TD 4

Exercice 1 (1) La droite engendrée par α donne un point de l'espace projectif $\mathbb{P}(\wedge^r E^*)$, bien défini car si on change de base, α est multiplié par un scalaire non nul.

(2) Il est clair que $F \subset \ker\,\varphi(\alpha)$. Réciproquement, soit $\alpha = f_1 \wedge \cdots \wedge f_r$, soient $f_{r+1}, \ldots, f_n$ qui complètent en une base de E. Si $x = \sum_{i=1}^n x_i f_i$ est dans $\ker\,\varphi(\alpha)$, alors $\sum_{i=1}^n x_i f_1 \wedge \cdots \wedge f_r \wedge f_i = \sum_{i \geq r+1} x_i f_1 \wedge \cdots \wedge f_r \wedge f_i = 0$ donc $x_i = 0$ pour $i \geq r+1$, puisque les $f_1 \wedge \cdots \wedge f_r \wedge f_i$ sont libres. Donc $x \in F$.

(3) Supposons α réductible. Alors on a vu que $\ker\,\varphi(\alpha) = Vect(f_1, \ldots, f_r)$, de dimension $\geq r$. Réciproquement, si $\ker\,\varphi(\alpha)$ est dimension $\geq r$, il contient r vecteurs libres $f_1, \ldots, f_r$. On peut les compléter en une base de E avec $f_{r+1}, \ldots, f_n$. On peut écrire $\alpha = \sum_{|I|=r} \alpha_I f_I$ sur la base des $f_I = f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_r}$ pour $I = \{i_1 < \cdots < i_r\}$. Comme $f_j \in \ker\,\varphi(\alpha)$ pour $1 \leq j \leq r$, on obtient $0 = \sum_I \alpha_I f_I \wedge f_j = \sum_{I \not\ni j} \alpha_I f_I \wedge f_j$. Comme les $f_I \wedge f_j$ qui sont dans la somme sont libres, on déduit que $\alpha_I = 0$ si $I \not\ni j$. Donc $\alpha = \alpha_{\{1,\ldots,r\}} f_1 \wedge \cdots \wedge f_r$ qui est réductible.

Montrons maintenant que $\dim\ker\,\varphi(\alpha) \leq r$, quel que soit α. C'est en fait clair à cause de ce qui précède, car si cette dimension est $\geq r$, on a vu que α est réductible, et qu'alors la dimension est égale à r. Donc elle est bien tout le temps $\leq r$.

(4) Un point de $\mathbb{P}(\wedge^r E^*)$ est dans la grassmannienne si et seulement si il peut être représenté par un vecteur réductible, c'est-à-dire un vecteur α tel que $\dim\ker\,\varphi(\alpha) \geq r$. Cette inégalité est équivalente à dire que le rang de $\varphi(\alpha)$ est $< n - r + 1$. Donc si on choisit une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, ce qui induit une base de $\wedge^r E^*$ et donc des coordonnées homogènes x_I sur $\mathbb{P}(\wedge^r E^*)$, alors des équations qui définissent la grassmannienne dans le plongement de Plücker sont données par l'annulation de tous les mineurs de taille $n - r + 1$ de la matrice de $\varphi(\alpha)$ pour $\alpha = \sum x_I e_I$. Ces équations sont des polynômes homogènes de degré $n - r + 1$ en les x_I.

Exercice 2 (1) On utilise le résultat de bidualité dans l'algèbre extérieure démontré au dernier exercice du TD3, qui dit que $(\alpha^\dagger)^\dagger = (-1)^{r(n-r)}\alpha$. Grâce à cela, il suffit de montrer que si α est réductible alors $\alpha^\dagger$ l'est aussi (l'autre sens en découle par dualité). Supposons donc $\alpha = f_1 \wedge \cdots \wedge f_r$ réductible. Soient $f_{r+1}, \ldots, f_n$ qui complètent en une base de E. Alors on voit que $\alpha^\dagger = \lambda f_{r+1}^* \wedge \cdots \wedge f_n^*$ où f_i^* est la base duale de f_i, et $\lambda = u(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)$. En effet, il suffit de le vérifier sur les éléments de la base de $\wedge^{n-r}E$, et c'est facile. Donc $\alpha^\dagger$ est réductible.

(2) La première remarque est que dire que les images des applications transposées sont orthogonales, est équivalent à dire que $\mathrm{im}\,\varphi(\alpha)^*) \subset (\mathrm{im}\,\psi(\alpha)^*)^\perp$, ou encore, équivalent à dire que $\mathrm{im}\,\psi(\alpha)^*) \subset (\mathrm{im}\,\varphi(\alpha)^*)^\perp$. Comme $\mathrm{im}\,\varphi(\alpha)^*) = (\ker\,\varphi(\alpha))^\perp$, et idem pour $\psi(\alpha)$, on se ramène à comparer ces noyaux.

Si $\alpha = f_1 \wedge \cdots \wedge f_r$ réductible, on sait que $\ker\,\varphi(\alpha) = Vect(f_1, \ldots, f_r)$, donc $(\ker\,\varphi(\alpha))^\perp = Vect(f_{r+1}^*, \ldots, f_n^*)$. Par ailleurs on a vu que $\alpha^\dagger = \lambda f_{r+1}^* \wedge \cdots \wedge f_n^*$ donc $\ker\,\psi(\alpha) = Vect(f_{r+1}^*, \ldots, f_n^*)$. On a donc

$$(\ker\,\varphi(\alpha))^\perp = \ker\,\psi(\alpha)$$

Par ce qu'on a dit avant, on en déduit que les images des applications transposées sont orthogonales.

Réciproquement, supposons les images des applications transposées orthogonales. Alors comme on l'a fait remarquer, on a :

$$(\ker\,\psi(\alpha))^\perp = \mathrm{im}\,\psi(\alpha)^*) \subset (\mathrm{im}\,\varphi(\alpha)^*)^\perp = \ker\,\varphi(\alpha)$$

On sait qu'on a toujours $\dim\ker\,\varphi(\alpha) \leq r$ (cf exercice précédent). Pour la même raison, $\dim\ker\,\psi(\alpha) \leq n-r$ et donc en prenant l'orthogonal $\dim(\ker\,\psi(\alpha))^\perp \geq r$. Ainsi compte tenu qu'on a fait l'hypothèse de l'inclusion des noyaux :

$$r \leq \dim(\ker\,\psi(\alpha))^\perp \leq \dim\ker\,\varphi(\alpha) \leq r$$

Il y a donc égalité partout, donc $\dim\ker\,\varphi(\alpha) = r$ et donc α est réductible.

(3) Le résultat de la question (2) s'énonce à l'aide de l'accouplement de dualité :

$$\langle\, \varphi(\alpha)^*(v), \psi(\alpha)^*(w) \,\rangle = 0$$

pour tous $v \in \wedge^{r+1}E^*$ et $w \in \wedge^{n-r+1}E$. Si on choisit une base pour E (d'où des coordonnées homogènes sur les espaces projectifs...), alors on peut écrire les matrices des applications linéaires $\varphi(\alpha)^*$ et $\psi(\alpha)^*$ pour $\alpha = \sum x_I e_I$. Soient A et B ces matrices, l'annulation ci-dessus s'écrit ${}^t(AV)(BW) = 0$ pour tous vecteurs colonnes V, W, ou encore ${}^tAB = 0$. Il est clair que $\varphi(\alpha)^*$ et $\psi(\alpha)^*$ sont linéaires en α, et donc les équations données par l'annulation de ${}^tAB$ sont quadratiques en les x_I.

Exercice 3 ...

Exercice 4 (1) Si M est plat, alors le foncteur $\cdot \otimes_A M$ est exact donc tous ses foncteurs dérivés gauches $\mathrm{Tor}_i^A(\cdot, M)$ sont nuls, $i \geq 1$. (Ceci peut se voir directement : pour calculer $\mathrm{Tor}_i^A(N, M)$ on prend une résolution projective de N et on la tensorise par M. Or comme M est plat le complexe obtenu reste exact, donc il n'a pas d'homologie en degré i.) Donc $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$ pour tout A-module N. Réciproquement, pour montrer que M est plat on prend une suite exacte à trois termes $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ et on regarde la suite exacte longue associée

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^A(N'', M) \to N' \otimes_A M \to N \otimes_A M \to N'' \otimes_A M \to 0$$

Comme $\mathrm{Tor}_1^A(N'', M) = 0$ on a une suite exacte $0 \to N' \otimes_A M \to N \otimes_A M \to N'' \otimes_A M \to 0$ donc $\cdot \otimes_A M$ est exact.

(2) On écrit la suite exacte longue de foncteurs dérivés associée, et comme M'' est plat on a $\mathrm{Tor}_1^A(M'', N) = 0$. (Il faut utiliser la symétrie de Tor, qui nous dit que $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$ dès que M ou N est plat.)

(3) On écrit encore la suite exacte longue associée au produit tensoriel par N, et comme M'' est plat, au cran i on a

$$\ldots \to \mathrm{Tor}_{i+1}^A(M, N) \to 0 \to \mathrm{Tor}_i^A(M', N) \to \mathrm{Tor}_i^A(M, N) \to 0 \to \mathrm{Tor}_{i-1}^A(M, N) \to \ldots$$

Ainsi $\mathrm{Tor}_i^A(M', N) = 0$ (pour tout N et tout $i \geq 1$) si et seulement si $\mathrm{Tor}_i^A(M, N) = 0$ (pour tout N et tout $i \geq 1$). Donc M' est plat si et seulement si M est plat.

Exercice 5 On utilise l'équivalence de catégories entre les fibrés vectoriels de rang n sur X et les $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang n. Rappelons qu'elle est donnée ainsi : à un fibré E on associe le module de ses sections locales, et à un $\mathcal{O}_X$-module localement libre $\mathcal{E}$ on associe le spectre (construction Spec locale sur X) de l'algèbre symétrique de $\mathcal{E}$. Voir Hartshorne p. 127 et 128 pour les détails.

(1) Rappelons le résultat suivant, qui est dans le cours : un $\mathcal{O}_X$-module cohérent est localement libre si et seulement si il est plat. D'après l'exercice précédent, le noyau d'un morphisme de modules plats est plat. D'où le résultat annoncé.

(2) Si le quotient $\mathcal{Q} = \mathcal{E}/\mathcal{F}$ est localement libre, plaçons-nous sur un ouvert de X où il est libre. Alors le morphisme $\mathcal{E} \to \mathcal{Q}$ a une section, donc $\mathcal{E} \simeq \mathcal{F} \oplus \mathcal{Q}$ i.e. $\mathcal{F}$ est (localement) facteur direct. Réciproquement, si $\mathcal{F}$ est localement facteur direct, alors sur un ouvert de X où il est facteur direct on peut écrire $\mathcal{E} \simeq \mathcal{F} \oplus \mathcal{Q}$ pour un certain $\mathcal{Q}$ qui s'identifie au quotient $\mathcal{E}/\mathcal{F}$. Mais alors il y a une projection $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ de noyau $\mathcal{Q}$. Comme le noyau d'un morphisme entre $\mathcal{O}_X$-modules plats est plat, on a le résultat attendu.

(3) Un quotient de fibrés n'est pas toujours un sous-fibré : par exemple sur une variété X affine irréductible et réduite (donc l'anneau de fonctions A est intègre), on peut considérer le fibré trivial $E = \mathbb{A}^1 \times X$. Son faisceau de sections est $\mathcal{O}_X$. Soit $f \neq 0$ une fonction non nulle sur X, elle engendre un sous-fibré inversible de $\mathcal{E}$, et le quotient n'est pas un fibré car le A-module A/f n'est pas plat. (En effet si on tensorise la suite exacte de A-modules

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\times f} A \longrightarrow A/f \to 0$$

par A/f, on obtient $0 \to A/f \to A/f \to A/f \to 0$ qui n'est pas exacte car la première flèche $A/f \to A/f$ est nulle. Donc A/f n'est pas plat.)

(4) Il suffit de faire les constructions correspondantes sur les $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Or s'ils sont localement libres de rangs finis, il est clair que $\mathcal{E}^*$, $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}$,... sont localement libres de rangs finis, donc ils définissent des fibrés vectoriels.

En préliminaire à l'exercice suivant, rappelons la situation pour l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$. (Disons qu'on travaille sur un corps k, bien que ce ne soit pas nécessaire.) Pour être précis dans les énoncés, notez que pour un espace vectoriel E, il y a une bijection entre l'ensemble des hyperplans de E, et l'ensemble des morphismes surjectifs $E\to L$ avec L de dimension 1, *modulo action des scalaires non nuls* par automorphismes de L. (Dit autrement, $\pi: E\to L$ et $\pi': E\to L$ sont équivalents ssi il existe $\lambda\in k^\times$ tel que $\pi'=\lambda\pi$.) Pour revenir à $\mathbb{P}(E)$, la propriété universelle peut s'exprimer ainsi : pour tout k-schéma X, on a une bijection

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_k(X,\mathbb{P}(E)) &= \{\text{sous-}\mathcal{O}_X\text{-modules localement facteurs directs libres de rang } n-1 \text{ de } E\}\\ &= \frac{\{\text{faisceaux inversibles } \mathcal{L} \text{ sur } X \text{ avec un morphisme surjectif } E\to\mathcal{L}\}}{\{\text{sections globales de } \mathcal{O}_X^\times \text{ agissant par automorphismes de } \mathcal{L}\}}\end{aligned}$$

Dans le cas où X est le spectre d'un corps K (i.e. un point), alors ceci correspond bien à la description ensembliste de $\mathbb{P}(E)$ comme paramétrant les hyperplans de E. Mais c'est plutôt la deuxième ligne que l'on utilise en général, car elle s'exprime en termes de faisceaux inversibles engendrés par des sections, objets que l'on aime bien en géométrie algébrique. Pour être complet, il faut dire aussi que le membre de gauche ($\mathrm{Hom}_k(X,\mathbb{P}(E))$) et le membre de droite ({ faisceaux inversibles... } / { sections globales... }) sont en fait des foncteurs en X, et que la bijection en question est en fait un isomorphisme de foncteurs.

Démontrons la propriété universelle de $\mathbb{P}(E)$. Étant donné un morphisme $f\colon X\to\mathbb{P}(E)$, en prenant les images inverses de la surjection universelle $E\to\mathcal{O}(1)$, on déduit un morphisme surjectif $E\to\mathcal{L}$ où $\mathcal{L}:=f^*\mathcal{O}(1)$. (Notez que f^*E est le fibré E sur X, que l'on note encore E.)

En sens inverse, soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X avec un morphisme surjectif $E\to\mathcal{L}$. Fixons $e_1,\dots,e_n$ une base de E (l'espace vectoriel), qui donne une base de sections globales de E (le fibré). Soit s_i l'image de e_i dans $\mathcal{L}$. Le fait que $E\to\mathcal{L}$ soit surjectif dit qu'en tout point $x\in X$, l'un des germes $s_{i,x}$ est non nul, et donc que X est recouvert par les ouverts $V_i=\{x\in X\ ,\ s_{i,x}\neq 0\}$. (Les propriétés des germes impliquent que V_i est ouvert.) On souhaite définir $f\colon X\to\mathbb{P}(E)$; on va le définir sur chacun des V_i de façon à ce que tout se recolle. Sur V_i ce morphisme sera à valeurs dans l'ouvert standard $U_i=\{x_i\neq 0\}\subset\mathbb{P}(E)$ (les coordonnées x_i sont déterminées par la base $e_1,\dots,e_n$). Autour de chaque point $x\in V_i$ il existe un ouvert U tel que $\mathcal{L}_{|U}\simeq\mathcal{O}_{X|U}$. Soit t un générateur local de $\mathcal{L}$ sur U, alors on a $s_i=a_it$ pour $a_i\in\mathcal{O}_X(U)=\Gamma(U,\mathcal{O}_U)$. Comme on est dans V_i, on a $a_i\neq 0$ sur U. Donc le morphisme suivant est bien défini :

$$\begin{array}{ccc} k\left[\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right] & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(U)\\ \frac{x_j}{x_i} & \mapsto & \frac{a_j}{a_i}\end{array}$$

Or on sait qu'un morphisme d'un schéma X vers un schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$ est la même chose qu'un morphisme d'anneaux $A\to\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ (c'est un exercice dans Hartshorne, faites-le). Dans notre cas, le morphisme d'anneaux ci-dessus détermine un morphisme

$$U\longrightarrow U_i\subset\mathbb{P}(E)$$

Clairement, tout ceci ne dépend pas du choix du générateur t (car un autre générateur est de la forme λt avec $\lambda\in\mathcal{O}_U(U)^\times$...), et se recolle sur tous les $U\subset V_i$ pour définir un morphisme $V_i\to\mathbb{P}(E)$, puis en recollant sur les V_i, on obtient $f\colon X\to\mathbb{P}(E)$.

Pour bien faire les choses, il faut démontrer que ces constructions sont inverses l'une de l'autre... (en tenant compte du quotient par les sections globales de $\mathcal{O}_X^\times$).

Passons à la grassmannienne. Sa propriété universelle est une généralisation de celle de $\mathbb{P}(E)$: elle dit qu'on a une bijection (fonctorielle en X)

$$\mathrm{Hom}_k(X,\mathbb{G}(r,E)) = \{\text{sous-}\mathcal{O}_X\text{-modules localement facteurs directs libres de rang } r \text{ de } E\}$$

Exercice 6 (1) Sur $\mathbb{P}(\wedge^r E^*)$ on a un fibré inversible $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\wedge^r E^*)}(1)$, quotient de $\wedge^r E^*$ (= le fibré trivial $\wedge^r E^* \times \mathbb{P}(\wedge^r E^*)$ sur $\mathbb{P}(\wedge^r E^*)$). En dualisant on obtient un sous-fibré inversible $\mathcal{O}(-1) \subset \wedge^r E$. Par pullback via i on obtient $i^*\mathcal{O}(-1) \subset \wedge^r E$. (On note encore $\wedge^r E$ au lieu de $i^* \wedge^r E$, puisqu'il s'agit du fibré trivial $\wedge^r E \times \mathbb{G}(r, E)$.) Le produit extérieur donne un morphisme de fibrés

$$\varphi\colon E \to \mathcal{H}om(i^*\mathcal{O}(-1), \wedge^{r+1} E) .$$

On pose $\mathcal{F} = \ker \varphi$, qui est cohérent comme noyau d'un morphisme de modules cohérents. (Intuitivement, localement $i^*\mathcal{O}(-1)$ admet un générateur α, et $\mathcal{F} = \{ v \in E \, , \, \alpha \wedge v = 0 \}$.)

(2) Montrons que $\mathcal{F}$ est un sous-fibré de E. Soit $x \in \mathbb{G}(r, E)$ et U un ouvert affine le contenant. Quitte à rétrécir U, on peut supposer que $i^*\mathcal{O}(-1)$ est engendré par un vecteur $\alpha \in \wedge^r E$. Soit $\mathcal{G} = E/\mathcal{F}$. On sait que $\mathcal{F} \otimes k(x)$ est libre de rang r et $\mathcal{G} \otimes k(x)$ est libre de rang $n - r$. Soient $f_1, \dots, f_r$ et $g_{r+1}, \dots, g_n$ des sections locales de E telles que $\mathcal{F}_x$ est engendré par les $f_{i,x}$ et $\mathcal{G}_x$ est engendré par les images des $g_{j,x}$; alors $f_{1,x}, \dots, g_{n,x}$ engendrent E_x. Par Nakayama, quitte à rétrécir encore U on peut supposer que les f_i engendrent $\mathcal{F}$, les g_j engendrent $\mathcal{G}$ et $f_1, \dots, g_n$ engendrent E. Mais alors $f_1, \dots, g_n$ est une base de E (on utilise le résultat donné en indication : tout morphisme surjectif de A-modules libres de même rang (fini) est un isomorphisme). Donc $E = E_1 \oplus E_2$ avec $E_1 = \mathcal{O}_X f_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X f_r$ et $E_2 = \mathcal{O}_X g_{r+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X g_n$. (En fait il faudrait écrire $\mathcal{O}_U$ à la place de $\mathcal{O}_X$, mais en pratique on ne le fait pas.) Par ailleurs l'application surjective $\mathcal{O}_X^r \twoheadrightarrow \mathcal{F} \to E \to E_1$ doit être un isomorphisme (on utilise encore le résultat de l'indication), ce qui montre que $\mathcal{F} = E_1$ s'identifie à un facteur direct dans E. Donc $\mathcal{F}$ définit un sous-fibré.

(3) On appelle $\mathcal{Q} = E/\mathcal{F}$ le fibré quotient. (J'ai oublié de l'écrire dans l'énoncé ! Désolé.) Soit X un k-schéma avec un $\mathcal{O}_X$-module localement libre $\mathcal{L}$ de rang $n - r$, et un morphisme surjectif $E \to \mathcal{L}$. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de E. Soit $\mathcal{K} = \ker(E \to \mathcal{L})$ qui est un sous-fibré de rang r de E. On a $\wedge^r \mathcal{K}$ sous-fibré de rang 1 de $\wedge^r E$, d'où en dualisant un morphisme surjectif $\wedge^r E^* \to \wedge^r \mathcal{K}^*$. Par la propriété universelle de l'espace projectif, il y a donc un morphisme $g\colon X \to \mathbb{P}(\wedge^r E^*)$ tel que $\wedge^r \mathcal{K}^* = f^*\mathcal{O}(1)$. Ce morphisme est construit localement en choisissant un générateur t pour $\wedge^r \mathcal{K}^*$, comme rappelé avant l'exercice. Ceci revient au choix du générateur local $\alpha = t^*$ pour $\wedge^r \mathcal{K} \subset \wedge^r E$. Sur la base induite par les e_i on peut écrire $\alpha = \sum_{|I|=r} \alpha_I e_I$. Comme $\mathcal{K}$ est localement facteur direct dans E, sur un voisinage de tout point $x \in X$ on peut choisir une base $f_1, \dots, f_r$ de $\mathcal{K}$ qui se complète en une base $f_1, \dots, f_n$ de E. Il est alors clair que α, comme tout élément de $\wedge^r \mathcal{K}$, est réductible. Donc ses coordonnées α_I satisfont les relations de Plücker. Autrement dit, revenant à la construction de g comme on l'a décrite avant l'exercice, localement sur un ouvert $V_I = \{x_I \neq 0\}$ les quotients α_J/α_I satisfont les relations de Plücker et donc l'idéal qui définit la grassmannienne $\mathbb{G}(r, E)$ dans $\mathbb{P}(\wedge^r E^*)$ est envoyé sur zéro par le morphisme qui a servi à définir g :

$$\begin{array}{ccc} k\left[\frac{x_{I_0}}{x_I}, \dots, \frac{x_{I_n}}{x_I}\right] & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(U) \\ \frac{x_J}{x_I} & \longmapsto & \frac{\alpha_J}{\alpha_I} \end{array}$$

Donc g se factorise en $f\colon X \to \mathbb{G}(r, E)$.