# TD 3

Dans ce TD, nous donnons diverses méthodes de calcul pour la cohomologie desfaisceaux. La méthode la plus importante consiste (comme partout en algèbre) à réaliser le faisceau que l'on étudie comme sous-faisceau ou comme quotient d'un faisceau plus simple. On utilise alors la suite exacte longue de cohomologie associée à une suite exacte courte. C'est l'un des avantages essentiels de la cohomologie des foncteurs dérivés que de donner lieu à des suites exactes longues. Cette technique permet déjà d'assouplir considérablement le calcul en utilisant les résolutions $F$-acycliques, beaucoup plus sympathiques que les résolutions injectives :

**Définition 1** Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec assez d'injectifs, et $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur additif covariant exact à gauche. Un objet $M \in \mathcal{C}$ est dit *$F$-acyclique* si $R^iF(M) = 0$ pour tout $i > 0$.

**Exercice 2** Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec assez d'injectifs, et $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur additif covariant exact à gauche. Soit $M \in \mathcal{C}$ et $A^\bullet = (A^0 \to A^1 \to \dots)$ une résolution par des objets $F$-acycliques. Montrez que cette résolution « permet de calculer $R^kF(M)$ », c'est-à-dire que $R^kF(M) = H^k(F(A^\bullet))$. Pour cela, décomposez la suite exacte $0 \to M \to A^0 \to A^1 \to \dots$ en suites exactes à trois termes

$$0 \to d(A^{i-1}) \to A^i \to d(A^i) \to 0$$

et écrivez la suite exacte longue associée à chacune (posez $A^{-1} := M$ pour simplifier).

Nous allons maintenant donner des exemples dans les catégories de faisceaux.

**Exercice 3** Un faisceau $\mathcal{F}$ sur $X$ est dit *flasque* si pour tous ouverts $U \subset V$, l'application de restriction $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ est surjective.

(1) Montrez que sur un espace topologique irréductible, un faisceau constant est flasque. Montrez que ce n'est pas forcément le cas sur un espace connexe.

(2) Montrez que si $\mathcal{F}$ est flasque sur $X$ et $f\colon X \to Y$ est continue, alors $f_*\mathcal{F}$ est flasque sur $Y$.

(3) Soit $i\colon Y \to X$ l'inclusion d'un fermé dans $X$, $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur $Y$. Démontrez que $\mathrm{H}^k(X, i_*\mathcal{F}) = \mathrm{H}^k(Y, \mathcal{F})$ en utilisant des résolutions flasques.

**Exercice 4** Montrez qu'un faisceau flasque $\mathcal{F}$ est $\Gamma$-acyclique.

(*Indications. Plongez $\mathcal{F}$ dans le faisceau $\mathcal{I}$ défini par $\mathcal{I}(U) = \prod_{x\in U} I_x$, où pour tout $x \in X$, on a choisi un groupe abélien injectif $I_x$ contenant la fibre $\mathcal{F}_x$. Montrez que $\mathcal{I}$ est injectif et flasque, et que le quotient $\mathcal{G} = \mathcal{I}/\mathcal{F}$ est flasque. Considérez la suite exacte longue associée à la suite* $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I} \to \mathcal{G} \to 0$. *Voir Voisin, proposition 4.34, ou Hartshorne III.2.5.*)

**Exercice 5** Soit $X$ un espace topologique, $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur $X$, $i\colon Y \to X$ l'inclusion d'un fermé dans $X$, $j\colon U \to X$ l'ouvert complémentaire. On pose $\mathcal{F}_Y := i_*i^*\mathbb{Z}$ et $\mathcal{F}_U := j_!j^*\mathbb{Z}$. Montrez qu'on a une suite exacte $0 \to \mathcal{F}_U \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_Y \to 0$.

**Exercice 6** (Voir les déf. 11, 13 et le th. 12 pour des rappels sur la cohomologie de Čech.) Soit $k$ un corps et $X = \mathbb{A}^n_k$ l'espace affine de dimension $n$. Soit $Y$ la réunion des $n+1$ hyperplans $Y_i$ d'équation $x_i = 0$ $(1 \le i \le n)$ et $Y_{n+1}$ d'équation $x_1 + \dots + x_n = 1$. Soit $i\colon Y \to X$ l'inclusion, et $U = X \setminus Y$. On va montrer que $\mathrm{H}^n(X, \mathbb{Z}_U) \neq 0$, où $\mathbb{Z}_U$ est défini à partir du faisceau constant $\mathbb{Z}$ sur $X$ comme dans l'exercice 5.

(1) Montrez que $\mathrm{H}^n(X, \mathbb{Z}_U) = \mathrm{H}^{n-1}(Y, i^*\mathbb{Z})$.

(2) Soit $\mathcal{F} = i^*\mathbb{Z}$, i.e. le faisceau constant sur $Y$. On considère le recouvrement de $Y$ par les fermés $Y_i$ pour $1 \leq i \leq n+1$. Pour tout $I \subset \{1, \ldots, n+1\}$, on pose $Y_I = \cap_{i \in I} Y_i$ et $\mathcal{F}_I = j_{I*}j_I{}^*\mathcal{F}$ où $j_I \colon Y_I \hookrightarrow Y$ est l'inclusion. On pose $\mathcal{F}^k = \oplus_{|I|=k+1} \mathcal{F}_I$. Montrez que le complexe de Čech

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1 \to \mathcal{F}^2 \to \cdots \to \mathcal{F}^{n-2} \to \mathcal{F}^{n-1} \to 0$$

est une résolution acyclique de $\mathcal{F}$. Déduisez-en $\mathrm{H}^{n-1}(Y, \mathcal{F})$. (*Au besoin regardez le cas* $n = 2$.)

(3) À votre avis, que vaut $\mathrm{H}^i(Y, \mathcal{F})$ pour $1 \leq i \leq n-2$ ? Donnez les arguments qui permettent de le montrer.

(4) On suppose que $n = 2$. On note 1, 2, 3 les points d'intersection des composantes $Y_i$, et $U_1 = Y \setminus \{2, 3\}$, etc. Peut-on utiliser la résolution de Čech du recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)$ pour calculer $\mathrm{H}^1(Y, \mathcal{F})$ ?

**Remarque 7** L'exercice précédent montre les limites des résultats suivants :

(i) le théorème de Grothendieck qui affirme que sur un espace topologique nœthérien de dimension $n$, pour tout faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$, on a $\mathrm{H}^k(X, \mathcal{F}) = 0$ si $k > n$. ([1])

(ii) le théorème de Serre sur l'acyclicité des faisceaux quasi-cohérents sur un schéma affine (voir le cours).

(iii) le calcul de la cohomologie par le procédé de Čech (voir ci-dessous).

Précisément le contre-exemple étudié a montré que dans (i) la borne sur $k$ est optimale, que (ii) est faux pour les faisceaux qui ne sont pas quasi-cohérents, et que la cohomologie de Čech (iii) des recouvrements ouverts ne permet pas tout le temps de calculer la cohomologie des foncteurs dérivés.

**Exercice 8** Cet exercice étudie une dualité dans l'algèbre extérieure $\wedge^* E = \oplus_{r=0}^n \wedge^r E$.

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ sur un corps $k$. On rappelle que pour tout entier $r \leq n$, il y a un accouplement non dégénéré $\wedge^r E \times \wedge^r(E^*) \to k$ défini par extension par linéarité à partir de

$$(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \, , \, f_1 \wedge \cdots \wedge f_r) \mapsto \det(f_j(x_i))$$

Ceci induit un isomorphisme canonique $(\wedge^r E)^* = \wedge^r(E^*)$ ([2]). Dans toute la suite on note plus simplement $f(x) = \det(f_j(x_i))$ le déterminant ci-dessus.

On choisit un isomorphisme $u \colon \wedge^n E \xrightarrow{\sim} k$. Ceci induit une identification $\alpha_u \colon \wedge^r E \simeq \wedge^{n-r} E^*$ telle qu'à tout vecteur $x \in \wedge^r E$ est associé $x^\dagger := \alpha_u(x) \in \wedge^{n-r} E^*$ défini par $x^\dagger(y) = u(x \wedge y)$, pour tout $y \in \wedge^{n-r} E$. On souhaite montrer qu'on a le résultat de bidualité, indépendant du choix de $u$ :

$$x^{\dagger\dagger} = (-1)^{r(n-r)} x \, .$$

(1) Montrez que l'isomorphisme naturel $u^* \colon \wedge^n E^* \xrightarrow{\sim} k$ induit par $u$ est défini par le fait que pour $f \in \wedge^n E^*$, on a $f(x) = u^*(f) u(x)$ pour tout $x \in \wedge^n E$.

(2) Donnez une égalité qui définit l'image par $\alpha_{u^*} \colon \wedge^{n-r} E^* \simeq \wedge^r E^{**} = \wedge^r E$ d'un vecteur $f \in \wedge^{n-r} E^*$.

(3) Montrez que la formule de bidualité est équivalente à l'égalité entre formes sur $\wedge^n E$ :

$$x^\dagger \wedge g = (-1)^{r(n-r)} g(x) \, u \, ,$$

pour tous $x \in \wedge^r E$ et $g \in \wedge^r E^*$.

(4) Vérifiez la formule en choisissant une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $E$.

---

[1] La dimension d'un espace topologique nœthérien est le supremum des longueurs de chaînes de sous-espaces fermés irréductibles. Un cas particulier de ce théorème est dans le cours, lorsque $X$ est un schéma projectif sur un corps $k$ et $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent.

[2] Il est d'usage fréquent de désigner les isomorphismes canoniques par un signe « = ».

Cohomologie de Rham, cohomologie de Čech

Nous donnons des applications de ce qui précède au calcul de la cohomologie des faisceaux. Supposons que $X$ est une variété différentiable $\mathcal{C}^\infty$ de dimension $n$. On a alors un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}^0 = \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ sur $X$. En utilisant le résultat de l'exercice 4, on peut montrer que tout faisceau de $\mathcal{A}^0$-modules sur $X$, appelé un faisceau *fin*, est $\Gamma$-acyclique (voir Voisin, paragraphe 4.3 pour la définition et la preuve). Il en va ainsi du faisceau tangent ou des faisceaux de $k$-formes de classe $\mathcal{C}^\infty$.

**Définition 9** Soit $X$ une variété différentiable $\mathcal{C}^\infty$ de dimension $n$. On note $\mathcal{A}^k$ le faisceau des $k$-formes $\mathcal{C}^\infty$ de $X$, sections de $\Omega^k_{X,\mathbb{R}}$. Soit $d\colon \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^{k+1}$ la différentielle extérieure. Le *complexe de Rham* de $X$ est le complexe

$$\mathcal{A}^0 = \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R}) \to \mathcal{A}^1 \to \cdots \to \mathcal{A}^n \to 0$$

On montre (quel est le nom de l'argument qui permet de montrer l'exactitude ?) :

**Théorème 10** *Le complexe de Rham est une résolution (fine donc acyclique) du faisceau constant* $\mathbb{R}$. *Ainsi* $\mathrm{H}^k(X, \mathbb{R}) = \ker(\Gamma(\mathcal{A}^k) \to \Gamma(\mathcal{A}^{k+1}))/\operatorname{im}(\Gamma(\mathcal{A}^{k-1}) \to \Gamma(\mathcal{A}^k))$. □

Revenons au cas d'un espace topologique $X$ pour définir le *complexe de Čech* d'un faisceau $\mathcal{F}$.

**Définition 11** Soit $X$ un espace topologique et $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un recouvrement dénombrable ordonné qui est soit ouvert, soit fermé et localement fini. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur $X$. Pour tout $I \subset \mathbb{N}$ fini ordonné, on pose $U_I = \cap_{i\in I} U_i$ et $\mathcal{F}_I = j_{I*}\mathcal{F}_{|U_I}$ où $j_I\colon U_I \hookrightarrow X$ est l'inclusion. On pose $\mathcal{F}^k = \oplus_{|I|=k+1} \mathcal{F}_I$ et on définit une différentielle

$$d\colon \mathcal{F}^k \to \mathcal{F}^{k+1}$$

par la formule suivante. Pour tout $J \subset \mathbb{N}$ de taille $k+2$, on note $J_i$ l'ensemble $J$ privé de son $i$-ème terme. Alors pour toute section $\alpha \in \mathcal{F}^k(U)$, on pose $d\alpha = \bigoplus_J (d\alpha)_J$ où $(d\alpha)_J = \sum_i (-1)^i \alpha_{J_i|U\cap U_J}$.

**Théorème 12** *Le complexe de Čech* $\mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1 \to \dots \mathcal{F}^n \to \mathcal{F}^{n+1} \to \dots$ *est une résolution de* $\mathcal{F}$. □

L'exactitude se démontre en utilisant une homotopie explicite (que l'on trouve dans Godement, théorème 5.2.1 ou Hartshorne dans le cas d'un recouvrement ouvert). Ce qui pose problème en revanche est l'acyclicité des termes $\mathcal{F}^k$ de la résolution.

**Définition 13** Notons $\mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ le groupe des sections globales de $\mathcal{F}^k$ et $d^k\colon \mathcal{C}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ la différentielle. On définit le $k$-ème groupe de cohomologie de Čech de $\mathcal{F}$ par rapport au recouvrement $\mathfrak{U}$ par $\check{\mathrm{H}}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \ker(d^k)/\operatorname{im}(d^{k-1})$.

Lorsque les $\mathcal{F}^k$ sont acycliques, on a $\check{\mathrm{H}}^k(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{H}^k(X, \mathcal{F})$. (Voir le cours ou les références ci-dessous pour des conditions sous lesquelles les $\mathcal{F}^k$ sont acycliques.)

## Références


R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1973.

R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, 1977.

C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés **10**, Société Mathématique de France, 2002.