TD 4

Dans ce TD on étudie les grassmanniennes, et, pour pouvoir manipuler correctement les fibrés, on introduit la notion de platitude.

On rappelle la convention que $\mathbb{P}(E)$ classifie les hyperplans de E, et $\mathbb{P}(E^*)$ les droites de E.

Exercice 1 Soit k un corps et $r \leq n$ des entiers. Soit E un k-espace vectoriel de dimension n. On note $\mathbb{G}(r, E)$ la grassmannienne, ensemble des sous-espaces de E de dimension r.

Pour tout multivecteur $\alpha \in \wedge^r E$, on note $\varphi(\alpha)\colon E \to \wedge^{r+1} E$ l'application linéaire définie par $v \mapsto \alpha \wedge v$.

(1) Soit $F \subset E$ un sous-espace de dimension r. Soit $f_1, \ldots, f_r$ une base de F. Montrez que le multivecteur $\alpha = f_1 \wedge \cdots \wedge f_r$ définit un point de $\mathbb{P}(\wedge^r E^*)$ indépendant du choix de la base.

(2) Soit $F \subset E$ et $\alpha \in \mathbb{P}(\wedge^r E^*)$ le multivecteur associé. Montrez que $F = \ker \varphi(\alpha)$.

L'injection obtenue $i\colon \mathbb{G}(r, E) \hookrightarrow \mathbb{P}(\wedge^r E^*)$ ests appelée le *plongement de Plücker*. Un multivecteur $\alpha \in \wedge^r E$ sera dit *réductible* (ou *décomposable*) s'il est de la forme $f_1 \wedge \cdots \wedge f_r$.

(3) Soit $\alpha \in \wedge^r E$. Montrez que α est réductible ssi $\ker \varphi(\alpha)$ est de dimension $\geq r$. Sans hypothèse sur α, montrez que $\ker \varphi(\alpha)$ est de dimension $\leq r$.

(4) Déduisez-en des équations homogènes définissant $\mathbb{G}(r, E)$ dans $\mathbb{P}(\wedge^r E^*)$. Quel est leur degré ?

Exercice 2 On va montrer que $\mathbb{G}(r, E)$ peut être définie par des équations quadratiques dans $\mathbb{P}(\wedge^r E^*)$. Rappelons que pour tout $\alpha \in \wedge^r E$, on a défini (*cf* TD3) un dual $\alpha^\dagger \in \wedge^{n-r} E^*$ tel que

$$\alpha^\dagger(\beta) = u(\alpha \wedge \beta)$$

pour tout $\beta \in \wedge^{n-r} E$. (Il faut fixer auparavant un isomorphisme $u\colon \wedge^n E \xrightarrow{\sim} k$.)

(1) Montrez que α est réductible ssi $\alpha^\dagger$ est réductible.

On note $\psi(\alpha)\colon E^* \to \wedge^{n-r+1} E^*$ l'application linéaire définie par $v^* \mapsto \alpha^\dagger \wedge v^*$.

(2) Montrez que α est réductible ssi les images des applications transposées $\varphi(\alpha)^*\colon \wedge^{r+1} E^* \to E^*$ et $\psi(\alpha)^*\colon \wedge^{n-r+1} E \to E$ sont dual-orthogonales.

(*Indications. Si* $\alpha = f_1 \wedge \cdots \wedge f_r$, *calculez explicitement* $(\ker \varphi(\alpha))^\perp$ *et* $\ker \psi(\alpha)$ *et concluez. Pour le sens réciproque, utilisez un argument de dimension.*)

(3) Déduisez-en des équations quadratiques pour $\mathbb{G}(r, E)$ dans $\mathbb{P}(\wedge^r E^*)$.

Exercice 3 On considère la grassmannienne la plus simple qui ne soit pas un espace projectif, c'est-à-dire $\mathbb{G}(2, 4) = \mathbb{G}(2, k^4)$. Donnez les équations la définissant dans $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\wedge^2(\mathbb{C}^4)^*)$ issues de l'exercice 1, puis celles issues de l'exercice 2.

Exercice 4 Soit A un anneau. On dit qu'un A-module M est *plat* ssi le foncteur $\cdot \otimes_A M$ est exact.

(1) Montrez que M est plat sur A ssi $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$ pour tout A-module N, où Tor_i désigne le i-ème foncteur dérivé gauche du foncteur $\cdot \otimes_A M$.

(2) Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules, M'' étant plat. Montrez que cette suite reste exacte par tensorisation par n'importe quel module N.

(3) Montrez que pour que M soit plat, il faut et il suffit que M' le soit.

Exercice 5 (1) Montrez que le noyau d'un morphisme de fibrés vectoriels ([1]) est un fibré vectoriel.

(2) Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang r, et $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-$\mathcal{O}_X$-module, localement libre de rang $s \leq r$. Montrez que le quotient $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ est localement libre si et seulement si $\mathcal{F}$ est localement facteur direct dans $\mathcal{E}$. Si E et F sont les fibrés vectoriels associés, on dit alors que F est un *sous-fibré vectoriel* de E.

(3) Donnez un exemple d'un sous-$\mathcal{O}_X$-module qui n'est pas un sous-fibré.

(4) Montrer que si E et F sont deux fibrés vectoriels sur X et k est un entier, alors on peut définir les fibrés vectoriels E^*, $E \otimes F$, $\mathrm{Hom}(E, F)$, $\mathrm{Sym}^k(E)$, $\wedge^k(E)$.

Exercice 6 (1) Construisez le sous-fibré universel $\mathcal{F} \subset E$ sur la grassmannienne $\mathbb{G}(r, E)$. (*Utilisez le plongement de Plücker* $i\colon \mathbb{G}(r, E) \hookrightarrow \mathbb{P}(\wedge^r E^*)$ *et les fibrés universels sur l'espace projectif.*)

(2) Montrez que c'est un sous-fibré. (*Vous utiliserez le fait suivant, qui se démontre avec le lemme de Nakayama : soit A un anneau et n un entier, alors tout morphisme surjectif $A^n \to A^n$ est un isomorphisme.*)

(3) Montrez que pour tout k-schéma X portant un faisceau $\mathcal{L}$ localement libre de rang $n - r$ et engendré par n sections globales, il existe un unique morphisme $f\colon X \to \mathbb{G}(r, E)$ tel que $\mathcal{L} = f^*\mathcal{Q}$, et réciproquement.

Exercice 7 On poursuit l'étude de la dimension des fibres des modules cohérents. Nous allons montrer que si X est un schéma réduit, alors le fait que $d(x) = \dim_{k(x)} \mathcal{F} \otimes k(x)$ soit une fonction constante de x caractérise les faisceaux cohérents *plats*. L'assertion étant locale sur X, on suppose que $X = \mathrm{Spec}(A)$ avec A local d'idéal maximal m et $k = A/m$, et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$. Soit n le rang des fibres de M, supposé constant.

(1) Pour tout $p \in \mathrm{Spec}(A)$, soit $K(p) = \mathrm{Frac}(A/p)$. Montrez que le morphisme naturel $A \to \prod_p K(p)$ est injectif.

(2) Montrez que M est libre de rang n, donc plat. (*Construisez un morphisme surjectif de A-modules $\varphi\colon A^n \to M$ puis considérez la suite exacte* $0 \to N \to A^n \to M \to 0$ *où* $N := \ker(\varphi)$.)

Références

D. Eisenbud, J. Harris, *The geometry of schemes*, Graduate Texts in Mathematics **197**, Springer, 2000.
R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1973.
R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, 1977.
C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés **10**, Société Mathématique de France, 2002.

[1] Un *fibré vectoriel de rang n* est un morphisme $p\colon E \to X$ tel qu'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de X et des identifications $\phi_i : p^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{A}^n$ telles que les changements d'identification $\phi \circ \phi_j^{-1}$ (sur $U_i \cap U_j$) sont linéaires. Le faisceau des sections de E noté $\mathcal{E}$, est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang n. C'est la même chose de se donner E ou $\mathcal{E}$, et on les confond souvent dans la notation et dans la terminologie.