TD 5

Dans ce TD on étudie le degré des sous-schémas projectifs. On travaille sur le corps $k = \mathbb{C}$ pour simplifier. Nous aurons besoin de deux concepts que nous rappelons :

Hypersurfaces. Toute hypersurface $H \subset \mathbb{P}^n$ est définie par une seule équation homogène, ce qui provient du fait algébrique que dans un anneau factoriel (comme $k[X_0, \dots, X_n]$) les idéaux premiers de hauteur 1 sont principaux. On définit le degré de H comme étant égal au degré de cette équation.

Projections. On note $\overline{AB}$ le plus petit sous-espace projectif de $\mathbb{P}^n$ contenant les parties A et B. Soient L et L' deux sous sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}^n$. On rappelle la formule des dimensions :

$$\dim(\overline{LL'}) = \dim(L) + \dim(L') - \dim(L \cap L')$$

où l'on convient que $\dim(\emptyset) = -1$. Étant donné un point $p \in \mathbb{P}^n$ et un $(n-1)$-plan $\mathbb{P}^{n-1}$ ne contenant pas p, on définit la projection $\pi_p \colon \mathbb{P}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{P}^{n-1}$ par $\pi_p(x) = \overline{px} \cap \mathbb{P}^{n-1}$.

En composant $k+1$ projections ponctuelles, on obtient la notion plus générale de projection depuis un sous-espace projectif L de dimension k sur un sous-espace complémentaire $\mathbb{P}^{n-k-1}$: c'est le morphisme $\pi_L \colon \mathbb{P}^n \setminus L \to \mathbb{P}^{n-k-1}$ défini par $\pi_L(x) = \overline{xL} \cap \mathbb{P}^{n-k-1}$. (On dit que L et L' sont complémentaires si $\overline{LL'} = \mathbb{P}^n$ et $L \cap L' = \emptyset$. Cela équivaut à dire que leurs préimages M, M' via le quotient $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ vérifient $M \oplus M' = \mathbb{C}^{n+1}$.)

Exercice 1 Donnez des équations pour $\pi_L \colon \mathbb{P}^n \setminus L \to \mathbb{P}^{n-k-1}$, dans des coordonnées bien choisies.

Exercice 2 Soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ une sous-variété projective irréductible et réduite de dimension r.

(1) Soit $\pi \colon Y \to \mathbb{P}^{n-1}$ une projection depuis un point $p \notin Y$. Montrez que π est un morphisme fini.

(*Utilisez le th. dû à Chevalley : un morphisme entre variétés projectives est fini ssi il est à fibres finies.*)

(2) Expliquez comment démontrer, avec des projections, le théorème de normalisation de Nœther (sous forme projective) qui dit qu'il existe un morphisme fini surjectif $f \colon Y \to \mathbb{P}^r \subset \mathbb{P}^n$. Montrez que $\deg(Y) := \deg(f)$ est bien défini, indépendamment des choix faits pour construire f.

(3) Montrez que si $\dim(Y) \le n-2$, alors pour p suffisamment général, la projection $\pi \colon Y \to \mathbb{P}^{n-1}$ depuis p est birationnelle sur son image.

(*Soit $y \in Y$. Montrez qu'on peut choisir p n'appartenant pas au cône sur Y de centre y.*)

(4) Déduisez-en que si on choisit suffisamment bien les centres de projection, alors $\deg(Y)$ s'identifie au degré d'une certaine hypersurface. Déduisez-en les définitions suivantes équivalentes du degré de $Y \subset \mathbb{P}^n$:

(i) le degré de l'hypersurface $\pi_L(Y) \subset \mathbb{P}^{r+1}$, pour L un $(n-r-2)$-plan projectif général.

(ii) le degré de la projection $\pi_M \colon Y \to \mathbb{P}^r$, pour M un $(n-r-1)$-plan projectif.

(iii) le nombre de points d'intersection entre Y et N, pour N un $(n-r)$-plan projectif général.

Exercice 3 Soit $N+1 = \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) = \binom{n+d}{d}$ et soient $M_0, \ldots, M_N$ les monômes de degré d en $n+1$ variables $x_0, \ldots, x_n$. Soit $\nu_d : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ le plongement de Veronese d-uple, qui envoie le point $a = [a_0, \ldots, a_n]$ sur $[M_0(a), \ldots, M_n(a)]$.

(1) Calculez le degré de $\nu_d(\mathbb{P}^n)$ dans $\mathbb{P}^N$.

(2) Montrez que toute hypersurface de degré d de $\mathbb{P}^n$ est la préimage par ν_d d'un hyperplan de $\mathbb{P}^N$. Exprimez cela sous la forme d'une propriété universelle.

Exercice 4 Soit $H \subset \mathbb{P}^n$ une hypersurface donnée par une équation homogène $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ de degré d. Montrer que $\mathbb{P}^n_k \setminus H$ est un schéma affine.

Exercice 5 Soit $C = \nu_3(\mathbb{P}^1)$, appelée la *cubique gauche* (*twisted cubic*), où $\nu_3 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ est le plongement de Veronese. Montrez que C n'est pas intersection complète dans $\mathbb{P}^3$.

(*Trouvez trois hypersurfaces quadriques de $\mathbb{P}^3$ qui contiennent C. Montrez que leurs équations engendrent l'idéal homogène $I = I_C$ dans $k[x_0, \ldots, x_3]$. Montrez que I ne peut pas être engendré par deux éléments.*)

Exercice 6 Soit A un anneau local de corps résiduel k. On dit que A est *artinien* s'il n'a qu'un idéal premier (qui est donc maximal), ou de manière équivalente, si A est de dimension 0. Tout module de type fini M sur A a des *suites de composition* $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_r = 0$ dont les quotients successifs M_i/M_{i+1} sont isomorphes à k. La longueur r d'une telle suite est indépendante de la suite, on l'appelle la *longueur* de M notée $\mathrm{lg}(M)$ (cf Eisenbud ou Matsumura).

(1) Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules finis. Montrez que

$$\mathrm{lg}(M) = \mathrm{lg}(M') + \mathrm{lg}(M'') .$$

(2) Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une variété. Soit $V \subset X$ une sous-variété (irréductible et réduite) de codimension 1, de point générique η, et $A = \mathcal{O}_{X,V} := \mathcal{O}_{X,\eta}$ son anneau local dans X. C'est un anneau de dimension 1 et de corps de fractions égal au corps des fonctions rationnelles $k(X)$. Pour $f \in A$ on définit $\mathrm{ord}_V(f) := \mathrm{lg}_A(A/f)$. Montrez que $\mathrm{ord}_V(fg) = \mathrm{ord}_V(f) + \mathrm{ord}_V(g)$.

(2) Comme $\mathrm{Frac}(A) = k(X)$, toute fonction rationnelle $r \in k(X)^*$ s'écrit $r = f/g$ avec $f, g \in A$. On définit alors $\mathrm{ord}_V(r) = \mathrm{ord}_V(f) - \mathrm{ord}_V(g)$ (si $\mathrm{ord}_V(r) > 0$ on dit que r a un zéro le long de V ; si $\mathrm{ord}_V(r) < 0$ on dit que r a un pôle le long de V). Le *diviseur associé à f* est défini par :

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{\substack{V \subset X \\ \mathrm{codim}(V)=1}} \mathrm{ord}_V(f) \cdot V$$

Calculez le diviseur associé à la fraction rationnelle $r = x/y$ sur la courbe cuspidale $C \subset \mathbb{P}^2$ d'équation $y^2 z = x^3$. Calculez son degré.