TD 2

Dans ce TD nous définissons la cohomologie des foncteurs dérivés. Pour nous donner du courage, considérons une variété X, et un morphisme quotient de fibrés vectoriels $V \to W$ de noyau N ; par exemple X est l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ classifiant les hyperplans de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{n+1}$, et on regarde le morphisme $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathcal{O}(1)$ quotient de $\mathbb{C}^{n+1}$ par l'hyperplan universel. Alors $V \to W$ est localement surjectif, mais en général il ne l'est pas globalement, c'est-à-dire qu'une section globale de W sur X ne se relève pas toujours en une section globale de V. En d'autres termes, après application du foncteur de sections globales Γ, une suite exacte de fibrés $0 \to N \to V \to W \to 0$ donne une suite d'espaces vectoriels qui n'est en général exacte qu'à gauche :

$$0 \to \Gamma(X, N) \to \Gamma(X, V) \to \Gamma(X, W) \to ?$$

Il se trouve qu'il existe un espace vectoriel naturel (en fait, fonctoriel) noté $\mathrm{H}^1(X, N)$, dépendant de N mais pas de la suite exacte particulière dans laquelle il se trouve, et qui complète la suite ci-dessus à droite. On a même une suite exacte infinie

$$0 \to \Gamma(X, N) \to \Gamma(X, V) \to \Gamma(X, W) \to \mathrm{H}^1(X, N) \to \mathrm{H}^1(X, V) \to \mathrm{H}^1(X, W) \to \mathrm{H}^2(X, N) \to \dots$$

Le cas échéant, l'annulation de $\mathrm{H}^1(X, N)$ permet d'obtenir une suite exacte de sections globales ; sinon, on peut en tout cas contrôler le défaut de surjectivité.

Cette construction fonctionne pour bien d'autres catégories que celle des fibrés vectoriels, et pour bien d'autres foncteurs que Γ. La théorie générale qui formalise ces questions est l'*algèbre homologique*, dont voici les rudiments qui nous seront utiles.

Catégories abéliennes et complexes

Définition 1 Une *catégorie abélienne* est une catégorie $\mathcal{C}$ dans laquelle pour tous objets A, B les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ sont des groupes abéliens, la loi de composition est bilinéaire, il existe un objet nul noté 0, il existe des sommes directes notées $A \oplus B$, tout morphisme a un noyau et un conoyau, tout monomorphisme est le noyau de son conoyau, tout épimorphisme est le conoyau de son noyau.

Dans une catégorie abélienne, on peut définir l'*image* d'un morphisme et donc la notion de *suite exacte*. En fait, la notion plus générale de complexe sera essentielle pour la suite :

Définition 2 (i) Un *complexe* $A^\bullet$ dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ est une suite d'objets et de morphismes

$$\dots \longrightarrow A^{k-1} \xrightarrow{d^{k-1}} A^k \xrightarrow{d^k} A^{k+1} \longrightarrow \dots$$

tels que $d^k \circ d^{k-1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (1). La collection $d = (d^k)$ est appelée la *différentielle* de $A^\bullet$. Le complexe est dit *positif* (resp. *négatif*) si $A^k = 0$ pour tout $k < 0$ (resp. pour tout $k > 0$).

(ii) Un *morphisme de complexes* $f \colon A^\bullet \to B^\bullet$ est une suite de morphismes $f^k \colon A^k \to B^k$ tels que pour tout k on ait $\delta^k \circ f^k = f^{k+1} \circ d^k$, où d et δ sont les différentielles de A et B (2).

(iii) Le *k-ème groupe de cohomologie* du complexe $A^\bullet$ est défini par $\mathrm{H}^k(A^\bullet) := \ker(d^k)/\operatorname{im}(d^{k-1})$.

(iv) On dit qu'un complexe est une *suite exacte* si $\ker(f^k) = \operatorname{im}(f^{k-1})$ pour tout k, c'est-à-dire $\mathrm{H}^k(A^\bullet) = 0$.

[1] Si la catégorie possède des sommes directes infinies, c'est équivalent à se donner un objet gradué $A^\bullet = \oplus A^k$ muni d'un endomorphisme $d \colon A^\bullet \to A^\bullet$ de degré 1, c'est-à-dire que $d(A^k) \subset A^{k+1}$ pour tout i, et tel que $d \circ d = 0$.

[2] De manière équivalente, c'est un morphisme d'objets gradués $f \colon A^\bullet \to B^\bullet$ tel que $\delta f = fd$.

Remarque 3 Pour les complexes négatifs, on préfère écrire des indices positifs donc on pose souvent $A_k := A^{-k}$ et $d_k := d^{-k}$. Ainsi $A^\bullet = (\cdots \to A^{-2} \to A^{-1} \to A^0)$ devient noté $A_\bullet = (\cdots \to A_2 \to A_1 \to A_0)$.

Exercice 4 Montrez qu'un morphisme de complexes $f\colon A^\bullet \to B^\bullet$ induit des morphismes $\mathrm{H}^k(f)\colon\ \mathrm{H}^k(A^\bullet) \to \mathrm{H}^k(B^\bullet)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples 5 Les catégories suivantes sont abéliennes : la catégorie des A-modules (pour un anneau A fixé), la catégorie des préfaisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique X (ou celle des faisceaux), la catégorie des préfaisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules sur un espace topologique annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ (ou celle des faisceaux).

Exercice 6 Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Montrez que la catégorie $\mathrm{Com}(\mathcal{C})$ des complexes dans $\mathcal{C}$, décrite dans la définition 2, est une catégorie abélienne.

Foncteurs exacts

Définition 7 Soit $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur covariant entre deux catégories abéliennes. On dit que F est *additif* si les applications $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(A, B) \to \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(F(A), F(B))$ sont des morphismes de groupes abéliens. On dit que F est *exact à gauche* (resp. *exact à gauche*) si pour toute suite exacte $0 \to A \to B \to C$ (resp. $A \to B \to C \to 0$), la suite $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ (resp. $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$) est exacte. Ceci signifie que F préserve les noyaux (resp. les conoyaux). Enfin on dit que F est exact s'il l'est à droite et à gauche.

Soit $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur contravariant entre deux catégories abéliennes. On dit que F est *exact à gauche* si pour toute suite exacte $A \to B \to C \to 0$, la suite $0 \to F(C) \to F(B) \to F(A)$ est exacte. On a une définition similaire pour l'exactitude à droite.

Exercice 8 Soit A un anneau et $\mathcal{C} = \mathcal{M}od_A$ la catégorie des A-modules. Soit $M \in \mathcal{C}$ ([3]). Montrez que

(1) le foncteur $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(M, \cdot)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un foncteur covariant exact à gauche.

(2) le foncteur $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(\cdot, M)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un foncteur contravariant exact à gauche.

(3) le foncteur $\cdot \otimes_A M\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un foncteur covariant exact à droite.

Montrez qu'en général, aucun de ces foncteurs n'est exact de l'autre côté.

Définition 9 (i) On dit qu'un objet I de $\mathcal{C}$ est *injectif* si le foncteur $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(\cdot, I)$ est exact. On dit qu'un objet P de $\mathcal{C}$ est *projectif* si le foncteur $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(P, \cdot)$ est exact.

(ii) On dit que *$\mathcal{C}$ a assez d'injectifs* (resp. *$\mathcal{C}$ a assez de projectifs*) si tout objet se plonge dans un objet injectif (resp. est quotient d'un objet projectif) ([4]).

Exercice 10 Montrez que $I \in \mathcal{C}$ est injectif ssi toute suite exacte $0 \to I \to A \to B \to 0$ est scindée.

Exercice 11 Montrez que $P \in \mathcal{C}$ est projectif ssi toute suite exacte $0 \to A \to B \to P \to 0$ est scindée. Montrez qu'un A-module libre est projectif. Déduisez-en que la catégorie $\mathcal{M}od_A$ a assez de projectifs.

Pour les injectifs, le résultat dual de l'exercice 11 n'est pas aussi facile a établir, mais il est vrai et nous l'admettrons : la catégorie $\mathcal{M}od_A$ a assez d'injectifs (voir Rotman, pages 65 à 71) ([5]).

Résolutions

Définition 12 (i) Une *résolution droite* d'un objet $M \in \mathcal{C}$ est un couple $(A^\bullet, \varepsilon)$ formé d'un complexe positif

$$A^\bullet = (A^0 \to A^1 \to A^2 \to \dots)$$

[3] On note souvent $M \in \mathcal{C}$ au lieu de $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$...

[4] On dit que M se plonge dans I s'il existe un monomorphisme $M \to I$.

[5] Par ailleurs, les modules injectifs étant assez bizarres et très peu commodes en pratique, la preuve n'apporte pas grand'chose pour nous.

et d'un morphisme $\varepsilon\colon M \to A^0$ tel que la suite $0 \to M \xrightarrow{\varepsilon} A^0 \to A^1 \to A^2 \to \dots$ est exacte ([6]).

(ii) Une *résolution gauche* est un couple $(A_\bullet, \varepsilon)$ formé d'un complexe négatif $A_\bullet$ et d'un morphisme $\varepsilon\colon A_0 \to M$ tel que la suite $\dots \to A_2 \to A_1 \to A_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ est exacte.

Exercice 13 On peut voir tout objet $M \in \mathcal{C}$ comme un complexe concentré en degré 0, à savoir le complexe $\dots \to 0 \to M \to 0 \to \dots$ avec différentielle nulle. (Il est positif et négatif donc on peut le noter $M^\bullet$ ou $M_\bullet$.)

(1) Montrez qu'une résolution droite de M (resp. gauche) est simplement un morphisme de complexes $M^\bullet \to A^\bullet$ (resp. $A_\bullet \to M_\bullet$) qui induit des isomorphismes en cohomologie (voir exercice 4).

(2) On suppose maintenant que $\mathcal{C}$ a assez d'injectifs. Montrez que tout objet $M \in \mathcal{C}$ a une résolution droite injective, c'est-à-dire une résolution $M^\bullet \to I^\bullet$ constituée d'objets injectifs I^k. (Dualement, dans une catégorie abélienne avec assez de projectifs, tout objet $M \in \mathcal{C}$ a une résolution gauche projective $P_\bullet \to M_\bullet$.)

Foncteurs dérivés

Soit $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur additif covariant exact à gauche entre deux catégories abéliennes. Si $\mathcal{C}$ a assez d'injectifs, l'existence de résolutions injectives $M^\bullet \to I^\bullet$ (exercice 13) permet de définir un objet $R^kF(M)$. La définition de R^kF comme foncteur nécessite de faire une fois pour toutes le choix d'une résolution injective pour chaque objet de $\mathcal{C}$. Ce choix est sans importance comme l'affirme le théorème qui suit.

Définition 14 Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec assez d'injectifs. Soit $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur additif covariant exact à gauche. Soit, pour chaque $M \in \mathcal{C}$, une résolution injective $I^\bullet = (I^0 \to I^1 \to \dots)$. On considère le complexe image $F(I^\bullet) = (F(I^0) \to F(I^1) \to \dots)$ et, pour $k \geq 0$, on pose $R^kF(M) = \mathrm{H}^k(F(I^\bullet))$.

Théorème 15 *Les foncteurs dérivés $R^kF\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sont bien définis indépendamment des choix de résolutions pour les objets (à des isomorphismes canoniques près) et vérifient :*

(i) $R^0F = F$.

(ii) *Si I est injectif, alors $R^kF(I) = 0$ pour tout $k > 0$.*

(iii) *Pour toute suite exacte $0 \to A \to B \to C \to 0$, et pour tout $k \geq 0$, il existe des* morphismes de connexion $\partial^k\colon R^kF(C) \to R^{k+1}F(A)$ *donnant naissance à une suite exacte longue*

$$0 \to A \to B \to C \xrightarrow{\partial^0} R^1F(A) \to R^1F(B) \to R^1F(C) \xrightarrow{\partial^1} R^2F(A) \to R^2F(B) \to R^2F(C) \xrightarrow{\partial^2} \dots$$

(iv) *Si on a un morphisme de la suite exacte $0 \to A \to B \to C \to 0$ vers la suite exacte $0 \to A' \to B' \to C' \to 0$, alors le diagramme suivant est commutatif pour tout k :*

$$\begin{tikzcd} R^kF(C) \arrow[r, "\partial^k"] \arrow[d] & R^{k+1}F(A) \arrow[d] \\ R^kF(C') \arrow[r, "(\partial')^k"] & R^{k+1}F(A') \end{tikzcd}$$

De plus la suite $(R^kF, \partial^k, k \geq 0)$ est caractérisée par ces propriétés.

Nous renvoyons à la littérature pour la preuve de ce théorème. (Par exemple Cartan-Eilenberg, ou Weibel, ou l'appendice d'algèbre homologique dans Eisenbud.) Rien n'est très difficile, et les démonstrations constituent un bon exercice d'algèbre homologique.

Pour un foncteur exact à droite $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, lorsque $\mathcal{C}$ a assez de projectifs, on définit de même les *foncteurs dérivés à gauche* L^kF.

[6] Souvent on oublie ε dans la notation et on écrit simplement $A^\bullet$ pour désigner la résolution.

Exemples 16 Voici les notations de quelques-uns des plus importants foncteurs dérivés.

Soit A un anneau et M, N des A-modules. On peut montrer que la valeur en N du k-ème foncteur dérivé droit du foncteur covariant exact à gauche $\mathrm{Hom}(M, \cdot)$ est canoniquement isomorphe à la valeur en M du k-ème foncteur dérivé droit du foncteur contravariant exact à gauche $\mathrm{Hom}(\cdot, N)$. On note $\mathrm{Ext}^k_A(M, N)$ cette valeur.

De même, on peut montrer que la valeur en N du k-ème foncteur dérivé gauche du foncteur covariant exact à droite $M \otimes_A \cdot$ est canoniquement isomorphe à la valeur en M du k-ème foncteur dérivé gauche du foncteur covariant exact à droite $\cdot \otimes_A N$, on note $\mathrm{Tor}^A_k(M, N)$ cette valeur.

Soit X une variété complexe ou algébrique, et $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Notons $\mathcal{M}od_X$ la catégorie abélienne des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules. Le foncteur de sections globales est un foncteur covariant exact à gauche $\Gamma\colon \mathcal{M}od_X \to \mathcal{M}od_A$ dont on note $\mathrm{H}^k(X, \mathcal{F}) := R^k\Gamma(\mathcal{F})$ les dérivés à droite.

Partant des foncteurs $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \cdot)\colon \mathcal{M}od_X \to \mathcal{M}od_A$ on obtient des dérivés $\mathrm{Ext}^k(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Partant des foncteurs $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \cdot)\colon \mathcal{M}od_X \to \mathcal{M}od_X$ on obtient des dérivés $\mathcal{E}xt^k(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Pour finir, partant des foncteurs $\mathcal{F} \otimes \cdot\colon \mathcal{M}od_X \to \mathcal{M}od_X$ on obtient des dérivés $\mathcal{T}or_k(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Références

D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer, 1995.

R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, 1977.

C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés **10**, Société Mathématique de France, 2002.

C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **38**, Cambridge University Press, 1994.