# Corrigé (très partiel !) du TD 2

**Exercice 17**

(1) On prend le recouvrement ouvert standard de $\mathbb{P}^1$ par $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ et $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$ ($x_0, x_1$ sont des coordonnées homogènes fixées sur $\mathbb{P}^1$). Donc si on pose $x = x_1/x_0$ on a $U_0 = \mathrm{Spec}(k[x])$ et $U_1 = \mathrm{Spec}(k[\frac{1}{x}])$. La résolution de Čech du faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ est

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow i_{0*}\mathcal{O}_{U_0} \oplus i_{1*}\mathcal{O}_{U_1} \longrightarrow i_{01*}\mathcal{O}_{U_0\cap U_1} \longrightarrow 0$$

Pour calculer $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k})$ on prend les sections globales puis le 1er groupe de cohomologie du complexe obtenu. Comme les sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ sont les constantes, on a

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{i} k[x] \oplus k[\frac{1}{x}] \xrightarrow{d_0} k[x, \frac{1}{x}] \xrightarrow{d_1} 0$$

(qui n'est plus une suite exacte !). On a $i(f) = (f, f)$, et $d_0(a(x), b(\frac{1}{x})) = a(x) - b(\frac{1}{x})$. Donc $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k})$ est le noyau de $d_1$ modulo l'image de $d_0$, et comme $d_0$ est manifestement surjective, $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}) = 0$.

(2) On utilise le fait que sur l'espace projectif on a $\mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{O}(H)$ pour n'importe quel hyperplan $H$. Donc $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-1)$ est isomorphe au faisceau d'idéaux de $H$, et on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \to \mathcal{O}_H \to 0$$

(on devrait noter $i_*\mathcal{O}_H$ au lieu de $H$, où $i\colon H \to \mathbb{P}^n_k$ est l'immersion fermée, mais l'abus de notation est courant, comme on l'a vu notamment à l'exercice 3 du TD3). En tensorisant par $\mathcal{O}(\ell)$ pour $\ell \geq 0$, comme ce faisceau est (localement libre donc) plat, la suite reste exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\ell - 1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\ell) \to \mathcal{O}_H(\ell) \to 0$$

Prenons la suite exacte longue de cohomologie :

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\ell-1)) \to \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\ell)) \to \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_H(\ell)) = \mathrm{H}^0(H, \mathcal{O}_H(\ell)) \to$$

$$\to \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\ell-1)) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\ell)) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_H(\ell)) = \mathrm{H}^1(H, \mathcal{O}_H(\ell)) \to \dots$$

On sait que $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\ell)) \to \mathrm{H}^0(H, \mathcal{O}_H(\ell))$ est surjective (l'énoncé nous l'a rappelé). De plus, dans l'exercice on a en fait $n = 1$, et sur $\mathbb{P}^1$, un hyperplan est juste un point ! Donc les faisceaux sur $H$ n'ont pas de cohomologie en degré $\geq 1$, d'où $\mathrm{H}^1(H, \mathcal{O}_H(\ell)) = 0$. Ainsi la suite exacte donne unisomorphisme $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\ell-1)) \simeq \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\ell))$. Si on suppose par récurrence que $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\ell-1)) = 0$ (on a montré le cas $\ell - 1 = 1$ dans la première question) alors on obtient $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\ell)) = 0$.