TD 1

Ce TD étudie les conditions de finitude en algèbre commutative, et leur application en géométrie algébrique. Nous faisons aussi quelques rappels sur la localisation.

Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires, et les morphismes d'anneaux envoient 1 sur 1.

Anneaux nœthériens, espaces topologiques nœthériens

On rappelle qu'un anneau A est dit *nœthérien* si toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire, ou si tout idéal est engendré par un nombre fini d'éléments. Voici le *théorème de la base* de Hilbert :

Théorème 1 *Soit A un anneau nœthérien, alors l'anneau de polynômes $A[X]$ est nœthérien.*

Corollaire 2 *Soit A nœthérien, alors toute A-algèbre de type fini est nœthérienne.*

On rappelle que dans un anneau A, le *nilradical* de A, noté $\mathrm{nil}(A)$ ou $\sqrt{0}$, est l'ensemble des éléments nilpotents. C'est un idéal, et on montre qu'il est aussi égal à l'intersection des idéaux premiers de A (faites-le). Si $\mathrm{nil}(A) = 0$ on dit que A est *réduit*. L'anneau $A_{\text{réd}} = A/\mathrm{nil}(A)$ est toujours réduit.

Exercice 3 On dit qu'un espace topologique est *irréductible* ssi il n'est pas réunion de deux fermés stricts. Montrez que $X = \mathrm{Spec}(A)$ est irréductible ssi $A_{\text{réd}}$ est intègre.

Exercice 4 On dit qu'un espace topologique X est *nœthérien* ssi toute suite *décroissante* de fermés de X est stationnaire.

(1) Montrez que si A est nœthérien, alors $X = \mathrm{Spec}(A)$ est nœthérien.

(2) Montrez que dans un espace topologique nœthérien, tout fermé non vide Y peut s'écrire de manière unique comme un réunion finie $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$ où les Y_i sont des fermés irréductibles tels que $Y_i \not\subset Y_j$ pour tous $i \neq j$. Les Y_i sont appelés les *composantes irréductibles* de Y. (*Indication : considérer l'ensemble des Y qui n'ont pas de telle décomposition.*)

Exercice 5 Soit k un corps, on considère le fermé $Y \subset \mathbb{A}^3_k$ donné par $y^2 = xz$, $z^2 = y^3$.

(1) Décrire les composantes irréductibles de Y.

(2) Soit $f = y/x$ vu comme fonction regulière sur l'ouvert de Y donné par $x \neq 0$. Montrer que f ne se prolonge pas en une fonction regulière sur Y.

Exercice 6 Montrez les faits suivants. Si X est un espace topologique (non vide) séparé et irréductible, alors X est un point. Dans un espace topologique irréductible, les ouverts non vides sont denses (et en particulier se coupent). Un ouvert non vide d'un espace topologique irréductible est lui aussi irréductible. Si X est un espace topologique et $Y \subset X$ est une partie irréductible alors $\overline{Y}$ est aussi irréductible.

Exercice 7 Soit A un anneau et $X = \mathrm{Spec}(A)$. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X est connexe.

(ii) A n'est pas un anneau produit $A_1 \times A_2$ avec $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$.

(iii) A ne possède pas d'autres idempotents ($e \in A$ tel que $e^2 = e$) que $e = 0$ et $e = 1$.

(*Indication :* (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).)

Exercice 8 Soit $Y \subset \mathbb{A}^3_k$ le schéma donné par des équations $x^2 - yz = 0$ et $xz - x = 0$. Montrer que Y admet trois composantes irréductibles, trouver les idéaux premiers correspondants de $\mathcal{O}(Y)$. Montrer que Y est connexe.

Rappels sur la localisation

Théorème 9 *Soit A un anneau et $S \subset A$ une partie multiplicative, c'est-à-dire telle que $1 \in S$ et $x, y \in S \Rightarrow xy \in S$. Alors il existe un anneau noté $S^{-1}A$ (ou parfois A_S) et un morphisme $f\colon A \to S^{-1}A$, vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout morphisme d'anneaux $g\colon A \to B$ tel que $g(s)$ est inversible pour tout $s \in S$, il existe un unique morphisme $\widetilde{g}\colon S^{-1}A \to B$ tel que $g = \widetilde{g}f$.*

L'anneau $S^{-1}A$ est appelé *localisé de A par rapport à S*, ou l'*anneau de fractions* à dénominateurs dans S.

Exercice 10 (1) Démontrez ce théorème, en vous inspirant de la construction du corps de fractions d'un anneau intègre. Décrivez le noyau de $A \to S^{-1}A$.

(2) Décrivez les idéaux de $S^{-1}A$ à l'aide de ceux de A. Déduisez-en que si A est nœthérien, $S^{-1}A$ est nœthérien.

(3) Montrez que $\mathrm{Spec}(S^{-1}A) = \{p \in \mathrm{Spec}(A),\, p \cap S = \emptyset\}$.

Exercice 11 Donnez des exemples de parties multiplicatives et d'anneaux localisés, ainsi que leur interprétation géométrique.

Lemme de Nakayama et applications

Le théorème suivant et son corollaire portent le nom de *lemme de Nakayama*.

Théorème 12 *Soit A un anneau et $I \subset A$ un idéal. Soit M un A-module fini*[1]*. Si $M = IM$, alors il existe $a \in A$ avec $a \equiv 1 \mod I$, tel que $aM = 0$.*

Corollaire 13 *Soit A local d'idéal maximal m. Soit M un A-module fini. Si $M = mM$, alors $M = 0$.*

Soit $k = A/m$, la condition $M = mM$ s'écrit aussi $M \otimes_A k = 0$.

Exercice 14 Soit A un anneau et M un A-module fini. L'objet de cet exercice est de montrer que la fonction $d\colon \mathrm{Spec}(A) \to \mathbb{N}$ définie pour tout idéal premier $p \subset A$ par $d(p) = \dim_{k(p)}(M \otimes_A k(p))$, est semi-continue supérieurement [2].

Soit $p \in \mathrm{Spec}(A)$ et $n = d(p)$. On va produire un ouvert $U = D(f) \subset \mathrm{Spec}(A)$ contenant p et tel que $d_{|U} \leq n$. On fixe un isomorphisme $\varphi\colon k(p)^n \to M_p \otimes_{A_p} k(p)$ et un élément $f \notin p$, quelconque pour l'instant. Soit A_p l'anneau local en p et $M_p = M \otimes_A A_p$. On considère le diagramme ci-contre, dans lequel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les morphismes canoniques.

$$\begin{tikzcd}
A[\frac{1}{f}]^n \arrow[r, dotted, "\chi"] \arrow[d, "\alpha"] & M[\frac{1}{f}] \arrow[d, "\gamma"] \\
(A_p)^n \arrow[r, dotted, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & M_p \arrow[d, "\delta"] \\
k(p)^n \arrow[r, "\varphi"] & M \otimes k(p)
\end{tikzcd}$$

(1) Utilisez le lemme de Nakayama pour relever φ en une surjection de A_p-modules $\psi\colon (A_p)^n \to M_p$.

(2) Choisissez f pour que ψ se relève à son tour en un morphisme $\chi\colon A[\frac{1}{f}]^n \to M[\frac{1}{f}]$.

(3) Au besoin, modifiez f pour que χ soit surjectif. Concluez.

Exercice 15 Soit k un corps. Soit A_1 le localisé de $k[X_1, \ldots, X_n]$ en l'idéal premier engendré par un polynôme irréductible $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ (anneau local d'une hypersurface irréductible de $\mathbb{A}^n_k$). Soit $A_2 = k[[x]]$ l'anneau de séries formelles (voisinage analytique d'un point lisse dans une courbe). Soit A_3 le localisé de $\mathbb{Z}$ en l'idéal premier engendré par un nombre premier p.

Montrez que A_1, A_2, A_3 sont des *anneaux de valuation discrète* (un a.v.d. est un anneau local, nœthérien, intègre, et dont l'idéal maximal est principal). Quels sont les idéaux d'un a.v.d. ?

Exercice 16 Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel k. Construisez un A-module M qui n'est pas fini, et qui viole la conclusion du lemme de Nakayama. Dans votre exemple, a-t-on $M \otimes_A K = 0$? Peut-on avoir $M \otimes_A K = 0$?

---

[1] Pour les modules, on dit indifféremment *fini* ou *de type fini* ; ceci signifie que M peut être engendré par un nombre fini d'éléments.

[2] On rappelle que cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{p \in \mathrm{Spec}(A)\,;\, d(p) \geq n\}$ est fermé.