dim O_{X, x})$.

Soit $H = V(a_0X_0 + \dots + a_nX_n)$, un hyperplan. Alors si H est tangent à X en x la matrice

$$\begin{pmatrix} dF_1/dX_0(x) & \dots & dF_1/dX_n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ dF_r/dX_0(x) & \dots & dF_r/dX_n(x) \\ a_0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

a rang $(n - \dim O_{V, x})$.

Réciproquement si cette matrice a rang $(n - \dim O_{X, x})$ la dernière ligne est combinaison des précédentes. Mais ceci implique que le polynôme $\sum a_i X_i$ est combinaison des polynômes $\sum df_i/dX_j(x)X_j$. Comme ces derniers s'annulent en x , d'après l'égalité d'Euler, H passe par x et est donc tangent à X en x .

Il en résulte que les polynômes homogènes de degré 1 définissant un hyperplan tangent à X en x forment un espace vectoriel engendré par les polynômes $\sum_{i=0}^n dF_j/dX_i(x)X_i$, donc de rang $(n - \dim O_{X, x})$.

Théorème 27.6 : Soient x un point non-singulier d'une sous-variété $X \subset \mathbf{P}_n$ et $d = \dim(O_{X, x})$. Soient F_1, \dots, F_r des polynômes homogènes de l'idéal gradué de X dans \mathbf{P}_n tels que les conditions équivalentes suivantes soient réalisées :

(i) L'intersection des $(n - d)$ hyperplans $\sum dF_i/dX_j(x)X_j$ est l'espace tangent à X en x .

(ii) La matrice $\begin{pmatrix} dF_1/dX_0(x) & \dots & dF_1/dX_n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ dF_r/dX_0(x) & \dots & dF_r/dX_n(x) \end{pmatrix}$ est de rang $(n - d)$.

Alors le sous-schéma fermé $V(F_1, \dots, F_r)$ de \mathbf{P}_n est la réunion de X et d'un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n qui ne passe pas par x .

Démonstration :

Soit $X' = V(F_1, \dots, F_r)$. On a $X \subset X'$, donc $d' \geq d$, avec $d' = \dim(O_{X', x})$.

Mais le schéma dont l'idéal gradué est engendré par les $(n - d)$ -mineurs de la matrice jacobienne (dF_i/dX_j) ne passe pas par x . Le Corollaire 27.2 démontre d'abord que $(n - d) \leq (n - d')$, donc $d' \leq d$, soit $d' = d$, et ensuite que $O_{X',x}$ est un anneau régulier de dimension d . Comme $O_{X,x}$ est un quotient de $O_{X',x}$, le Théorème est démontré.

Remarques :

(i) On a nécessairement $r \geq n - d$.

(ii) Si $X' = X \cup Y$, il est clair que $X \cap Y$ est un fermé de X tel que $x \notin X \cap Y$. Donc $U = X - X \cap Y = X' - Y$ est un voisinage ouvert de x dans X et de x dans X' .

Définition 27.7 : Si F_1, \dots, F_r vérifient les conditions du Théorème précédent, on dit que ces polynômes définissent X au voisinage de x , ou que X est l'intersection des hypersurfaces $V(F_i)$ au voisinage de x .

L'assertion suivante est claire.

Proposition 27.8 : Soient x un point non-singulier d'une sous-variété $X \subset \mathbf{P}_n$ et $d = \dim(O_{X,x})$. Alors X est l'intersection de $(n - d)$ hypersurfaces au voisinage de x .

27.2 Espace dual. Variété d'incidence.

Soient $\sum a_i X_i$ et $\sum b_i X_i$ deux polynômes homogènes non nuls de degré 1 de $\mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$. Ils définissent le même hyperplan si et seulement si (a_0, \dots, a_n) et (b_0, \dots, b_n) sont proportionnels. Autrement dit, il y a une bijection entre les hyperplans $H = V(\sum_{i=0}^n y_i X_i)$ et les points (y_0, \dots, y_n) d'un espace projectif de dimension n et d'anneau gradué $\mathbf{C}[Y_0, \dots, Y_n]$. Nous noterons \mathbf{P}_n^\vee cet espace projectif dual avec ce système de coordonnées homogènes.

Il est bien connu qu'il y a une dualité entre les espaces linéaires de \mathbf{P}_n et ceux de \mathbf{P}_n^\vee . Elle associe à un espace linéaire L de \mathbf{P}_n l'espace linéaire dual $L^\vee \subset \mathbf{P}_n^\vee$ formé par les hyperplans contenant L . On a $\dim(L^\vee) + \dim(L) = n - 1$.

Un point de $\mathbf{P}_n^\vee \times \mathbf{P}_n$ est un couple (H, x) formé d'un hyperplan et d'un point. Remarquons que $x \in H$ si et seulement si le point (H, x) appartient à l'hypersurface $F = V(\sum Y_i X_i)$ de $\mathbf{P}_n^\vee \times \mathbf{P}_n$. En effet, si (y_0, \dots, y_n) et (x_0, \dots, x_n) sont les coordonnées respectives de H et de x , il est clair que $x \in H$ si et seulement si $\sum y_i x_i = 0$.

Définition 27.9 : Dans $\mathbf{P}_n^\vee \times \mathbf{P}_n$ la variété d'incidence est l'hypersurface $F = V(\sum Y_i X_i)$ formée par les couples (H, x) tels que $x \in H$.

Remarque : La Variété d'incidence permet une description simple de la dualité entre \mathbf{P}_n et \mathbf{P}_n^\vee . Soit L un sous-espace linéaire de \mathbf{P}_n . Si $p : F \rightarrow \mathbf{P}_n$ et $q : F \rightarrow \mathbf{P}_n^\vee$ sont les deux morphismes de projection, on a

$$L^\vee = \cap_{x \in L} q(p^{-1}(x)) \quad \text{et} \quad L = \cap_{z \in L^\vee} p(q^{-1}(z)).$$

Lisant à nouveau la Proposition 27.5 et sa preuve, nous obtenons l'énoncé suivant :

Proposition 27.10 : Soient $X = V(F_1, \dots, F_r)$ est un schéma de \mathbf{P}_n et x un point non-singulier de X . Les hyperplans tangents à X en x forment un sous-espace linéaire de \mathbf{P}_n^v , de dimension $(n - \dim O_{X,x} - 1)$, dont l'idéal gradué est engendré par les $(n - \dim O_{V,x} + 1)$ -mineurs de la matrice

$$\begin{pmatrix} df_1/dX_0(x) & \dots & df_1/dX_n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ df_r/dX_0(x) & \dots & df_r/dX_n(x) \\ Y_0 & \dots & Y_n \end{pmatrix}.$$

C'est l'espace linéaire dual de l'espace tangent à V en x .

27.3 Variété duale.

Considérons maintenant une variété non singulière V de \mathbf{P}_n , de dimension d .

Les hyperplans tangents à V forment un sous-ensemble de \mathbf{P}_n^v . Nous voulons montrer que ce sous-ensemble est une sous-variété projective D strictement contenue dans \mathbf{P}_n^v . Donc qu'un hyperplan "général" n'est pas tangent à V , autrement dit qu'il est transverse à V .

La méthode est simple : nous allons d'abord montrer qu'il existe une sous-variété non-singulière \tilde{D} , de dimension $(n - 1)$, de la variété d'incidence, dont les points sont les couples (H, x) , avec $x \in V$ et H tangent à V en x . La variété D sera alors la variété image du morphisme $\tilde{D} \rightarrow \mathbf{P}_n^v$.

Soit $V = Proj(\mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]/(F_0, \dots, F_r))$.

Considérons dans $\mathbf{P}_n^v \times \mathbf{P}_n$ l'intersection \tilde{D} des sous-variétés suivantes :

1⁰-La variété d'incidence.

2⁰-L'image inverse $\mathbf{P}_n^v \times V$ de V dans $\mathbf{P}_n^v \times \mathbf{P}_n$.

3⁰-Les hypersurfaces définies par les $(n + 1 - d)$ -mineurs de la matrice (il faut vérifier qu'ils sont bihomogènes par rapport aux variables X_i et Y_j) :

$$\begin{pmatrix} dF_1/dX_0 & \dots & dF_1/dX_n \\ \dots & \dots & \dots \\ dF_r/dX_0 & \dots & dF_r/dX_n \\ Y_0 & \dots & Y_n \end{pmatrix}$$

Décrivons ensemblistement \tilde{D} :

Si (H, x) un point de $\mathbf{P}_n^v \times \mathbf{P}_n$, soient (y_0, \dots, y_n) les coordonnées de H et (x_0, \dots, x_n) celles de x . Alors $(H, x) \in \tilde{D}$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1⁰ $x \in H$

2⁰ $x \in V$

3⁰ La matrice $\begin{pmatrix} dF_1/dX_0(x) & \dots & dF_1/dX_n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ dF_r/dX_0(x) & \dots & dF_r/dX_n(x) \\ y_0 & \dots & y_n \end{pmatrix}$ a rang $\leq n - d$

Autrement dit, $(H, x) \in \tilde{D}$ si et seulement si $x \in V$ et H est un hyperplan tangent à V en x .

Théorème 27.11 : \tilde{D} est une variété non-singulière de dimension $(n - 1)$.

La démonstration repose sur le Lemme suivant:

Lemme 27.12 : Soit $\tilde{p} : \tilde{D} \rightarrow V$ le morphisme de projection. Pour tout $x \in V$, la fibre $\tilde{p}^{-1}(x)$ est non-singulière de dimension $(n - d - 1)$, isomorphe à $q(\tilde{p}^{-1}(x))$. De plus $q(\tilde{p}^{-1}(x)) \subset \mathbf{P}_n^v$ est l'espace linéaire dual de l'espace tangent à V en x .

Démonstration du Lemme :

Soit $x = (x_0, \dots, x_n)$ un point de $V \subset \mathbf{P}_n$. La fibre $\tilde{p}^{-1}(x)$ est plongée dans $\mathbf{P}_n^v \simeq \mathbf{P}_n^v \times \{x\}$; son idéal gradué est engendré par

1⁰-Le polynôme $\sum_0^n x_i Y_i$,

2⁰-Les $(n + 1 - d)$ -mineurs de la matrice
$$\begin{pmatrix} dF_1/dX_0(x) & \dots & dF_1/dX_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dF_r/dX_0(x) & \dots & dF_r/dX_n(x) \\ Y_0 & \dots & Y_n \end{pmatrix}$$

D'après la Proposition 27.10, c'est l'espace dual de l'espace tangent à V en x , ce qui démontre le Lemme.

Démonstration du Théorème 27.11 :

Le morphisme de projection $\tilde{p} : \tilde{D} \rightarrow V$ est évidemment surjectif. Ses fibres sont toutes de dimension $(n - d - 1)$ (c'est le Lemme).

D'après la Proposition 26.5, on en déduit que $\dim(\tilde{D}) \leq (n - 1)$ et qu'il existe un ouvert non vide U de \tilde{D} tel que $\dim O_{\tilde{D},x} = d + n - d - 1 = n - 1$, pour $x \in U$.

Soit alors $x \in \tilde{D}$ un point tel que $\dim O_{\tilde{D},x} = (n - 1)$. L'anneau $O_{\tilde{D},x}$ est régulier. C'est la Proposition 18.8 appliquée aux anneaux $A = O_{V,\tilde{p}(x)}$ et $B = O_{\tilde{D},x}$ et à l'homomorphisme naturel $O_{V,\tilde{p}(x)} \rightarrow O_{\tilde{D},x}$.

Considérons maintenant X une composante irréductible de dimension $(n - 1)$ de \tilde{D} . Comme pour tout point $x \in X$ l'anneau $O_{\tilde{D},x}$ est régulier de dimension $(n - 1)$, il est clair que X est une composante connexe non-singulière de \tilde{D} . Mais comme le morphisme composé $X \rightarrow \tilde{D} \rightarrow V$ est surjectif et comme toutes les fibres du morphisme $\tilde{D} \rightarrow V$ sont connexes, il en résulte que $X = \tilde{D}$. Le Théorème 27.11 est démontré.

Si D est la variété image du morphisme de projection $\tilde{D} \rightarrow \mathbf{P}_n^v$ (Théorème 24.48), on sait d'après la Proposition 23.37 que $\dim D \leq n - 1$. Il est clair que D est l'ensemble des hyperplans tangents à V . Nous avons donc démontré :

Théorème 27.13 : Les hyperplans tangents à une variété non singulière V de \mathbf{P}_n sont les points d'une variété de \mathbf{P}_n^v de dimension $\leq n - 1$. Cette variété est appelée variété duale de V .

Corollaire 27.14 : (Théorème de Bertini) Soit V une variété non singulière de \mathbf{P}_n . Il existe un ouvert dense U de \mathbf{P}_n^v tel que pour tout hyperplan $H \in U$ le sous-schéma $H \cap V$ est non singulier.

On démontre de manière identique, mais c'est un peu plus pénible, l'énoncé suivant :

Théorème 27.15 : *Les hyperplans tangents aux points non singuliers d'une variété V de \mathbf{P}_n sont les points d'un ouvert dense d'une variété de \mathbf{P}_n^v de dimension $\leq n - 1$. Cette variété est appelée variété duale de V .*

Corollaire 27.16 : *(Théorème de Bertini) Soit V une variété de \mathbf{P}_n . Il existe un ouvert dense U de \mathbf{P}_n^v tel que pour tout hyperplan $H \in U$ le lieu singulier de $H \cap V$ est $H \cap LS(V)$.*

Avant de fermer ce chapitre, il est important de signaler qu'on peut démontrer l'énoncé suivant, bien évidemment plus fort que notre dernier Corollaire.

Théorème 27.17 : *(Théorème de Bertini) Soit X un schéma et $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}_n$ un morphisme. Il existe un ouvert dense U de \mathbf{P}_n^v tel que pour tout hyperplan $H \in U$ le lieu singulier de $\pi^{-1}(H)$ est $\pi^{-1}(H) \cap LS(X)$.*

Chapter 28

Groupes de points. Degré d'un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n .

28.1 Degré d'un groupe de points.

Définition 28.1 : Un schéma de dimension 0 est un groupe de points.

Théorème 28.2 : Un groupe de points est un schéma fini projectif et affine.

Soient X un groupe de points, $x \in X$ et $Z = \text{Proj}(A)$ un schéma projectif dont X est un ouvert.

Comme $O_{X,x} = O_{Z,x}$ est de dimension 0, le point x est une composante irréductible et connexe de Z , i.e. l'idéal premier maximal relevant \mathcal{M}_x de A correspondant à x est un idéal premier minimal de A . Soit \mathcal{Q}_x la composante \mathcal{M}_x -primaire de (0) dans A . Si $\mathcal{I} = \bigcap_{x \in X} \mathcal{Q}_x$, on a $X = \text{Proj}(A/\mathcal{I})$, ce qui prouve bien que X est fini et projectif.

Enfin, si $X \subset \mathbf{P}_n$, soit $F \in \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]_1$ tel que $F(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$. On a $X \subset D(F)$, donc X est affine.

Théorème 28.3 : Si X est un groupe de points, on a $\Gamma(X, O_X) = \prod_{x \in X} O_{X,x}$.

Comme X est affine, c'est le Théorème chinois.

Définition 28.4 : Le degré de X est $\text{rg}_{\mathbf{C}}(\Gamma(X, O_X)) = \sum_{x \in X} l(O_{X,x})$.

La multiplicité de X en x est $l(O_{X,x})$

Remarque : Le degré d'un groupe de points ne dépend pas d'un plongement projectif, alors que nous verrons plus loin que le degré d'un schéma projectif de dimension non nulle n'est défini que pour un plongement donné de ce schéma.

Théorème 28.5 : Soit Z un groupe de points de \mathbf{P}_n .

(i) Si f est une fonction de degré r sur \mathbf{P}_n ne s'annulant en aucun point de Z , alors pour tout entier l le $\Gamma(Z, O_Z)$ -module $\Gamma(Z, O_Z(rl))$ est libre de rang 1, engendré par la fonction f^l .

(ii) Pour tout entier r , le rang du \mathbf{C} -espace vectoriel $\Gamma(Z, O_Z(r))$ est $d^0 Z$.

(iii) Le rang $k(r)$ du conoyau de l'application naturelle $\Gamma(\mathbf{P}_n, O_{\mathbf{P}_n}(r)) \rightarrow \Gamma(Z, O_Z(r))$ décroît strictement jusqu'à 0 pour $r \geq 0$.

(iv) Pour $r \geq 1$, on a $k(r) \leq \max(d^0 Z - r - 1, 0)$, l'égalité ayant lieu si et seulement si le groupe de points est aligné, i.e. sous-schéma d'une droite de \mathbf{P}_n .

Démonstration :

On a évidemment une inclusion $\Gamma(Z, O_Z)f^l \subset \Gamma(Z, O_Z(r))$. Mais si g est une fonction de degré rl sur Z , il est clair que g/f^l est une fonction de degré 0, donc un élément de $\Gamma(Z, O_Z)$, ce qui démontre (i).

(ii) est une conséquence immédiate de (i).

Pour démontrer (iii), considérons A l'anneau gradué relevant du plongement $Z \subset \mathbf{P}_n$ et h un polynôme de degré 1 ne s'annulant en aucun point de Z . On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & A_r & \rightarrow & \Gamma(Z, O_Z(r)) & \rightarrow & D_r \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h \\
 0 & \rightarrow & A_{r+1} & \rightarrow & \Gamma(Z, O_Z(r+1)) & \rightarrow & D_{r+1} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & (A/hA)_{r+1} & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

où D_r est pour tout r le conoyau de l'application naturelle. Rappelons que $D_r = 0$ pour $r \gg 0$. Comme la multiplication par h définit un isomorphisme entre $\Gamma(Z, O_Z(r))$ et $\Gamma(Z, O_Z(r+1))$, le diagramme du serpent montre que $\text{Ker}(D_r \xrightarrow{h} D_{r+1}) \simeq (A/hA)_{r+1}$. Mais les entiers l tels que $(A/hA)_l \neq 0$ forment un ensemble connexe, donc pour $r \geq 0$, la suite $rg(D_r)$ décroît strictement jusqu'à 0.

Pour (iv), remarquons que $k(0) = d - 1$, par définition de $d = d^0 Z$. Il est clair d'après (iii) qu'on a $k(r) \leq \max(d^0 Z - r - 1, 0)$. De plus si l'égalité a lieu pour un $r > 0$, on a $k(1) = d - 2$. Dans ce cas, les formes linéaires s'annulant sur Z , i.e. le noyau de l'application $\Gamma(\mathbf{P}_n, O_{\mathbf{P}_n}(1)) \rightarrow \Gamma(Z, O_Z(1))$, forment un espace vectoriel de rang $n - 1$. Elles engendrent donc l'idéal gradué d'une droite de \mathbf{P}_n contenant Z . Réciproquement, si L est une droite contenant Z , l'application $\Gamma(\mathbf{P}_n, O_{\mathbf{P}_n}(r)) \rightarrow \Gamma(Z, O_Z(r))$ se factorise à travers $\Gamma(L, O_L(r))$ et le rang de cet espace vectoriel est $r + 1$.

Corollaire 28.6 : Soit $Z = \text{Proj}(\mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]) \subset \mathbf{P}_n$ un groupe de points d'anneau. Alors

$$d^0(Z) = P_A = rg(A_r) \quad \text{pour } r \gg 0,$$

où P_A est le polynôme de Hilbert de l'anneau gradué A .

Signalons quelques énoncés simples :

Proposition 28.7 : Soit Z un groupe de points de \mathbf{P}_n d'anneau gradué A .

Si pour un entier r l'application naturelle $A_r \rightarrow \Gamma(Z, O_Z(r))$ n'est pas surjective, le groupe de points Z est contenu dans un sous-espace linéaire de \mathbf{P}_n de dimension $\leq d - 1 - r$.

Démonstration :

Posons $D_t = \text{coker}(\Gamma(\mathbf{P}_n, O_{\mathbf{P}_n}(t)) \rightarrow \Gamma(Z, O_Z(t)))$. D'après l'assertion (iii) du Théorème précédent $rg(D_t)$ est une suite strictement décroissante jusqu'à 0. Donc si $D_r \neq 0$, on a $rg(D_1) \geq r$ et $rg[\Gamma(\mathbf{P}_n, O_{\mathbf{P}_n}(1)) \rightarrow \Gamma(Z, O_Z(1))] \leq d - r$, ce qui démontre la Proposition.

Ce résultat peut être précisé de la manière suivante :

Théorème 28.8 : *Soit Z un groupe de points de degré d de \mathbf{P}_n . On suppose que pour tout $l \leq n - 1$ il n'y a pas de sous-groupe de points de Z de degré $l + 2$ contenu dans un espace linéaire de dimension l . Si A est l'anneau gradué de Z , alors le rang de l'application $A_r \rightarrow \Gamma(Z, O_Z(r))$ est, pour tout r , au moins égal à $\min(d, nr + 1)$.*

Démonstration :

Faisons une récurrence sur d . D'après la Proposition précédente le résultat est vérifié si $d \leq n + 1$. Si $d \geq n + 2$, soient Z' un sous-groupe de points de degré n de Z et H un hyperplan contenant Z' . Alors $H \cap Z = Z'$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & A_r & \rightarrow & \Gamma(Z, O_Z(r)) & \simeq & \mathbf{C}^d \\
 & & \downarrow H & & \downarrow H & & \downarrow H \\
 0 & \rightarrow & A_{r+1} & \rightarrow & \Gamma(Z, O_Z(r+1)) & \simeq & \mathbf{C}^d \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & (A/HA)_{r+1} & \rightarrow & \Gamma(Z', O_{Z'}(r+1)) & \simeq & \mathbf{C}^n \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Pour $r \geq 0$ le rang de $[(A/HA)_{r+1} \rightarrow \Gamma(Z', O_{Z'}(r+1))]$ est n . D'autre part, le noyau de $\Gamma(Z, O_Z(r+1)) \rightarrow \Gamma(Z', O_{Z'}(r+1))$ est \mathbf{C}^{d-n} pour tout r . On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & (A/(0:H))_r & \rightarrow & \mathbf{C}^{d-n} & & \\
 & & \downarrow H & & \downarrow H & & \\
 0 & \rightarrow & A_{r+1} & \rightarrow & \mathbf{C}^d & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & (A/HA)_{r+1} & \rightarrow & \mathbf{C}^n & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Il montre que $A/(0:H)$ est l'anneau gradué d'un groupe de points Z'' de degré $d - n$. Mais $A/(0:H)$ est un quotient de A , donc Z'' est un sous-groupe de points de Z et il vérifie évidemment l'hypothèse de position générale. Par hypothèse de récurrence le rang de $(A/(0:H))_r \rightarrow \mathbf{C}^{d-n}$ est au moins $\min(d - n, rn + 1)$ et le Théorème s'en déduit facilement.

28.2 Genre virtuel d'un groupe de points plongé.

Définition 28.9 : *Si Z est un groupe de points de \mathbf{P}_n , nous appellerons genre virtuel de Z dans \mathbf{P}_n et nous noterons $g_v(Z, \mathbf{P}_n)$ l'entier $\sum_{r \geq 0} \text{rang}[\text{coker}(\Gamma(\mathbf{P}_n, O_{\mathbf{P}_n}(r+1)) \rightarrow \Gamma(Z, O_Z(r+1)))]$.*

Remarque : Le genre virtuel de Z dans \mathbf{P}_n n'est pas intrinsèque à Z , il est relatif au plongement de Z dans \mathbf{P}_n . Toutefois, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté nous parlerons du genre virtuel de Z et nous écrirons $g_v(Z)$.

L'énoncé suivant se déduit immédiatement du Théorème précédent.

Corollaire 28.10 : Soit Z un groupe de points de degré d de \mathbf{P}_n . On suppose que pour tout $l \leq n-1$ il n'y a pas de sous-groupe de points de Z de degré $l+2$ contenu dans un espace linéaire de dimension l . Alors si t est la partie entière de $(d^0(Z) - 1)/n$, on a

$$g_v(Z, \mathbf{P}_n) \leq t(d^0(Z) - 1 - n(t+1)/2).$$

28.3 Degré d'un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n .

Définition 28.11 : Soit $X = \text{Proj}(\mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]/\mathcal{I})$ un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n .

Soient $A = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]/\mathcal{I}$, P_A le polynôme de Hilbert de A et d le degré de P_A . Le degré du plongement de $X \subset \mathbf{P}_n$ est le nombre entier e tel que $e/d!$ est le coefficient dominant du polynôme P_A .

Remarques :

(i) Bien que \mathcal{I} ne soit pas uniquement défini par X , cette définition est sans ambiguïté car si \mathcal{I}' est un idéal gradué tel que $V(\mathcal{I}) = V(\mathcal{I}')$, on a $\mathcal{I}_r = \mathcal{I}'_r$ pour r assez grand.

(ii) Le degré n'est vraiment significatif que pour les sous-schémas fermés équidimensionnels. En effet, si $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ où $\dim(V(\mathcal{I}_2)) < \dim(V(\mathcal{I}_1))$, on a clairement $d^0(V(\mathcal{I})) = d^0(V(\mathcal{I}_1))$. L'énoncé qui suit souligne bien le sens de cette remarque.

Proposition 28.12 : Soient X et X' deux sous-schémas fermés de dimension d de \mathbf{P}_n . On suppose que $X' \subseteq X$ et que X est équidimensionnel et sans composante immergée. Alors si $d^0(X) = d^0(X')$ on a $X = X'$.

Démonstration :

Soient A et A' les anneaux gradués relevants de V et V' dans \mathbf{P}_n . Si K est le noyau de l'application surjective naturelle $A \rightarrow A'$, le degré du polynôme de Hilbert de K est strictement plus petit que le degré du polynôme de Hilbert de A , donc $\dim K < \dim A$. Mais comme A est équidimensionnel et sans composante immergée ceci implique $K = 0$.

Il faut bien sur interpréter géométriquement le degré de V .

Théorème 28.13 : Soit $X \subset \mathbf{P}_n$ un schéma projectif de dimension d .

(i) Il existe un ouvert dense $U \subset \mathbf{P}_n^v$ tel que pour tout $H \in U$, le schéma $H \cap X \subset \mathbf{P}_n$ est de dimension $(d-1)$ et de même degré que X .

(ii) Si de plus l'ouvert des points réguliers de X est dense, l'ouvert des points réguliers de $H \cap X$ est dense.

Démonstration : Soit $A = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]/\mathcal{I}$ un anneau gradué du plongement de X dans \mathbf{P}_n . Soient \mathcal{P}_i , avec $i = 1, \dots, r$ les idéaux premiers gradués relevants associés à \mathcal{I} . Les hyperplans $H = V(P)$ tels que $P \in \mathcal{P}_i \cap (X_0, \dots, X_n)_1$ forment un fermé stricte $V_i \subset \mathbf{P}_n^v$ (stricte car \mathcal{P}_i est relevant). Les hyperplans $H \in \mathbf{P}_n^v - \cup_1^r V_i$ vérifient l'énoncé. En effet, soit P un polynôme homogène de degré 1 tel que $P \notin \mathcal{P}_i$, pour tout i et soit $K = (0) : P$ l'idéal de A annihilant P . Alors K est un A -module irrelevant, i.e. $K_l = (0)$ pour $l \gg 0$. Les suites exactes

$$0 \rightarrow K_{l-1} \rightarrow A_{l-1} \xrightarrow{P} A_l \rightarrow (A/PA)_l \rightarrow 0$$

démontrent alors (i).

(ii) est une conséquence immédiate du Théorème de Bertini.

Corollaire 28.14 : Soient V un sous-schéma de dimension d de \mathbf{P}_n et H_1, \dots, H_d des hyperplans de \mathbf{P}_n suffisamment généraux. Alors :

(i) Le degré du groupe de points $V \cap P$ est égal à $d^0(V)$.

(ii) Si V est un schéma réduit et si les hyperplans H_i , le groupe de points $V \cap P$ consiste de $d^0(V)$ points distincts.

Définition 28.15 : Soient V et V' deux sous-schémas fermés de \mathbf{P}_n . Nous dirons que V et V' se coupent (ou s'intersectent) proprement si pour toutes composantes irréductibles V_i de V et V'_j de V' on a $\dim(V_i \cap V'_j) = \dim V_i + \dim V'_j - n$ (le sous-schéma vide a toutes les dimensions).

On a enfin la conséquence immédiate suivante du Théorème de Bézout.

Théorème 28.16 : Soient X et X' sont deux sous-schémas fermés de \mathbf{P}_n , tels que $\dim(X) + \dim(X') = n$, et d'intersection propre. Si pour tout point x de $X \cap X'$ les anneaux locaux $O_{X,x}$ et $O_{X',x}$ sont de Cohen-Macaulay, on a $d^0(X \cap X') = d^0(X).d^0(X')$.

28.4 Genre virtuel des groupes de points plans.

Théorème 28.17 : Soit C une courbe plane réduite et irréductible de degré s . Si Z est un groupe de points de degré d contenu dans C , on a

$$g_v(Z) \leq 1 + [d(d + s(s - 4)) - r(s - r)(s - 1)]/2s$$

où $d = st - r$ avec $0 \leq r < s$. De plus $g_v(Z) = 1 + [d(d + s(s - 4))]/2s$ si et seulement si Z est l'intersection complète de C et d'une courbe de degré $t = d/s$ du plan.

Démonstration :

Soit $A = \mathbf{C}[X_0, X_1, X_2]/(F) = \mathbf{C}[x_0, x_1, x_2]$ l'anneau gradué de C . On peut supposer que le point $(0, 0, 1)$ n'est pas dans C . Nous allons étudier la projection, de centre $(0, 0, 1)$, de C sur \mathbf{P}_1 .

Comme $F = X_2^s + a_1(X_0, X_1)X_2^{s-1} + \dots$, l'anneau A est entier sur l'anneau de polynômes à deux variables $S = \mathbf{C}[X_0, X_1]$. Plus précisément A est un S -module libre gradué et $(x_2^i)_{i=0, \dots, s-1}$, est une base formée d'éléments homogènes. On a donc $A \simeq \bigoplus_{0 \leq i < s} S[-i]$.

Soit maintenant B l'anneau relevant de Z . C'est un quotient de A et un S -module gradué de type fini. Comme $\text{prof}_S(B) = 1$, on a $\text{dp}_S(B) = 1$. Donc le noyau de l'application surjective $A \rightarrow B$, i.e. le quotient de l'idéal relevant I de Z par (F) , est un S -module libre gradué. Il est nécessairement de rang s (car B est un S -module de dimension 1, donc de torsion), c'est à dire de la forme $\bigoplus_{0 \leq i < s} S[-n_i]$. Finalement, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{0 \leq i < s} S[-n_i] \rightarrow \bigoplus_{0 \leq i < s} S[-i] \rightarrow B \rightarrow 0.$$

Elle démontre $\text{rg}(B_r) = \sum_{0 \leq i < s} [\text{rg}(S_{r-i}) - \text{rg}(S_{r-n_i})] = \sum_{0 \leq i < s} [(r-i+1)_+ - (r-n_i+1)_+]$, pour tout r (où $(\cdot)_+$ est la partie positive).

Comme $\text{rg}(B_r) = d$ pour r assez grand, on en déduit $d = \sum_{0 \leq i < s} (n_i - i)$. Ceci peut s'interpréter de la manière suivante : Le déterminant de l'application de S -modules libres $\bigoplus_{0 \leq i < s} S[-n_i] \rightarrow \bigoplus_{0 \leq i < s} S[-i]$ est l'équation de la projection de Z dans \mathbf{P}_1 .

Lemme 28.18 : *Les entiers n_i forment un ensemble connexe, i.e. si $n_0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_{s-1}$ alors $n_{i+1} \leq n_i + 1$ pour $i \geq 0$.*

Démonstration du Lemme :

Notons $J = I/(F)$ l'idéal gradué de Z dans A . Comme $J \simeq \bigoplus_{0 \leq i < s} S[-n_i]$, il existe dans J des éléments y_0, \dots, y_{s-1} de degrés respectifs n_0, \dots, n_{s-1} engendrant J comme S -module. D'autre part, comme J est un idéal de A , l'élément x_2 opère dans J . Supposons $n_r > n_{r-1} + 1$. On a pour $i = 0, \dots, r-1$ des relations

$$x_2 y_i = a_{i,0} y_0 + a_{i,1} y_1 + \dots + a_{i,s-1} y_{s-1}$$

avec $a_{i,j} \in S$ et $d^0 a_{i,j} + n_j = n_i + 1$, donc $d^0 a_{i,j} < 0$ pour $j \geq r$, ce qui implique $a_{i,j} = 0$ pour $j \geq r$. On en déduit que le déterminant de la matrice $x_2 Id_r - (a_{i,j})_{0 \leq i, j \leq r-1}$, à coefficients dans A , annule y_i pour $i = 0, \dots, r-1$. Comme A est un anneau intègre, ce déterminant est nul, donc le polynôme $\det(X_2 Id_r - (a_{i,j}))$ est un multiple de F . Ceci implique $r \geq s$ et le Lemme est démontré.

Revenons à la démonstration du Théorème et introduisons la suite d'entiers $m_i = t + i$ pour $i < s - r$ et $m_i = t + i - 1$ pour $i \geq s - r$. On a $\sum_{0 \leq i < s} (m_i - i) = d$. Posons

$$w_l = \sum_{0 \leq i < s} [(l - i + 1)_+ - (l - m_i + 1)_+].$$

Nous allons montrer $\text{rg}(B_l) \leq w_l$ pour $l \geq 1$ et en déduire le Théorème.

Pour cela, remarquons qu'il existe un entier k , avec $0 \leq k \leq s - 1$, tel que $n_i \geq m_i$ pour $i < k$ et $n_j \leq m_j$ pour $j \geq k$. En effet, on a d'une part $m_{i+1} = m_i + 1$ sauf pour au plus un i et d'autre part $n_{i+1} \leq n_i + 1$, donc $n_i < m_i$ implique $n_j \leq m_j$ pour $j > i$. Ceci démontre bien l'existence d'un tel k .

On en déduit que $(l - n_i + 1)_+ - (l - m_i + 1)_+$ est négatif pour $i < k$ et positif pour $i \geq k$. Ceci implique que la suite $(\text{rg}(B_l) - w_l)_{l \geq 0}$ est d'abord décroissante et ensuite croissante. Mais comme pour l assez grand $\text{rg}(B_l) - w_l = \sum_{0 \leq i < s} (m_i - n_i) = 0$, ceci entraîne $\text{rg}(B_l) - w_l \leq 0$ pour tout l .

Rappelons que $g_v(Z) = \sum_{i>0} (d - rg(B_i))_+$. On a donc $g_v(Z) \leq \sum_{i>0} (d - w_i)_+$. Il reste à vérifier que cette somme est $1 + [d(d + s(s - 4)) - r(s - r)(s - 1)]/2s$, cet exercice est laissé au lecteur.

Enfin, considérons le cas $g_v(Z) = 1 + [d(d + s(s - 4))]/2s$. Dans ce cas $r = 0$ et $m_0 = d/s$. Revenant à la démonstration, on a $rg(B_l) = w_l$ pour tout $l \geq 1$. On en déduit immédiatement $n_i = m_i$ pour tout i . En particulier $n_0 = d/s$. Mais la résolution

$$0 \rightarrow \bigoplus_{0 \leq i < s} S[-n_i] \rightarrow \bigoplus_{0 \leq i < s} S[-i] \rightarrow B \rightarrow 0$$

montre qu'il existe un élément non nul $\sum_{0 \leq i < s} b_i x_2^i$ de A , de degré d/s , dont l'image dans B est 0. Autrement dit, le polynôme $G = \sum_{0 \leq i < s} b_i X_2^i$ n'est pas divisible par F et Z est contenu dans le groupe de points $C \cap V(G)$. Mais d'après le Théorème de Bezout ce groupe de points a degré d . Il est donc égal à Z d'après la Proposition 28.12.

Chapter 29

Diviseurs. Groupe de Picard.

Diviseurs de Weil.

Dans cette section X sera toujours un schéma connexe et normal (c'est à dire dont tous les anneaux locaux sont intégralement clos, i.e. normaux).

Définition 29.1 : Une sous-variété de codimension 1 de X est un diviseur de Weil irréductible de X .

Un diviseur de Weil de X est une combinaison, à coefficients entiers, de diviseurs irréductibles de X . Si les coefficients sont tous positifs, on dit que le diviseur est effectif ou positif.

On note $\text{Div}_W(X)$ le groupe des diviseurs de Weil de X .

Exemples :

(i) Si X est un schéma affine d'anneau de fonctions A , le groupe des diviseurs de Weil de X est donc le groupe abélien libre engendré par les idéaux premiers de hauteur 1 de l'anneau intégralement clos A .

(ii) Dans l'espace projectif, il est clair que le groupe des diviseurs de Weil est le groupe libre engendré par les hypersurfaces irréductibles. Si $Y_i = V(F_i)$ sont des hypersurfaces irréductibles et si $D = \sum_{i=1, \dots, l} n_i Y_i$ est un diviseur positif, on lui associe l'hypersurface $V(F_1^{n_1} \dots F_l^{n_l})$. Ceci définit évidemment une bijection entre les diviseurs positifs et les hypersurfaces de l'espace projectif.

Définition 29.2 : Soit Z un sous-schéma fermé de X . Soit Y un diviseur de Weil irréductible de X . Si U_i est un ouvert affine de X tel que $U_i \cap Y_i$ est dense dans Y_i , soit \mathcal{P}_i l'idéal premier de $A_i = \Gamma(U_i, O_X)$ vérifiant $V(\mathcal{P}_i) = U_i \cap Y_i$. Soit alors \mathcal{I} l'idéal de A_i tel que $Z \cap U_i = V(\mathcal{I})$. On appelle multiplicité de Z le long de Y , et on note $e_Y(Z)$, la longueur $l((A_i/\mathcal{I})_{\mathcal{P}_i})$.

Le Lecteur doit bien sûr vérifier que la multiplicité $e_Y(Z)$ ne dépend que de Z et Y .

Théorème 29.3 : Si Z est un sous-schéma fermé strict de X , les diviseur de Weil irréductible Y de X tels que $e_Y(Z) \neq 0$ sont en nombre fini.

C'est la décomposition primaire bien comprise puisque $e_Y(Z) \neq 0$ si et seulement si $Y \subset Z$.

Définition 29.4 : Un sous-schéma fermé Z de X est de pure codimension 1 si pour tout ouvert affine U de X les idéaux premiers associés au quotient $\Gamma(U \cap Z, O_Z)$ de l'anneau $\Gamma(U, O_X)$ sont tous de hauteur 1.

Remarque : Il suffit, comme toujours, de considérer un recouvrement affine de X .

Théorème 29.5 : *L'application $Z \rightarrow \sum_Y e_Y(Z)Y$, où la somme est prise sur l'ensemble des diviseurs irréductibles de X , entre les sous-schémas de pure codimension 1 de X et l'ensemble des diviseurs de Weil positifs est bijective.*

Démonstration :

L'application est évidemment surjective. Pour montrer qu'elle est injective, comme Z est déterminé par les ouverts $Z \cap U$ pour tout ouvert affine U , il suffit de le vérifier lorsque X est affine. Mais si A est un anneau normal et \mathcal{I} un idéal de A ne contenant que des idéaux premiers de hauteur 1 dans sa décomposition primaire, on a $\mathcal{I} = \cap(A \cap \mathcal{I}A_{\mathcal{P}})$, pour $ht(\mathcal{P}) = 1$.

Comme $ht(\mathcal{P}) = 1$, l'anneau $A_{\mathcal{P}}$ est un anneau de valuation discrète. Il est clair que $\mathcal{I}A_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^{l_{\mathcal{P}}} A_{\mathcal{P}}$ où $l_{\mathcal{P}} = l(A_{\mathcal{P}}/\mathcal{I}A_{\mathcal{P}})$. Donc

$$\mathcal{I} = \cap(A \cap \mathcal{P}^{l_{\mathcal{P}}} A_{\mathcal{P}}) \quad , \text{ pour } ht(\mathcal{P}) = 1,$$

et le Théorème est démontré.

Dans la suite de ce texte nous confondrons souvent, par abus de langage, un diviseur effectif de Weil avec le sous-schéma fermé (de pure codimension 1) qui lui correspond.

Soit Y est un diviseur irréductible de X . Si U est un ouvert affine d'anneau de fonctions A , tel que $U \cap Y$ est dense dans Y et si \mathcal{P} est l'idéal premier de $Y \cap U$ dans A , nous avons vu que l'anneau de valuation discrète $A_{\mathcal{P}}$ ne dépendait que de Y .

Définition 29.6 : *v_Y est la valuation discrète associée au diviseur de Weil irréductible Y de X .*

Proposition 29.7 : *Si f est une fonction rationnelle non nulle sur X , l'ensemble des diviseurs irréductibles Y tels que $v_Y(f) \neq 0$ est fini.*

L'énoncé est en fait local et presque évident :

Proposition 29.8 : *Soient A un anneau normal et f un élément non nul du corps des fractions de A . L'ensemble des idéaux premiers \mathcal{P} de hauteur 1 de A tels que f n'est pas une unité de $A_{\mathcal{P}}$ est fini.*

En effet, si $f = a/b$, où $a, b \in A$, cet ensemble est contenu dans l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 contenant a ou b .

Nous pouvons donc donner la définition suivante :

Définition 29.9 : *Si f est une fonction rationnelle sur X , on appelle diviseur de f , et on note $div(f)$, la somme $= \sum_Y v_Y(f)Y$ (prise sur l'ensemble des diviseurs irréductibles de X).*

Si $K(X)$ est le corps des fonctions rationnelles sur X , on a évidemment la propriété suivante :

Proposition 29.10 : *L'application $div(.) : K(X)^* \rightarrow Div_W(X)$ est un homomorphisme de groupes.*

Définition 29.11 : Un élément de $\text{div}(K(X)^*)$ est un diviseur principal. Deux diviseurs D et D' tels que $D - D' \in \text{div}(K(X)^*)$ sont linéairement équivalents. Le groupe $\text{Div}_W(X)/\text{div}(K(X)^*)$ est le groupe $\text{Cl}_W(X)$ des classes de diviseurs de Weil de X .

Théorème 29.12 : Si X est un schéma affine d'anneau de fonctions A , le groupe des classes de diviseurs de Weil de X est nul si et seulement si A est factoriel.

Démonstration :

Soient \mathcal{P} un idéal premier de hauteur 1 de A et f un élément du corps des fractions de A . On a $\mathcal{P} = fA$ si et seulement si $v_Y(f) = 1$ pour $Y = V(\mathcal{P})$ et $v_Y(f) = 0$ pour $Y \neq V(\mathcal{P})$.

Diviseurs de \mathbf{P}_n .

Nous savons que tout diviseur irréductible Y sur \mathbf{P}_n est de la forme $Y = V(F)$ où F est un polynôme irréductible homogène en $n + 1$ variables. Posons $d^0 Y = d^0 F$.

Définition 29.13 : Si $D = \sum_i l_i Y_i$ est un diviseur de \mathbf{P}_n , on pose $d^0 D = \sum_i l_i d^0(Y_i)$.

Théorème 29.14 : L'application $d^0(\cdot) : \text{Div}_W(\mathbf{P}_n) \rightarrow \mathbf{Z}$ est un homomorphisme surjectif de groupes dont le noyau est le sous-groupe des diviseurs principaux.

Démonstration :

Un diviseur D est de degré 0 si et seulement si $D = D' - D''$ où D' et D'' sont deux diviseurs effectifs de même degré.

Si $D' = \sum_i l_i Y_i$ et $D'' = \sum_j m_j Z_j$ avec $Y_i = V(F_i)$ et $Z_j = V(G_j)$, on a $d^0(\prod F_i^{l_i}) = d^0(\prod G_j^{m_j})$. Alors $f = (\prod F_i^{l_i})/(\prod G_j^{m_j})$ est une fonction rationnelle sur \mathbf{P}_n telle que $\text{div}(f) = D$.

Réciproquement si f est une fonction sur \mathbf{P}_n , il existe des polynômes homogènes, de même degré, F et G tels que $f = F/G$, donc $d^0(\text{div}(f)) = 0$.

Corollaire 29.15 : L'application $d^0(\cdot)$ induit un isomorphisme $\text{Cl}_W(\mathbf{P}_n) \simeq \mathbf{Z}$.

Diviseurs de Weil d'une courbe projective.

Rappelons qu'une courbe est normale si et seulement si elle est lisse. Un diviseur de Weil irréductible sur une courbe C est un point P de cette courbe. Si $D = \sum_i l_i P_i$ est un diviseur de C nous poserons $d^0 D = \sum_i l_i$. Un point est donc un diviseur de degré 1.

Théorème 29.16 : L'application $d^0 : \text{Div}_W(C) \rightarrow \mathbf{Z}$ se factorise à travers $\text{Cl}_W(C)$.

Démonstration :

Considérons un plongement projectif $C \subset \mathbf{P}_n$. Si f est une fonction rationnelle sur C , il existe des polynômes P et Q , de même degré, tels que $f = p/q$, où p et q sont les fonctions de même degré induites sur C . Les groupes de points $D = V(P) \cap C$ et $D' = V(Q) \cap C$ sont alors des diviseurs effectifs de C et on a $\text{div}(f) = D - D'$. Comme d'après le Théorème de Bézout les groupes de points D et D' ont même degré, on a $d^0(\text{div}(f)) = 0$.

L'énoncé suivant montre que le noyau de cette application peut être beaucoup plus grand que le sous-groupe des diviseurs principaux.

Théorème 29.17 : *Si deux points distincts x et y d'une courbe lisse projective sont linéairement équivalents cette courbe est isomorphe à \mathbf{P}_1 . Réciproquement, deux points de \mathbf{P}_1 sont équivalents.*

Démonstration (rédaction remise à plus tard):

Diviseurs de Cartier.

Définition 29.18 : *Soit D un diviseur de Weil d'un schéma normal X . On dit que D est un diviseur de Cartier de X s'il existe un recouvrement ouvert affine U_i de X tel que pour tout i le diviseur $D \cap U_i$ de U_i est principal.*

Autrement dit, un diviseur de Cartier est un diviseur de Weil localement principal. En fait il est naturel de définir les diviseurs de Cartier en toute généralité, c'est à dire sur tous schémas.

Définition 29.19 : *Un représentant d'un diviseur de Cartier sur un schéma X est la donnée d'un recouvrement affine U_i de X et pour tout i d'un élément régulier f_i de l'anneau total des fractions de l'anneau des fonctions de U_i tels que pour tous i, j et pour tout ouvert affine $V \subset U_i \cap U_j$ l'élément f_i/f_j soit une unité de l'anneau des fonctions définies sur V .*

Deux représentants (U_i, f_i) et (U'_l, f'_l) représentent le même diviseur de Cartier si pour tous i, l et pour tout ouvert affine $V \subset U_i \cap U'_l$ l'élément f_i/f'_l est une unité de l'anneau des fonctions définies sur V .

Définition 29.20 : *Un diviseur de Cartier représenté par (U_i, f_i^{-1}) avec $f_i \in \Gamma(U_i, O_X)$ pour tout i est effectif.*

Il est clair que tout représentant d'un diviseur de Cartier effectif a alors cette propriété caractéristique. Dans le cas où X est normal, un diviseur de Cartier est effectif si et seulement si le diviseur de Weil qu'il définit est effectif.

Remarques :

(i) Par abus de langage nous confondrons souvent le diviseur de Cartier effectif D représenté par (U_i, f_i^{-1}) où $f_i \in \Gamma(U_i, O_X)$ avec le sous-schéma fermé (noté D aussi) de X de pure codimension 1 dont le faisceau d'idéaux $I_{D/X}$ est défini par $\Gamma(U_i, I_{D/X}) = f_i \Gamma(U_i, O_X)$. Nous écrirons, toujours par abus de langage, O_D pour le faisceau structural de ce sous-schéma. On a alors

$$\Gamma(U_i \cap D, O_D) = \Gamma(U_i, O_X) / f_i \Gamma(U_i, O_X).$$

(ii) Attention, on n'obtient pas ainsi tous les sous-schémas de pure codimension 1, mais seulement ceux dont le faisceau d'idéaux est localement libre (nécessairement de rang 1).

Comme les diviseurs de Weil, les diviseurs de Cartier sont munis d'une structure de groupe commutatif. Bien sûr, dans le cas d'un schéma normal X le groupe $Div_C(X)$ des diviseurs de Cartier est un sous-groupe de $Div_W(X)$.

Soient D et D' deux diviseurs de Cartier. On peut clairement trouver un recouvrement affine (U_i) de X et des représentants (U_i, f_i) et (U_i, g_i) de D et D' . Le diviseur de Cartier $D + D'$ est alors le diviseur représenté par $(U_i, f_i g_i)$. L'élément unité pour cette opération (commutative) est représenté par $(X, 1)$. Un diviseur de Cartier ayant un représentant de la forme (X, f) sera encore un diviseur principal (de Cartier comme de Weil).

Théorème 29.21 :

- (i) Les diviseurs de Cartier de X forment un groupe. Si X est normal c'est un sous-groupe du groupe des diviseurs de Weil de X contenant le sous-groupe des diviseurs principaux.
- (ii) Le groupe des diviseurs de Cartier de X est égal au groupe des diviseurs de Weil si et seulement si les anneaux locaux des points de X sont factoriels.

Démonstration :

(i) est essentiellement clair.

Pour (ii), supposons d'abord que tout diviseur de Weil est de Cartier.

Soient x un point de X et \mathcal{P} un idéal premier de hauteur 1 de $O_{X,x}$. Si Y est le diviseur irréductible correspondant à \mathcal{P} , il existe un voisinage ouvert affine U de x et une fonction f sur U tels que $div(f) = Y \cap U$. Mais si A est l'anneau des fonctions définies sur U et \mathcal{Q} l'idéal premier de A dont le localisé est \mathcal{P} , ceci exprime que l'élément f du corps des fractions de A est contenu dans A et vérifie $\mathcal{Q} = fA$. A fortiori $f \in O_{X,x}$ et $fO_{X,x} = \mathcal{P}$. Donc tout idéal premier de hauteur 1 de $O_{X,x}$ est principal et cet anneau est factoriel.

Réciproquement, supposons que $O_{X,x}$ est factoriel pour tout $x \in X$.

Soit Y un diviseur irréductible de Weil de X . Montrons que pour tout point $x \in X$ il existe un voisinage ouvert affine U de x tel que $Y \cap U$ est un diviseur principal de U . Si $x \notin Y$, il existe un voisinage ouvert affine U de x tel que $Y \cap U = \emptyset$ et on a $div(1) = Y \cap U$. Si $x \in Y$, soient \mathcal{P}_x l'idéal premier de hauteur 1 de $O_{X,x}$ correspondant à Y et $f_x \in O_{X,x}$ un élément tel que $\mathcal{P}_x = f_x O_{X,x}$. Mais f_x est une fonction rationnelle sur X . Il existe des diviseurs irréductibles $(Y_i)_{i=1,\dots,r}$ distincts de Y et des entiers l_i tels que $div(f_x) = Y + \sum_{i=1,\dots,r} l_i Y_i$ et que $x \notin Y_i$ pour $i = 1, \dots, r$. On prend alors un voisinage ouvert affine U de x tel que $U \cap Y_i = \emptyset$ pour $i = 1, \dots, r$ et il est clair que dans le groupe des diviseurs de U on a $div(f_x) = Y \cap U$. Le Théorème est démontré.

Définition 29.22 : Le groupe quotient du groupe $Div(X)$ des diviseurs de Cartier par le sous-groupe des diviseurs principaux est le groupe $Cl_C(X)$ des classes de diviseurs de Cartier.

Exemples :

(i) Soit Z une sous-variété fermée de \mathbf{P}_n . Si S est une hypersurface de \mathbf{P}_n ne contenant pas Z , le sous-schéma fermé $S \cap Z$ de Z est un diviseur de Cartier effectif de Z .

En effet, si $S = V(F)$, où $F(X_0, \dots, X_n)$ est un polynôme homogène de degré r , le faisceau d'idéaux $I_{(S \cap Z)/Z}$ vérifie

$$\Gamma(D(X_i) \cap Z, I_{(S \cap Z)/Z}) = \overline{(F/X_i^r)} \Gamma(D(X_i) \cap Z, O_Z),$$

où $\overline{(F/X_i^r)}$ est la fonction sur Z induite par (F/X_i^r) . Comme Z est une variété, il est clair que $\overline{(F/X_i^r)}$ est, pour tout i , un élément régulier de l'anneau $\Gamma(D(X_i) \cap Z, O_Z)$, donc $S \cap Z$ est le diviseur de Cartier effectif représenté par $(D(X_i) \cap Z, \overline{(X_i^r/F)})$.

Si $S' = V(F')$ est une autre hypersurface de degré r de \mathbf{P}_n ne contenant pas Z , le diviseur de Cartier $(S \cap Z) - (S' \cap Z)$ de Z est représenté par $(Z, \overline{(F'/F)})$, donc est principal. Autrement dit, les diviseurs effectifs $(S \cap Z)$ et $(S' \cap Z)$ sont linéairement équivalents. Comme, pour $r > 0$, il existe toujours une hypersurface de degré r coupant proprement Z , nous avons décrit une application $Cl_C(\mathbf{P}_n) \rightarrow Cl_C(Z)$ qui est évidemment un homomorphisme de groupes.

(ii) Plus généralement, soit Z un sous-schéma fermé de \mathbf{P}_n (que nous ne supposons ni réduit ni irréductible). Si $S = V(F)$ est une hypersurface de \mathbf{P}_n ne contenant aucune composante irréductible

(éventuellement immergée) de Z , le sous-schéma fermé $S \cap Z$ de Z est un diviseur de Cartier effectif de Z . En effet, le faisceau d'idéaux $I_{(S \cap Z)/Z}$ vérifie

$$\Gamma(D(X_i) \cap Z, I_{(S \cap Z)/Z}) = \overline{(F/X_i^r)} \Gamma(D(X_i) \cap Z, O_Z).$$

Comme $\overline{(F/X_i^r)}$ est encore, pour tout i , un élément régulier de l'anneau $\Gamma(D(X_i) \cap Z, O_Z)$, le sous-schéma $S \cap Z$ de Z est le diviseur de Cartier représenté par $(D(X_i) \cap Z, \overline{(X_i^r/F)})$. Il est tout aussi clair que dans le cas précédent qu'on a ainsi défini un homomorphisme de groupes $Cl_C(\mathbf{P}^n) \rightarrow Cl_C(Z)$.

Soulignons enfin le Corollaire évident suivant du Théorème 29.21 :

Corollaire 29.23 : *Si X est une variété lisse, on a $Div_C(X) = Div_W(X)$ et $Cl_C(X) = Cl_W(X)$. On notera le premier $Div(X)$ et le second $Cl(X)$.*

Diviseurs de Cartier d'une courbe projective.

Dans ce chapitre, comme dans la suite, nous dirons courbe projective pour un sous-schéma fermé, équidimensionnel de dimension 1 et sans composante immergée, d'un espace projectif (cette terminologie semblera abusive à beaucoup, mais je ne vois rien de mieux!).

Tout diviseur sur une courbe projective lisse a un degré qui comme nous l'avons vu ne dépend que de sa classe d'équivalence linéaire. Sur une courbe projective non lisse, il n'y a plus de diviseurs de Weil mais uniquement des diviseurs de Cartier. Remarquons d'abord qu'on peut encore définir le degré d'un tel diviseur (bien entendu d'une manière compatible avec le cas où C est lisse).

Définition 29.24 : *Si D est un diviseur de Cartier effectif d'une courbe projective C , on appelle degré de D et on note $d^0 D$ le degré du sous-schéma D , de dimension 0, de C .*

Si D_1 et D_2 sont deux diviseurs de Cartier effectifs de C , on pose $d^0(D_1 - D_2) = d^0 D_1 - d^0 D_2$.

On vérifie, comme dans le cas des diviseurs de Weil, que deux diviseurs de Cartier linéairement équivalents ont mêmes degrés. On a donc l'énoncé suivant :

Théorème 29.25 : *L'homomorphisme de groupes $d^0(\cdot) : Div_C(C) \rightarrow \mathbf{Z}$ se factorise par $Cl_C(C)$.*

Groupe de Picard.

Théorème 29.26 : *Les classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles sur un schéma X , munis de l'opération produit tensoriel, forment un groupe commutatif appelé groupe de Picard de X et noté $Pic(X)$.*

Il est clair que si \mathcal{L} et \mathcal{L}' sont deux faisceaux inversibles sur X , alors $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ est aussi un faisceau inversible sur X et il existe un isomorphisme naturel $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}' \simeq \mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}$. D'autre part, $Hom_{O_X}(\mathcal{L}, O_X)$ est aussi un faisceau inversible sur X et il existe un isomorphisme naturel $\mathcal{L} \otimes Hom_{O_X}(\mathcal{L}, O_X) \simeq O_X$.

On a alors la remarque évidente suivante :

Théorème 29.27 : Si $\pi : Z \rightarrow X$ est un morphisme de schémas, l'application $\mathcal{L} \rightarrow \pi^*\mathcal{L}$ de $\text{Pic}(X)$ dans $\text{Pic}(Z)$ est un homomorphisme de groupes.

Montrons maintenant que pour les schémas que nous étudions il y a une identification naturelle entre le groupe des classes de diviseurs de Cartier et le groupe de Picard.

Théorème 29.28 : Il existe un homomorphisme injectif naturel du groupe $Cl_C(X)$ des classes de diviseurs de Cartier de X dans le groupe de Picard de X . Si X est projectif ou si X est une variété cet homomorphisme est surjectif.

Démonstration :

Soit (U_i, f_i) un représentant d'un diviseur de Cartier D de X . Associons lui le faisceau inversible, noté $O_X(D)$ ou $O(D)$, défini par $\Gamma(U_i, O(D)) = f_i^{-1}(\Gamma(U_i, O_X))$. Il est clair que ce faisceau inversible ne dépend pas du représentant de D choisi, ce qui justifie la notation $O(D)$, et que l'application $\text{Div}_C(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ ainsi définie est un homomorphisme de groupes. Il est tout aussi clair que si $D = (X, f)$ est un diviseur principal, on a un isomorphisme $O(D) \xrightarrow{f} O_X$, donc l'homomorphisme se factorise à travers $Cl_C(X)$. De plus si $h : O_X \simeq O(D)$, le diviseur D est représenté par $(X, h(1)^{-1})$, donc il est principal.

Montrons que cet homomorphisme est surjectif lorsque X est projectif et repoussons à plus tard le cas (sans difficultés) où X est une variété. Choisissons un plongement projectif de X , donc un faisceau inversible très ample $O_X(1)$. Si \mathcal{L} est un faisceau inversible sur X , nous savons que pour $n \gg 0$, les faisceaux inversibles $\mathcal{L}(n)$ et $O_X(n)$ sont engendrés par leurs sections. Il suffit donc de prouver que si \mathcal{L} est engendré par ses sections il est dans l'image de $Cl_C(X)$.

Définition 29.29 : Une section $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ d'un faisceau inversible \mathcal{L} sur un schéma X est dite régulière si l'homomorphisme induit $O_X \xrightarrow{s} \mathcal{L}$ de faisceaux inversibles est injectif.

Deux sections régulières s et s' de \mathcal{L} sont équivalentes s'il existe une unité $u \in \Gamma(X, O_X)$ telle que $s'(1) = s(u)$.

Remarque : Sur une variété, toute section non nulle d'un faisceau inversible est évidemment régulière.

Un lemme d'évitement élémentaire démontre la Proposition qui suit :

Proposition 29.30 : Si $s_0, \dots, s_r \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ engendrent \mathcal{L} , il existe un ouvert dense U de \mathbf{P}_r tel que pour tout $(a_0, \dots, a_r) \in U$ la section $\sum a_i s_i \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ est régulière.

Le Théorème 29.28 est alors une conséquence immédiate du résultat plus précis suivant :

Théorème 29.31 : Soient \mathcal{L} un faisceau inversible et $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ une section régulière .

(i) L'application $\text{Hom}_{O_X}(\mathcal{L}, O_X) \xrightarrow{ts} O_X$ transposée de l'application $O_X \xrightarrow{s} \mathcal{L}$ est injective.

(ii) Si (U_i) est un recouvrement affine de X tel que $\Gamma(U_i, \mathcal{L})$ est un $\Gamma(U_i, O_X)$ -module libre de rang 1 pour tout i . Si $f_i \in \Gamma(U_i, O_X)$ est un générateur (nécessairement régulier) de l'idéal principal image de

$$\Gamma(U_i, \text{Hom}_{O_X}(\mathcal{L}, O_X)) \xrightarrow{ts} \Gamma(U_i, O_X),$$

alors le diviseur de Cartier effectif D représenté par (U_i, f_i^{-1}) vérifie $\mathcal{L} \simeq O_X(D)$.

(iii) La correspondance ainsi définie entre les classes d'équivalence de sections régulières de \mathcal{L} et les diviseurs de Cartier effectifs D tels que $\mathcal{L} \simeq O_X(D)$ est bijective.

Démonstration :

Pour (i), soit U un ouvert affine tel que $L = \Gamma(U, \mathcal{L})$ est un module libre de rang 1 sur l'anneau $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Alors la transposée d'une application injective $A \rightarrow L \simeq A$ est évidemment injective.

Pour (ii), les isomorphismes $\Gamma(U_i, \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)) \simeq f_i \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ induisent l'isomorphisme

$$\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X(D).$$

Pour (iii), il reste à prouver que l'application est surjective. Mais si $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X(D)$ où D est un diviseur de Cartier effectif, considérons un représentant (U_i, f_i) de D . Comme $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ les applications injectives naturelles $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) \rightarrow f_i^{-1} \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ induisent une application injective $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{L}$ et l'image $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ de 1 est la section régulière de \mathcal{L} cherchée.

Définition 29.32 : *Le diviseur effectif associé à une section régulière de \mathcal{L} est appelé schéma (ou diviseur) des zéros de cette section.*

Définition 29.33 : *On notera $\mathcal{O}_X(D)$ le faisceau inversible associé à un diviseur de Cartier D sur un schéma X .*

Résumons un certain nombre d'informations dans l'énoncé suivant :

Théorème 29.34 : *Si X est un schéma lisse, on a des isomorphismes naturels de groupes*

$$Cl_W(X) \simeq Cl_C(X) \simeq Pic(X).$$

Si D est un sous-schéma de pure codimension 1 de X , i.e. un diviseur effectif de X , il y a une correspondance bijective entre l'ensemble des diviseurs effectifs équivalents à D et les classes d'équivalence de sections de $\mathcal{O}_X(D)$.

Systèmes linéaires.

Définition 29.35 : *Un système linéaire sur un schéma X est la donnée d'un faisceau inversible \mathcal{L} et d'un \mathbf{C} -espace vectoriel de rang fini $V \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$.*

Si $V = \Gamma(X, \mathcal{L})$, on dit que le système linéaire est complet.

On dit que le système linéaire est sans point base s'il existe un morphisme $\pi : X \subset \mathbf{P}_n$ tel que

$$\mathcal{L} = \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(1)) \quad \text{et} \quad V = \text{Im}[\Gamma(\mathbf{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(1)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L})].$$

Si de plus le morphisme π est un plongement de X dans \mathbf{P}_n , on dit que le système linéaire est très ample.

Lorsque X est une variété, nous avons vu que si (s_0, \dots, s_r) est une base de V nous pouvons associer à tout point $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbf{P}_r$ le diviseur des zéros de la section $\sum a_i s_i$. On dit que ce diviseur appartient au système linéaire.

Si de plus le système linéaire V est très ample, le diviseur des zéros de la section $\sum a_i s_i$ est la section de X par l'hyperplan de \mathbf{P}_n d'équation $\sum a_i X_i$. Les diviseurs du système linéaire sont donc les sections hyperplanes de X .

Lorsque X n'est pas une variété, une section peut ne pas être régulière, donc seul les points d'un ouvert (éventuellement vide) de \mathbf{P}_r définissent un diviseur des zéros appartenant au système linéaire. Si le système linéaire est très ample, c'est l'ouvert des hyperplans qui coupent proprement X (un hyperplan peut contenir une composante irréductible ou le réduit d'une telle composante). Les diviseurs du système linéaire sont les sections de X par les hyperplans qui coupent proprement X .

Théorème 29.36 : *Soit $V \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$ un système linéaire sur X .*

(i) *Pour qu'il soit engendré par ses sections, il faut et il suffit que pour tout point x de X , l'application naturelle $V \rightarrow \Gamma(X, O_x \otimes \mathcal{L})$ soit de rang 1*

(ii) *Pour qu'il soit très ample, il faut et il suffit que pour tout groupe Z de points de X , de degré 2, l'application naturelle $V \rightarrow \Gamma(X, O_Z \otimes \mathcal{L})$ soit de rang 2 (autrement dit, que le système linéaire sépare les points, éventuellement non distincts).*

Démonstration :

L'application $V \rightarrow \Gamma(X, O_x \otimes \mathcal{L})$ est de rang 1 si et seulement si il existe une section de \mathcal{L} engendrant \mathcal{L} en x , ce qui démontre (i).

Pour (ii), supposons d'abord que $V \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$ est très ample. Posons $\mathcal{L} = O_X(1)$. On peut supposer que $V = \Gamma(\mathbf{P}_n, O_{\mathbf{P}_n}(1))$. Il est clair que l'espace vectoriel des polynômes de degré 1 qui s'annulent sur un sous-schéma de dimension 0 et de degré 2 de \mathbf{P}_n est de codimension 2 dans $\Gamma(\mathbf{P}_n, O_{\mathbf{P}_n}(1))$.

La démonstration de la réciproque est remise à plus tard.

Définition 29.37 : *Un diviseur de Cartier D d'un schéma X est dit très ample si le faisceau inversible $O_X(D)$ est très ample.*

Autrement dit, D est un diviseur (nécessairement effectif) très ample de X s'il existe un plongement projectif $X \subset \mathbf{P}_n$ et un hyperplan $H \subset \mathbf{P}_n$ tel que $H \cap X = D$.

Théorème 29.38 : *Soient X un schéma projectif, $V \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$ et \mathcal{L}' et $V' \subset \Gamma(X, \mathcal{L}')$ deux systèmes linéaires sur X .*

Si V est sans point base et si V' est très ample, alors le système linéaire

$$Im[V \otimes_{\mathbf{C}} V'] \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{L}') \subset \Gamma(X, \mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{L}')$$

est très ample.

Démonstration :

Soit $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}_n$ (resp. $i : X \subseteq \mathbf{P}_m$) le morphisme (resp. le plongement) tel que

$$\mathcal{L} = \pi^*(O_{\mathbf{P}_n}(1)) \quad \text{et} \quad V = Im[\Gamma(\mathbf{P}_n, O_{\mathbf{P}_n}(1)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L})]$$

$$(\text{resp. } \mathcal{L}' = i^*(O_{\mathbf{P}_m}(1)) \quad \text{et} \quad V' = Im[\Gamma(\mathbf{P}_m, O_{\mathbf{P}_m}(1)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}']]).$$

Si $S : \mathbf{P}_n \oplus_{\mathbf{C}} \mathbf{P}_m \rightarrow \mathbf{P}_{nm+n+m-1}$ est le plongement de Segre, considérons le morphisme composé

$$\phi = So(\pi, i) : X \rightarrow \mathbf{P}_{nm+n+m-1}.$$

Il est clair que

$$\text{Im}[(V \otimes_{\mathbf{C}} V') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{L}')] = \text{Im}[\Gamma(O_{\mathbf{P}_{nm+n+m-1}}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{L}')].$$

Il rest à démontrer que ϕ est un plongement de X dans $\mathbf{P}_{nm+n+m-1}$, mais ceci est une conséquence immédiate du Lemme évident suivant :

Lemme 29.39 : Soient A et B deux \mathbf{C} -algèbres de type fini. Si $f : A \rightarrow B/I$ est un homomorphisme de A dans un quotient de B , l'homomorphisme composé

$$B \otimes_{\mathbf{C}} A \xrightarrow{(id, f)} B \otimes_{\mathbf{C}} B/I \rightarrow B \otimes_B B/I = B/I$$

est surjectif.

Corollaire 29.40 : Soit X un schéma projectif. Si \mathcal{L} est un faisceau inversible engendré par ses sections et \mathcal{L}' est un faisceau inversible très ample, le faisceau inversible $\mathcal{L} \otimes_{O_X} \mathcal{L}'$ est très ample

C'est évident.

Corollaire 29.41 : Soit X un schéma projectif. Soit D est un diviseur de Cartier de X . Si C est un diviseur de Cartier très ample de X , alors pour n assez grand le diviseur $D + nC$ est très ample.

Démonstration :

Posons $\mathcal{L} = O_X(D)$ et $O_X(C) = O_X(1)$.

Si \mathcal{L} est engendré par ses sections, on applique le Théorème précédent aux systèmes linéaires complets $\Gamma(X, \mathcal{L})$ et $\Gamma(X, O_X(1))$. Le premier est sans point base et le second très ample.

Si $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ est la section dont D est le diviseur des zéros et $t \in \Gamma(X, O_X(1))$ est la section dont C est le diviseur des zéros, alors st est une section du faisceau inversible très ample $\mathcal{L} \otimes_{O_X} O_X(1)$ dont le diviseur des zéros est $D + C$.

Si \mathcal{L} n'est pas engendré par ses sections, rappelons que d'après le Corollaire 25.32 le faisceau inversible $\mathcal{L} \otimes_{O_X} O_X(r)$ est engendré par ses sections pour $r \gg 0$. Compte-tenu du cas précédent, on sait que $\mathcal{L} \otimes_{O_X} O_X(r+1)$ est très ample. Le diviseur des zéros de la section $st^{r+1} \in \Gamma(X, \mathcal{L} \otimes_{O_X} O_X(r+1))$ est $D + (r+1)C$. Le Corollaire est démontré.

Le "Moving Lemma" suivant est une conséquence immédiate mais importante de ce dernier résultat.

Théorème 29.42 : Soient D et D' deux diviseurs de Cartier sur un schéma projectif X . Il existe des diviseurs effectifs E_i et E'_j tels que E_i et E'_j n'ont pas de composantes communes pour tout (i, j) et que D (resp. D') soit linéairement équivalent à une combinaison des E_i (resp. E'_j)

Démonstration :

Soit \mathcal{L} un faisceau inversible très ample. Soient E_1 et E'_1 deux diviseurs effectifs sans composantes communes et sections de \mathcal{L} . Soient n et n' des entiers tels que les diviseurs $D + nE_1$ et $D' + n'E'_1$ sont très amples. Il existe E_2 et E'_2 des diviseurs effectifs sans composantes communes et respectivement équivalents à $D + nE_1$ et $D' + n'E'_1$, ce qui démontre le Théorème.

Définition 29.43 : Soient E_1, \dots, E_n (resp. C_1, \dots, C_m) des diviseurs effectifs sur un schéma projectif X , tels que pour tout (i, j) les sous-schemas E_i et C_j n'ont pas de composantes communes. Si l_1, \dots, l_n (resp. r_1, \dots, r_m) sont des entiers, on dit que les diviseurs $D = \sum_i n_i E_i$ et $D' = \sum_j m_j C_j$ sont sans composantes communes.

Nous avons donc démontré (Théorème 29.42) que si D et D' sont des diviseurs de Cartier sur un schéma projectif, il existe des diviseurs C et C' respectivement (linéairement) équivalents à D et D' tels que C et C' sont sans composantes communes.

Chapter 30

Genre d'une courbe projective.

Dans ce chapitre, comme toujours, nous utiliserons l'expression courbe projective pour un sous-schéma fermé, équidimensionnel de dimension 1 et sans composante immergée, d'un espace projectif. Si \mathcal{L} est un faisceau inversible sur une telle courbe, nous noterons $d^0(\mathcal{L})$ son degré, i.e. le degré d'un diviseur de Cartier D tel que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_C(D)$.

Remarque : Si C une courbe de \mathbf{P}_n , nous pouvons associer à ce plongement deux anneaux gradués. D'une part l'anneau $A = \mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$ du plongement, d'autre part l'anneau $B = \bigoplus_r \Gamma(C, \mathcal{O}_C(r))$. D'après le Corollaire 25.27, l'homomorphisme (homogène de degré 0) naturel $A \rightarrow B$ est injectif et a son conoyau de longueur finie. Il en résulte clairement que ces deux anneaux gradués ont le même polynôme de Hilbert.

Définition 30.1 : *Ce polynôme est le polynôme de Hilbert du plongement de C dans \mathbf{P}_n .*

Proposition 30.2 : *Soient C une courbe de \mathbf{P}_n et $B = \bigoplus_r \Gamma(C, \mathcal{O}_C(r))$. Si \mathcal{L} est un faisceau inversible sur C le B -module $M = \bigoplus_r \Gamma(C, \mathcal{L}(r))$ est de type fini, et on a entre les polynômes de Hilbert de M et de A la relation*

$$P_M = P_B + d^0(\mathcal{L}).$$

Démonstration de la Proposition :

M est un B -module gradué de type fini d'après le Corollaire 25.27.

Considérons le faisceau inversible $\mathcal{L}^{-1} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_C)$. Nous savons que $\mathcal{L}^{-1}(r)$ est engendré par ses sections pour $r \gg 0$. Une section régulière $s \in \Gamma(C, \mathcal{L}^{-1}(r))$ induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(-r) \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0 \quad (*)$$

où D est le diviseur effectif des zéros de la section s . On a $\mathcal{O}(D) = \mathcal{L}^{-1}(r)$, donc

$$d^0 D = r d^0 \mathcal{O}_C(1) - d^0(\mathcal{L}) = r d^0 C - d^0(\mathcal{L}).$$

Mais la suite exacte (*) montre $P_A(l) - P_M(l) = d^0 D$ pour $l \gg 0$. Finalement on trouve

$$P_M = P_{A[r]} - r d^0 C + d^0(\mathcal{L}) = P_A + d^0(\mathcal{L}),$$

ce que nous voulions démontrer.

Corollaire 30.3 : *Il existe un faisceau cohérent ω_C sur C tel que*

$$(i) \quad O_C = \text{Hom}_{O_C}(\omega_C, \omega_C),$$

$$(ii) \quad \text{rg}_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{L})) - \text{rg}_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \text{Hom}_{O_C}(\mathcal{L}, \omega_C))) = d^0 \mathcal{L} + P_B(0), \text{ pour tout faisceau inversible } \mathcal{L} \text{ sur } C$$

De plus, pour $r \gg 0$ on a

$$(iii) \quad \text{rg}_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{L}(r))) = d^0(\mathcal{L}(r)) + P_B(0).$$

Démonstration du Corollaire :

Comme C est de dimension 1, l'anneau B et le B -module M sont de dimension 2, donc de Cohen-Macaulay d'après le Corollaire 25.27. Nous savons qu'il existe un B -module gradué dualisant D_B .

Posons $\omega_C = \widetilde{D}_B$. Comme $B = \text{Hom}_B(D_B, D_B)$, on a en passant aux faisceaux cohérents associés

$$O_C = \text{Hom}_{O_C}(\omega_C, \omega_C).$$

D'après le Théorème 22.23, on a $P_M(0) = l(M_0) - l(\text{Hom}_B(M, D_B)_0)$, donc

$$P_M(0) = \text{rg}_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{L})) - \text{rg}_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \text{Hom}_{O_C}(\mathcal{L}, \omega))),$$

ce qui démontre la première partie de notre énoncé compte tenu de la Proposition précédente.

Pour la deuxième, il suffit de rappeler qu'on a $\Gamma(C, \text{Hom}_{O_C}(\mathcal{L}(r), \omega_C)) = (0)$, pour $r \gg 0$, toujours d'après le Corollaire 25.27.

Corollaire 30.4 : *Soient C une courbe de \mathbf{P}_n et $B = \bigoplus_r \Gamma(C, O_C(r))$. Alors le terme constant $P_B(0)$ du polynôme de Hilbert P_B du plongement de C dans \mathbf{P}_n ne dépend que de C (et pas de ce plongement).*

Démonstration du Corollaire :

Considérons un autre plongement et B' l'anneau gradué relevant associé. D'après le Corollaire précédent (ii), on a

$$\text{rg}_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, O_C(r))) \geq d^0(O_C(r)) + P_{B'}(0)$$

pour tout r . Mais d'après le même Corollaire (ii), on a

$$\text{rg}_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, O_C(r))) = d^0(O_C(r)) + P_B(0)$$

pour $r \gg 0$. On en déduit $P_B(0) \geq P_{B'}(0)$.

Inversant les rôles, on démontre l'inégalité opposée $P_{B'}(0) \geq P_B(0)$, donc l'égalité annoncée.

Nous pouvons donc donner maintenant la définition suivante :

Définition 30.5 : *Si C est une courbe projective, nous appellerons genre de C le nombre g tel que $1 - g$ est le terme constant du polynôme de Hilbert d'un plongement de C dans un espace projectif.*

Corollaire 30.6 : (**Théorème de Riemann-Roch**) *Soit C une courbe projective de genre g .*

(i) *Il existe un faisceau cohérent ω_C sur C , unique à isomorphisme près, tel que*

$$O_C = \text{Hom}_{O_C}(\omega_C, \omega_C)$$

et que pour tout faisceau inversible \mathcal{L} sur C , on a

$$rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{L})) - rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, Hom_{O_C}(\mathcal{L}, \omega_C))) = d^0 \mathcal{L} + 1 - g.$$

(ii) Si ω_C est un faisceau inversible, on a $d^0 \omega_C = 2g - 2$.

(iii) Si C est une variété, on a $rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \omega_C)) = g$.

(iv) Si C est lisse et connexe, le faisceau ω_C sur C est inversible et dans ce cas :

a) Si \mathcal{L} est un faisceau inversible sur C tel que $d^0 \mathcal{L} > 2g - 2$ on a

$$rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{L})) = d^0 \mathcal{L} + 1 - g.$$

b) Si \mathcal{L} est un faisceau inversible de degré $2g - 2$ et non isomorphe à ω_C , on a

$$rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{L})) = d^0 \mathcal{L} + 1 - g = g - 1.$$

Définition 30.7 : Un faisceau ω_C vérifiant le Théorème est appelé faisceau dualisant sur C .

Démonstration du Théorème de Riemann-Roch :

L'existence d'un faisceau cohérent ω_C sur C vérifiant (i) a déjà été démontrée plus haut (Corollaire 30.3).

Nous ne démontrerons, pour l'instant, l'unicité que dans le cas où C est lisse et connexe.

Si ω_C est inversible, on a en appliquant (i)

$$g - 1 = rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \omega_C)) - rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, Hom_{O_C}(\omega_C, \omega_C))) = d^0(\omega_C) + 1 - g.$$

On en déduit $d^0(\omega_C) = 2g - 2$, ce qui démontre (ii).

Rappelons que si C est une variété, on a $rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, O_C)) = 1$. Comme $rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, O_C)) - rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \omega_C)) = 1 - g$, (iii) est démontré.

Si C est lisse et connexe, les anneaux locaux de C sont réguliers de dimension 1, donc tout faisceau cohérent sans torsion de rang 1 est inversible. Mais $O_C = Hom_{O_C}(\omega_C, \omega_C)$ montre que ω_C est sans torsion de rang 1, donc qu'il est inversible. .

Montrons maintenant l'unicité, à isomorphisme près, de ω_C . Soit ω'_C un autre faisceau inversible dualisant.

Alors $rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \omega'_C)) = g$ implique $rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, Hom_C(\omega'_C, \omega_C))) = 1$, compte tenu de (i). Comme $d^0(\omega'_C) = 2g - 2$, on a $d^0(Hom(\omega'_C, \omega_C)) = 0$.

Enfin, d'après le Théorème 29.31, un faisceau inversible de degré 0 ayant une section non nulle (nécessairement régulière car C est une variété) est le faisceau inversible associé au diviseur effectif vide, donc $Hom_C(\omega'_C, \omega_C) \simeq O_C$, soit $\omega'_C \simeq \omega_C$.

Si \mathcal{L} est un faisceau inversible sur C tel que $d^0 \mathcal{L} > 2g - 2$, on a $d^0(Hom(\mathcal{L}, \omega_C)) < 0$. Il en résulte que $Hom(\mathcal{L}, \omega_C)$ n'a pas de section non nulle, d'après le Théorème 29.31, ce qui démontre (iv) a).

Mais si \mathcal{L} est un faisceau inversible sur C tel que $d^0 \mathcal{L} = 2g - 2$, on a $d^0(Hom(\mathcal{L}, \omega_C)) = 0$. Alors si $Hom(\mathcal{L}, \omega_C)$ a une section non nulle (nécessairement régulière), on a $\mathcal{L} \simeq \omega_C$, ce qui démontre (iv) b).

Théorème 30.8 : (Formule d'adjonction dans \mathbf{P}_3) Si C est une courbe tracée sur une surface lisse S , de degré s , de \mathbf{P}_3 , on a

$$\omega_C \simeq O_S(C) \otimes_{O_S} O_S(s-4) \otimes_{O_S} O_C.$$

Démonstration :

Soit $R = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_3]$ l'anneau gradué de \mathbf{P}_3 . Si F est une équation de la surface S , considérons aussi $V = R/(F)$ l'anneau gradué du plongement de S dans \mathbf{P}_3 .

Si $B = \bigoplus_r \Gamma(C, O_C(r))$, rappelons que $D_B = Ext_R^2(B, R[-4])$ est un B -module dualisant. Mais $D_V = Ext_R^1(V, R[-4]) \simeq V[s-4]$ est un V -module dualisant. On en déduit que $Ext_V^1(B, V[s-4])$ est un B -module dualisant. D'après le Théorème 22.24, on a un isomorphisme $D_B \simeq Ext_V^1(B, V[s-4])$. Il reste à démontrer que le faisceau cohérent associé au module gradué de type fini $Ext_V^1(B, V[s-4])$ est $O_S(C) \otimes_{O_S} O_C(s-4)$.

Pour cela considérons I l'idéal gradué de C dans V . La suite exacte

$$0 \rightarrow I \rightarrow V \rightarrow A \rightarrow 0$$

induit, en passant aux faisceaux cohérents associés, la suite exacte

$$0 \rightarrow O_S(-C) \rightarrow O_S \rightarrow O_C \rightarrow 0. \quad (*)$$

Appliquant le foncteur $Hom_V(\cdot, V[s-4])$ à la première de ces suites, on trouve

$$0 \rightarrow Hom_V(V, V[s-4]) \rightarrow Hom_V(I, V[s-4]) \rightarrow Ext_V^1(A, V[s-4]) \rightarrow 0.$$

La suite exacte de faisceaux cohérents associés est

$$0 \rightarrow O_S(s-4) \rightarrow Hom_{O_S}(O_S(-C), O_S(s-4)) \rightarrow Ext_V^1(\widetilde{A}, \widetilde{V[s-4]}) \rightarrow 0,$$

soit

$$0 \rightarrow O_S(-C) \otimes_{O_S} O_S(C) \otimes_{O_S} O_S(s-4) \rightarrow O_S(C) \otimes_{O_S} O_S(s-4) \rightarrow Ext_V^1(\widetilde{B}, \widetilde{V[s-4]}) \rightarrow 0.$$

Il est clair que cette suite exacte est obtenue en appliquant le foncteur $\cdot \otimes_{O_S} O_S(C) \otimes_{O_S} O_S(s-4)$ à la suite exacte (*). On a donc démontré

$$Ext_V^1(\widetilde{A}, \widetilde{V[s-4]}) \simeq O_S(C) \otimes_{O_S} O_C(s-4).$$

Pour conclure, il suffit de prouver

$$Ext_V^1(B, V[s-4]) \simeq Ext_V^1(A, V[s-4]).$$

Pour cela rappelons que l'homomorphisme naturel, de degré 0,

$$A \rightarrow \bigoplus_r \Gamma(C, O_C(r)) = B$$

est injective à conoyau K de longueurs finie (Corollaire 25.27 (ii)).

Mais si N est un V -module de longueur finie, on a $Ext_V^i(N, V[s - 4]) = 0$ pour $i < 3$, d'après le Corollaire 21.16 car V est un anneau de Cohen-Macaulay de dimension 3 et $V[s - 4]$ un V -module libre. On a donc $Ext_V^i(K, V[s - 4]) = 0$ pour $i < 3$.

On en déduit facilement l'isomorphisme annoncé $Ext_V^1(B, V[s - 4]) \simeq Ext_V^1(A, V[s - 4])$. La formule d'adjonction pour les surfaces lisses de \mathbf{P}_3 est démontrée.

Exemples :

(i) Comme $rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(\mathbf{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(r))) = r + 1$, le genre de \mathbf{P}_1 est 0.

(ii) Soit $\mathbf{P}_1 \simeq C \subseteq \mathbf{P}_n$ le plongement de \mathbf{P}_1 dans \mathbf{P}_n par le morphisme de Veronese. On vérifie que $rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{O}_C(r))) = rn + 1$, donc le degré de C est n et son genre est bien 1 (comme nous venons de le vérifier).

(iii) Si C est une courbe plane de degré d , i.e. de la forme $V(F)$ où $F(X_0, X_1, X_2)$ est de degré d , le genre de C est $(d - 1)(d - 2)/2$. Si $R = \mathbf{C}[X_0, X_1, X_2]$ cela se déduit de la suite exacte

$$0 \rightarrow R[-d] \xrightarrow{F} R \rightarrow R/(F) \rightarrow 0$$

qui démontre $rg_{\mathbf{C}}(R/(F))_r = rd + 1 - (d - 1)(d - 2)/2$ pour $r > d - 3$.

(iv) Si C est une courbe de \mathbf{P}_3 intersection complète de surfaces de degrés respectifs f et g , i.e. si $C = V(F, G)$ où F et G sont des polynômes homogènes de $\mathbf{C}[X_0, \dots, X_3]$ de degrés respectifs f et g , le genre de C est $1 + fg(f + g - 4)/2$. Cela se déduit de la suite exacte suivante (où $R = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_3]$) :

$$0 \rightarrow R[-f - g] \begin{pmatrix} -G \\ F \end{pmatrix} \rightarrow R[-f] \oplus R[-g] \xrightarrow{(F, G)} R \rightarrow R/(F, G) \rightarrow 0.$$

qui démontre $rg_{\mathbf{C}}((R/(F))_r) = rfg - fg(f + g - 4)/2$ pour $r > f + g - 4$.

Théorème 30.9 : *Si C est une courbe réduite et irréductible, i.e. une variété, alors le genre de C est positif.*

Démonstration :

On a

$$rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{O}_C)) - rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \omega_C)) = 1 - g$$

Rappelons que $rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{O}_C)) = 1$, ce qui démontre l'énoncé.

Théorème 30.10 : *Si C est une courbe lisse et connexe de genre g , tout faisceau inversible de degré $\geq 2g + 1$ est très ample.*

Démonstration :

C'est un conséquence du Théorème 29.36 et de Riemann-Roch.

Soient \mathcal{L} un faisceau inversible et Z un groupe de points de degré 2 de C . La suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-Z) \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0$$

induit une nouvelle suite exacte

$$0 \rightarrow O_C(-Z) \otimes_{O_C} \mathcal{L} \rightarrow O_C \otimes_{O_C} \mathcal{L} \rightarrow O_Z \otimes_{O_C} \mathcal{L} \rightarrow 0.$$

Si $d^0(\mathcal{L}) > 2g$, on a $d^0(O_C(-Z) \otimes_{O_C} \mathcal{L}) = d^0(\mathcal{L}) - 2 > 2g - 2$. Donc d'après le Théorème de Riemann-Roch

$$rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{L})) - rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, O_C(-Z) \otimes_{O_C} \mathcal{L})) = 2.$$

La suite exacte

$$0 \rightarrow \Gamma(C, O_C(-Z) \otimes_{O_C} \mathcal{L}) \rightarrow \Gamma(C, \mathcal{L}) \rightarrow \Gamma(C, O_Z \otimes_{O_C} \mathcal{L})$$

montre alors que l'application $\Gamma(C, \mathcal{L}) \rightarrow \Gamma(C, O_Z \otimes_{O_C} \mathcal{L})$ est de rang 2. On en déduit que \mathcal{L} est très ample par le Théorème 29.36.

Corollaire 30.11 : *Une courbe lisse et connexe de genre 0 est isomorphe à \mathbf{P}_1 .*

Démonstration :

Soit \mathcal{L} est un faisceau inversible de degré 1. Il est très ample, d'après le Théorème précédent, et on a $rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{L})) = 2$, d'après le Théorème de Riemann-Roch, donc il définit un isomorphisme avec \mathbf{P}_1 .

Corollaire 30.12 : *Une courbe lisse et connexe de genre 1 est une cubique plane.*

Démonstration :

Soit \mathcal{L} est un faisceau inversible de degré 3. Il est très ample, d'après le Théorème précédent, et on a $rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{L})) = 3$, d'après le Théorème de Riemann-Roch, donc il définit un plongement dans \mathbf{P}_2 , évidemment de degré 3.

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Corollaire 30.13 : *Une courbe lisse et connexe de genre g se plonge dans \mathbf{P}_{g+1} avec le degré $2g+1$.*

Théorème 30.14 (Théorème de Castelnuovo) : *Si C est une courbe réduite et irréductible de \mathbf{P}_n qui n'est pas contenue dans un hyperplan, alors*

$$g(C) \leq t(d^0(C) - 1) - (n-1)(t+1)/2$$

où t est la partie entière de $(d^0(C) - 1)/(n-1)$.

Comme nous allons le voir, cet énoncé est une conséquence directe du Corollaire 28.10 et du résultat suivant, que nous admettrons pour l'instant, dû à Bertini (au moins en dimension 3) :

Lemme 30.15 (Lemme des trisécantes généralisé) : *Soit C une courbe réduite irréductible de \mathbf{P}_n non contenue dans un hyperplan. Si H est un hyperplan général, le groupe de points $C \cap H$ ne contient pas, pour $l < (n-1)$, de sous-groupe de points de degré $l+2$ contenu dans un espace linéaire de dimension l .*

Démonstration du Théorème :

Compte tenu de ce Lemme et du Corollaire 28.10, il suffit bien sûr de prouver la majoration suivante :

Proposition 30.16 : *Soit C une courbe de \mathbf{P}_n . Si H est un hyperplan coupant proprement C , le genre de C est majoré par le genre virtuel du groupe de points $C \cap H$. De plus, si $g(C) = g_v(C \cap H)$ l'application*

$\Gamma(\mathbf{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(r)) \rightarrow \Gamma(C, \mathcal{O}_C(r))$ *est surjective pour tout r , i.e. toute fonction de degré r définie sur C est polynômiale.*

Démonstration de la Proposition :

Considérons le diagramme commutatif suivant (où K_r , E_r et D_r sont les conoyaux des flèches naturelles) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \Gamma(\mathbf{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(r-1)) & \xrightarrow{H} & \Gamma(\mathbf{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(r)) & \rightarrow & \Gamma(H, \mathcal{O}_H(r)) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & \Gamma(C, \mathcal{O}_C(r-1)) & \xrightarrow{H} & \Gamma(C, \mathcal{O}_C(r)) & \rightarrow & \Gamma(C \cap H, \mathcal{O}_{C \cap H}(r)) & \rightarrow & K_r & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & E_{r-1} & \xrightarrow{H} & E_r & \rightarrow & D_r & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Il démontre que pour tout r il y a une application surjective $D_r \rightarrow K_r$. On a donc $rg_{\mathbf{C}}(K_r) \leq rg_{\mathbf{C}}(D_r)$.

De plus, comme $rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C \cap H, \mathcal{O}_{C \cap H}(r))) = d$ pour tout r , la seconde ligne de ce diagramme prouve

$$rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{O}_C(r))) - rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{O}_C(r-1))) = d - rg_{\mathbf{C}}(K_r).$$

Comme $rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{O}_C(r))) = rd + 1 - g$, pour $r \gg 0$, on a

$$1 - g(C) = rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{O}_C)) - \sum_{r>0} rg_{\mathbf{C}}(K_r),$$

donc

$$g(C) = \sum_{r>0} rg_{\mathbf{C}}(K_r) + 1 - rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{O}_C)).$$

Ceci implique évidemment

$$g(C) \leq \sum_{r>0} rg_{\mathbf{C}}(D_r) = g_v(C \cap H).$$

En cas d'égalité, on a nécessairement $rg_{\mathbf{C}}(\Gamma(C, \mathcal{O}_C)) = 1$, donc $E_0 = 0$, et $rg_{\mathbf{C}}(K_r) = rg_{\mathbf{C}}(D_r)$ pour tout r . L'application $E_{r-1} \xrightarrow{H} E_r$ est alors un isomorphisme pour tout $r \geq 1$ ce qui démontre $E_r = 0$ pour tout $r \geq 0$. D'autre part, il est facile de vérifier que $\Gamma(C, \mathcal{O}_C) = \mathbf{C}$ entraîne $\Gamma(C, \mathcal{O}_C(-i)) = 0$ pour $i > 0$.

Genre des courbes de \mathbf{P}_3 .

Théorème 30.17 : Si C est une courbe de degré d de \mathbf{P}_3 , contenue dans une surface réduite et irréductible S de degré s , on a

$$g(C) \leq 1 + [d(d + s(s - 4)) - r(s - r)(s - 1)]/2s,$$

où $0 \leq r < s$ et $d + r \equiv 0$ modulo s .

De plus, $g(C) = 1 + [d(d + s(s - 4))]/2s$ si et seulement si C est l'intersection complète de S et d'une surface de degré d/s .

Démonstration du Théorème :

La majoration $g(C) \leq 1 + [d(d + s(s - 4)) - r(s - r)(s - 1)]/2s$ se déduit bien sûr immédiatement du Théorème 28.17 et de la Proposition 30.16 si l'on veut bien admettre le résultat (classique) suivant.

Théorème 30.18 (*2^{ème} Théorème de Bertini*) : Si S est une surface réduite et irréductible de \mathbf{P}_n et H un hyperplan général, la courbe $S \cap H$ est réduite et irréductible.

Remarque : Pour $n = 3$, cas dans lequel nous travaillons, si la surface est supposée normale c'est une conséquence élémentaire du 1^{er} Théorème de Bertini. En effet, comme S est \mathcal{R}_1 , son lieu singulier est fini, donc $S \cap H$ est une courbe plane non-singulière. Mais une telle courbe est nécessairement une variété car si son équation homogène est décomposée, par exemple FG , il est clair que les points de $V(F) \cap V(G)$ sont singuliers dans la courbe.

Revenons à la démonstration du Théorème 30.17 et supposons maintenant

$$g(C) = 1 + [d(d + s(s - 4))]/2s.$$

D'après la Proposition 30.16, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & I_{r-1} & \xrightarrow{H} & I_r & \rightarrow & J_r \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \Gamma(\mathbf{P}_3, O_{\mathbf{P}_3}(r-1)) & \xrightarrow{H} & \Gamma(\mathbf{P}_3, O_{\mathbf{P}_3}(r)) & \rightarrow & \Gamma(H, O_H(r)) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \Gamma(C, O_C(r-1)) & \xrightarrow{H} & \Gamma(C, O_C(r)) & \rightarrow & \Gamma(C \cap H, O_{C \cap H}(r)) \rightarrow K_r \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & \rightarrow & D_r \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & 0 \end{array}$$

où I (resp. J) est l'idéal gradué de C (resp. $C \cap H$) dans l'anneau gradué de \mathbf{P}_3 (resp. H).

L'application $I_r \rightarrow J_r$ est alors surjective pour tout r d'après le diagramme du serpent. Mais nous savons (Théorème 28.17) que $C \cap H$ est l'intersection complète de $S \cap H$ et d'une courbe plane de degré $t = d/s$. L'élément correspondant de J_t est la restriction d'un élément de I_t qui est l'équation d'une surface T de degré t de \mathbf{P}_3 . Comme $S \cap H$ et $T \cap H$ se coupent proprement dans H , il est clair que S et T se coupent proprement. Leur intersection est une courbe de degré $st = d$. Comme

les polynômes définissant S et T forment une suite régulière dans $\mathbf{C}[X_0, \dots, X_3]$, cette courbe est équidimensionnelle et sans composante immergée. Elle contient C et a même degré que C . C'est donc C d'après la Proposition 28.12. Le Théorème est démontré.

Genre d'une courbe réductible.

Théorème 30.19 : *Si C_1 et C_2 sont deux courbes de \mathbf{P}_n sans composantes irréductibles communes, alors $g(C_1 \cup C_2) = g(C_1) + g(C_2) - 1 + d^0(C_1 \cap C_2)$.*

Démonstration :

Si I_1 (resp. I_2) est un idéal gradué de C_1 (resp. C_2) dans l'anneau de polynômes $R = \mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$, cela se déduit de la suite exacte

$$0 \rightarrow R/(I_1 \cap I_2) \rightarrow R/I_1 \oplus R/I_2 \rightarrow R/(I_1 + I_2) \rightarrow 0$$

en rappelant que $(I_1 \cap I_2)$ (resp. $(I_1 + I_2)$) est un idéal gradué de $C_1 \cup C_2$ (resp. $C_1 \cap C_2$).

Chapter 31

Groupe numérique d'une surface non singulière. Le Théorème de Halphen-Noether-Lefschetz pour les surfaces de P_3 .

Dans cette section, S sera toujours une surface projective non singulière et connexe (donc une variété). Le groupe des classes de diviseurs de Cartier (ou de Weil) de S est donc naturellement isomorphe à $PicS$. Si D est un diviseur, rappelons que nous notons $O_S(D)$ le faisceau inversible associé. Les diviseurs effectifs de S sont les courbes de S . Si \mathcal{L} est un faisceau inversible sur S et si C est une courbe de S , il est clair que $\mathcal{L} \otimes_{O_S} O_C$ est un faisceau inversible sur C et qu'il a donc un degré que nous noterons comme précédemment $d^0(\mathcal{L} \otimes_{O_S} O_C)$.

Théorème 31.1 : *Si C et C' sont deux courbes de S sans composantes communes, on a*

$$d^0(C \cap C') = d^0(O_S(C') \otimes_{O_S} O_C) = d^0(O_S(C) \otimes_{O_S} O_{C'}).$$

Démonstration :

Considérons la suite exacte :

$$0 \rightarrow O_S(-C) \rightarrow O_S \rightarrow O_C \rightarrow 0.$$

Soit $x \in S$. Il existe $f_x, g_x \in O_{S,x}$ tels que $O_{C,x} = O_{S,x}/f_x O_{S,x}$ et $O_{C',x} = O_{S,x}/g_x O_{S,x}$. Si $x \in C \cap C'$, comme C et C' n'ont pas de composantes communes, (f_x, g_x) est une suite $O_{S,x}$ -régulière, donc $Tor_1^{O_{S,x}}(O_{C,x}, O_{C',x}) = 0$ pour tout $x \in S$.

On en déduit une suite exacte :

$$0 \rightarrow O_S(-C) \otimes_{O_S} O_{C'} \rightarrow O_{C'} \rightarrow O_C \otimes_{O_S} O_{C'} \rightarrow 0.$$

Comme $O_C \otimes_{O_S} O_{C'} \simeq O_{C \cap C'}$, on a démontré que $C \cap C'$ est le schéma des zéros d'une section régulière de $O_S(C) \otimes_{O_S} O_{C'}$, ce qui implique $d^0(C \cap C') = d^0(O_S(C) \otimes_{O_S} O_{C'})$.

On démontre évidemment de manière identique que $d^0(C \cap C') = d^0(O_S(C') \otimes_{O_S} O_C)$.

Forme bilinéaire d'intersection sur $Pic(S)$

Définition 31.2 : Si E et E' sont deux diviseurs irréductibles de S , on appelle produit d'intersection de E et E' et on note

$$E.E' = d^0(O_S(E) \otimes_{O_S} O_{E'}) = d^0(O_S(E') \otimes_{O_S} O_E).$$

Remarques :

- (i) Le Théorème précédent autorise cette définition.
- (ii) Si $E \neq E'$, on a $E.E' = d^0(E \cap E')$.
- (iii) $E.E'$ ne dépend que des classes $[E]$ et $[E']$ de E et E' dans $Cl_C(S) = PicS$. On peut donc aussi écrire $[E].[E']$.

Définition 31.3 : Si $D = \sum_i n_i E_i$ et $D' = \sum_i m_j E'_j$ sont deux diviseurs de S , on pose

$$D.D' = \sum_{i,j} n_i m_j (E_i.E'_j).$$

Remarque : Il est clair que $D.D'$ ne dépend que des classes $[D]$ et $[D']$ de D et D' dans $Cl_C(S) = PicS$. On peut donc aussi écrire $[D].[D']$.

On a bien évidemment l'énoncé suivant :

Théorème 31.4 : La forme d'intersection $[D] \times [D'] \rightarrow [D].[D']$ sur $PicS$ est bilinéaire et symétrique.

Définition 31.5 : Deux diviseurs D et D' sont numériquement équivalents si $[D - D']$ est dans le noyau de la forme d'intersection.

Le groupe des classes de diviseurs pour l'équivalence numérique est le groupe numérique de S , noté $NumS$.

Nous espérons démontrer plus loin le résultat suivant :

Théorème 31.6 (Théorème de Severi) : Le groupe numérique d'une surface non-singulière est de type fini.

Équivalences linéaires et numériques pour les surfaces de \mathbf{P}_3 .

Nous pouvons maintenant interpréter le Théorème 30.17.

Théorème 31.7 (Théorème de Halphen-Noether-Lefschetz) : Soit S une surface non-singulière de \mathbf{P}_3 . Soient E une section plane de S et $[E]^\perp$ l'orthogonal à $[E]$ dans $PicS$.

- (i) La restriction de la forme d'intersection à $[E]^\perp$ est définie négative.
- (ii) La forme d'intersection sur $PicS$ est non-dégénérée.
- (iii) L'élément $[E]$ n'est pas divisible dans $PicS$.

Montrons d'abord l'énoncé suivant qui est une conséquence immédiate du Théorème 30.8 :

Théorème 31.8 (La formule d'adjonction numérique dans P3) : *Si C est une courbe de degré d tracée sur une surface non-singulière S de degré s de \mathbf{P}_3 et si E est une section plane de S , on a*

$$2g(C) - 2 = [C].[C + (s - 4)E].$$

Démonstration :

D'après la formule d'adjonction, on a

$$\omega_C \simeq O_S(C) \otimes_{O_S} O_S(s - 4) \otimes_{O_S} O_C.$$

On en déduit d'une part que ω_C est un faisceau inversible sur C et d'autre part que ce faisceau est de degré $[C].[C + (s - 4)E]$. Mais on sait (Théorème de Riemann-Roch) que lorsque ω_C est un faisceau inversible, il est de degré $2g(C) - 2$, ce qui démontre l'adjonction numérique dans **P3**.

Démonstration du Théorème de (H-N-L) :

Soit D un diviseur tel que $[D] \in [E]^\perp$. Nous savons que pour n assez grand le diviseur $D + nE$ est très ample. Donc il est linéairement équivalent à une courbe C . Appliquant la formule d'adjonction numérique, nous avons

$$2g(C) - 2 = [C].[C + (s - 4)E] = [D + nE].[D + nE + (s - 4)E] = [D]^2 + (2n + s - 4)[D][E] + n(n + s - 4)[E]^2.$$

Mais $[D].[E] = 0$ par hypothèse. Utilisant le Théorème 30.17 nous obtenons

$$[D]^2 + n(n + s - 4)[E]^2 \leq d^0(C)(d^0(C) + s(s - 4))/s.$$

De plus $[E]^2 = s$ et $d^0(C) = [E].[D + nE] = n[E]^2 = ns$, donc nous trouvons

$$[D]^2 + n(n + s - 4)s \leq ns(ns + s(s - 4))/s = ns(n + s - 4).$$

Ceci démontre $[D]^2 \leq 0$. La forme est négative.

D'après la deuxième partie du Théorème 30.17, l'égalité a lieu si et seulement si C est intersection complète de S et d'une surface de degré n , i.e. si $[C] = n[E]$. Nous avons donc prouvé que $[D]^2 = 0$ si et seulement si $[D] + n[E] = n[E]$, soit $[D] = 0$ ce qui démontre (i).

Il est clair que (ii) est une conséquence de (i) puisque si D est dans le noyau de la forme d'intersection alors $[D] \in [E]^\perp$.

Pour prouver (iii), supposons $[E] = l[E']$. Soient m un entier tel que $E' + mE$ est très ample et C une courbe telle que $[C] = [E' + mE]$. On a

$$d^0(C) = [E' + mE].[E] = s(m + (1/l)).$$

D'après la formule d'adjonction numérique, nous avons

$$2g(C) - 2 = [C].[C + (s - 4)E] = [E' + mE].[E' + (m + s - 4)E] = ((1/l) + m)((1/l) + m + s - 4)[E]^2$$

$$= ((1/l) + m)((1/l) + m + s - 4)s = d^0(C)(d^0(C) + s(s - 4))/2s.$$

Il en résulte comme nous le savons que C est intersection complète de S et d'une surface de degré $d^0(C)/s$, donc que $[E' + mE] = (d^0(C)/s)[E]$. Ceci prouve que $[E']$ est un multiple de $[E]$, donc que $l = 1$. Le Théorème est démontré.