# Éclatements

Je vous recommande les sources suivantes :

- Hartshorne, chapitre II, fin du paragraphe 7 (définition de l'éclatement) et fin du paragraphe 8 (éclatement de sous-variétés lisses).
- Eisenbud et Harris, chapitre IV, paragraphe sur l'éclatement et en particulier la partie *Blow-ups along regular subschemes.*

Voici en quelques mots ce que Claire voulait que je vous explique pour vendredi matin.

**Définition de l'éclatement en un point.** Soit $k$ un corps et soit $X$ un $k$-schéma de type fini, intègre et de dimension $n$. Soit $x \in X$ un point lisse de $X$, ce qui veut dire que $\dim_k(m/m^2) = n$ où $m$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ ([1]). Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux de $x$ dans $X$. L'éclaté (blow-up) de $X$ en $x$ est le schéma Proj de l'algèbre graduée

$$\mathcal{S} := \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d \, .$$

muni canoniquement d'un morphisme $\pi \colon \widetilde{X} = \mathrm{Proj}(\mathcal{S}) \to X$ ([2]).

**Propriétés de l'éclatement.** Le morphisme $\pi \colon \widetilde{X} \to X$ est propre, surjectif, birationnel. C'est en fait un isomorphisme au-dessus de $U = X \setminus \{x\}$.

**Le diviseur exceptionnel.** Comme $x \in X$ est lisse, on peut montrer qu'il existe un voisinage affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de $x$ sur lequel $\mathcal{I}$ est un idéal engendré par $n$ éléments $f_1, \ldots, f_n$ qui forment une suite régulière. (La formation de $\widetilde{X} = \mathrm{Proj}(\mathcal{S})$ est locale sur $X$ donc on peut se restreindre à $U$ pour étudier les propriétés de $\widetilde{X}$ qui sont locales sur $X$.) Soit $E := \pi^1(x)$ que l'on appelle le *diviseur exceptionnel* ; c'est un diviseur et nous allons voir qu'il est en fait isomorphe à un espace projectif. Ceci est lié aux propriétés des suites régulières. Précisément, on a

$$E = \widetilde{X} \times_X \{x\} = U \times_X \{x\} = \mathrm{Proj}(S \otimes A/I) = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{d \geq 0} I^d/I^{d+1})$$

Posons $\mathrm{gr}_I(A) = \oplus I^d/I^{d+1}$. On a un morphisme $k[t_1, \ldots, t_n] \to \mathrm{gr}_I(A)$ qui envoie $t_k$ sur $f_k$ mis en degré 1. Un résultat d'algèbre commutative montre que lorsque $f_1, \ldots, f_n$ est une suite régulière, ceci est un isomorphisme. Il en découle que $E \simeq \mathrm{Proj}(k[t_1, \ldots, t_n]) \simeq \mathbb{P}^{n-1}$.

Pour finir observons que $\mathcal{O}(E)_{|E} \simeq \mathcal{O}_E(-1)$. En effet ce sont deux sous-faisceaux du faisceau constant défini par le corps de fonction de $E$. Le faisceau $\mathcal{O}(E)$ sur $\widetilde{X}$, faisceau des fonctions avec au plus des pôles d'ordre 1 le long de $E$, est engendré localement par $1/f_i$ par définition et donc sa restriction à $E$ est engendrée par l'image de $1/f_i$. Le faisceau $\mathcal{O}_E(-1)$ est engendré localement par $1/t_i$, qui correspond à $1/f_i$ via l'isomorphisme ci-dessus.

[1] On n'a pas besoin de tant d'hypothèses pour définir ces objets. La lissité est en revanche importante pour avoir les propriétés ci-dessous du diviseur exceptionnel.

[2] Un mot sur la notation : les algèbres du type $B_I(A) = \oplus_{d \geq 0} I^d$ sont appelées *algèbres de Rees*. Elles sont munies d'une graduation donnée par $B_I(A)_d = I^d$. Notez qu'il y a un risque de confusion entre les éléments de $I$ comme éléments de $I \subset A = B_I(A)_0$, et comme éléments de $I = B_I(A)_1$. Pour éviter ce problème je vous suggère de noter ces algèbres comme sous-algèbres de $A[t]$, c'est-à-dire $S = \oplus_{d \geq 0} I^d t^d \subset A[t]$. Dans le contexte de l'éclatement ci-dessus, cela revient à écrire $\mathcal{S} = \oplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d t^d \subset \mathcal{O}_X[t]$.