Notions de théorie des ensembles

Table des matières

1 Applications entre deux ensembles

Cette partie contient essentiellement des définitions et des rappels terminologiques.

1.1 Ensembles et sous-ensembles

Soient X et Y deux ensembles.

Le *produit cartésien de* X *et* Y est l'ensemble des *couples* (x, y) composées d'un élément $x \in X$ et d'un élément $y \in Y$, dans cet ordre. Il est noté $X \times Y$.

La *somme disjointe de* X *et* Y est l'ensemble des éléments qui appartient à X ou à Y. Elle est notée $X \amalg Y$.

On dit qu'un ensemble A est une *partie*, ou un *sous-ensemble*, de X si tout élément de A est un élément de X. On note alors $A \subset X$. L'ensemble des parties de X est noté $\mathcal{P}(X)$. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X. Leur *réunion* est l'ensemble des $x \in X$ tels qu'il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$; elle est notée $\cup_{i \in I} A_i$. Leur *intersection* est l'ensemble des $x \in X$ tels que pour tout $i \in I$, on a $x \in A_i$; elle est notée $\cap_{i \in I} A_i$.

1.2 Applications

Soient X, Y, Z trois ensembles.

Une *application de* X *dans* Y est une partie Γ du produit cartésien $X \times Y$ telle que pour tout $x \in X$, il existe un unique $y \in Y$ tel que $(x, y) \in \Gamma$. La plupart du temps, pour désigner une application, on utilise plutôt la notation $f : X \to Y$, et pour chaque $x \in X$, on note $f(x)$ l'unique élément $y \in Y$ tel que $(x, y) \in \Gamma$. On note Γ ou Γ_f la partie de $X \times Y$ proprement dite, et on l'appelle le *graphe de* f. Il faut cependant avoir conscience du fait que par définition, ces deux notations désignent en fait un et un seul objet. L'ensemble X est appelé la *source* de f et l'ensemble Y est appelé le *but* de f.

Une application est aussi parfois appelée une *fonction*, mais certains auteurs réservent le terme *fonction* au cas où le but Y est un ensemble de nombres, comme $\{0; 1\}$, ou l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, ou celui des complexes $\mathbb{C}$.

L'élément $y = f(x)$ est appelé l'*image de x par f* ; tout élément x tel que $y = f(x)$ est appelé un *antécédent de y* ; l'ensemble des antécédents de y est appelé la fibre de f en y et noté $f^{-1}(\{y\})$. Pour définir une application, on indique pour chaque élément $x \in X$ son image $y = f(x) \in Y$.

Voici deux exemples. On définit l'*identité* $\mathrm{id}_X : X \to X$ comme étant l'application qui à tout $x \in X$ associe x lui-même. Si A est une partie de X, on définit la *fonction indicatrice de A* comme la fonction notée $\mathbb{1}_A : X \to \{0; 1\}$ définie par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$, et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. On définit l'*application composée de f et g* comme l'application $h : X \to Z$ qui à tout $x \in X$ associe l'image par g de l'image $f(x)$. On la note $h = g \circ f$.

Soit $f : X \to Y$ une application. On dit que c'est une *injection* si pour tout $(x, x') \in X \times X$, la relation $x \neq x'$ implique $f(x) \neq f(x')$. On dit que c'est une *surjection* si pour tout $y \in Y$, il existe un $x \in X$ tel que $f(x) = y$. On dit que c'est une *bijection* si c'est une injection et une surjection.

Si $f : X \to Y$ est une bijection, alors il existe une unique application $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ et $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Cette application est appelée la *bijection réciproque de f* et notée f^{-1}.

1.3 Cardinalité

On dit que X et Y ont *même cardinal* s'il existe une bijection entre X et Y. On dit qu'un ensemble X est *fini* s'il existe un nombre entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection entre X et $\{1, \ldots, n\}$. On dit qu'un ensemble est *infini* s'il n'est pas fini. On dit qu'un ensemble est *dénombrable* s'il est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels (on se méfiera du fait que certains auteurs utilisent le terme *dénombrable* pour désigner les ensembles finis ou en bijection avec $\mathbb{N}$).

Les ensembles $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs) et $\mathbb{Q}$ (nombres rationnels) sont dénombrables. L'ensemble des parties *finies* de $\mathbb{N}$ est dénombrable, mais l'ensemble de toutes ses parties ne l'est pas, comme il résulte du résultat suivant :

1.4 Proposition. *Soit X un ensemble. Alors, il n'existe pas de bijection entre X et $\mathcal{P}(X)$.*

Preuve : Nous allons montrer qu'en fait, il n'existe pas de surjection $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Pour tout $x \in X$, l'image $f(x)$ est une partie de X, et cela a un sens de se demander si x est dedans ou non. Considérons la partie $A = \{x \in X, x \notin f(x)\}$ et montrons que A n'est pas dans l'image de f. En effet, s'il existait $a \in X$ tel que $f(a) = A$, on aurait soit $a \in A$, auquel cas par définition de A on trouve $a \notin f(a) = A$, contradiction, soit $a \notin A$, auquel cas par définition de A on trouve $a \in f(a) = A$, contradiction. $\square$

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable ; on peut montrer qu'il est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, qui est lui-même en bijection avec $\{0; 1\}^{\mathbb{N}}$.

2 Relations binaires sur un ensemble

2.1 Relations d'ordre et relations d'équivalence

Soit X un ensemble. Une *relation binaire* sur X est une partie R de $X \times X$. Si x, y sont des éléments de X, on note souvent xRy au lieu de $(x, y) \in R$, et on lit « *x est en relation avec y* ».

On dit que la relation binaire R est *réflexive* si pour tout $x \in X$, on a xRx. On dit que R est *symétrique* si pour tout $(x, y) \in X \times X$, on a $xRy \Rightarrow yRx$. On dit que R est *antisymétrique* si pour tout $(x, y) \in X \times X$, on a $(xRy \text{ et } yRx) \Rightarrow x = y$. On dit que R est *transitive* si pour tout $(x, y, z) \in X \times X \times X$, on a $(xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz$.

Une relation binaire R qui est réflexive, antisymétrique et transitive est appelée une *relation d'ordre*.

Une relation binaire R qui est réflexive, symétrique et transitive est appelée une *relation d'équivalence.* Si R est une relation d'équivalence sur X, alors pour tout $x \in X$, l'ensemble

$$\pi(x) = \{y \in X,\ xRy\}$$

est appelé la *classe d'équivalence de x pour R.* Si x, y sont des éléments de X, on a l'équivalence : xRy si et seulement si $\pi(x) = \pi(y)$. Les différentes classes d'équivalence pour R sont disjointes et recouvrent X ; en d'autres termes, elles forment une *partition de X*. Réciproquement, si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de X, alors la relation R définie par « xRy si et seulement si x et y appartiennent à la même partie A_i » est une relation d'équivalence sur X dont les classes sont les A_i.

2.2 Quotient par une relation d'équivalence

Soit X un ensemble et soit R une relation d'équivalence sur X. On note X/R l'ensemble des classes d'équivalence de X pour R, aussi appelé le *quotient de X par R*. On note $\pi : X \to X/R$ l'application qui à x associe sa classe $\pi(x)$. Cette application est surjective, par définition de X/R. Pour tout élément $y = \pi(x)$ de l'ensemble X/R, la fibre $\pi^{-1}(\{y\})$, ensemble des antécédents de y par π, est égale à la classe $\pi(x)$.

Soient X, Y deux ensembles, R une relation d'équivalence sur X, et $f : X \to Y$ une application. On dit que *f est constante sur les classes d'équivalence*, ou que *f est invariante par la relation d'équivalence*, si pour tout $(x, x') \in X \times X$ on a : $xRx' \Rightarrow f(x) = f(x')$.

Théorème (passage au quotient par une relation d'équivalence). *Soit X un ensemble, R une relation d'équivalence sur X et $\pi : X \to X/R$ l'application quotient. Alors pour toute application $f : X \to Y$ constante sur les classes d'équivalence, il existe une unique application $\widetilde{f} : X/R \to Y$ telle que $f = \widetilde{f} \circ \pi$.*

Preuve : Soit $f : X \to Y$ constante sur les classes d'équivalence. Montrons en même temps que l'application $\widetilde{f} : X/R \to Y$ telle que $f = \widetilde{f} \circ \pi$ existe et qu'elle est unique. Soit $a \in X/R$, qui par définition de X/R est égal à la classe d'équivalence $\pi(x)$ d'un $x \in X$. Comme par hypothèse f est constante sur les classes, si $\pi(x) = \pi(x')$ alors $f(x) = f(x')$. Ceci montre que cette valeur ne dépend pas du choix de x dans sa classe d'équivalence ; en d'autres termes, cette valeur ne dépend que de la classe $a = \pi(x)$, si bien qu'on peut définir un élément $\widetilde{f}(a) \in Y$ par $\widetilde{f}(a) = f(x)$, pour $a = \pi(x)$. On définit ainsi une application $\widetilde{f} : X/R \to Y$ qui vérifie $\widetilde{f}(\pi(x)) = f(x)$. Cette formule montre aussi que $\widetilde{f}$ *doit* être définie ainsi, donc est unique. □

Dans la situation du théorème, on dit que l'application f *passe au quotient* en une application $\widetilde{f}$, ou qu'elle *se factorise par X/R*. On notera que la construction de $\widetilde{f}$ dans la preuve du théorème montre que l'image de $\widetilde{f}$ est égale à l'image de f.

Théorème (décomposition canonique d'une application). *Soit $f : X \to Y$ une application, et $Z = f(X) \subset Y$ son image. Alors, la relation R définie par*

$$\text{« } xRx' \text{ si et seulement si } f(x) = f(x') \text{ »}$$

est une relation d'équivalence sur X, et l'application f induit une bijection $\overline{f} : X/R \to Z$. La factorisation de f en

$$X \xrightarrow{\text{surj}} X/R \xrightarrow{\overline{f}} Z \xhookrightarrow{\text{inj}} Y$$

est appelée la décomposition canonique *de f.*

Preuve : Le fait que la relation définie dans l'énoncé est une relation d'équivalence est un exercice facile. Par construction, l'application $f : X \to Z \subset Y$ est alors constante sur les classes d'équivalence, donc d'après le théorème précédent, elle passe au quotient en une application $\overline{f} : X/R \to Z$. On vérifie que $\overline{f}$ est surjective et injective. $\square$

3 Le principe de récurrence

L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers possède une propriété fondamentale appelée la propriété de *bon ordre*, qui est équivalente au *principe de récurrence*. Ces propriétés sont des axiomes de la construction des nombres entiers, et ne se démontrent donc pas ; en revanche, nous démontrerons qu'elles sont équivalentes. Énonçons-les :

Proposition (bon ordre) *Tout ensemble non vide d'entiers naturels contient un entier inférieur ou égal à tous les autres.*

Proposition (principe de récurrence) *Soit $n_0 \geqslant 0$ un entier. Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un nombre entier $n \geqslant n_0$. Supposons que*

(i) *$P(n_0)$ est vraie (P est initialisée), et*

(ii) *$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geqslant n_0$ (P est héréditaire).*

Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Montrons que ces deux propositions sont en faites équivalentes.

Prouvons d'abord que la propriété de bon ordre implique le principe de récurrence. On se donne un entier n_0 et une propriété $P(n)$ vraie pour $n = n_0$ et héréditaire. On considère l'ensemble des entiers tels que P n'est pas vraie, i.e. $A := \{ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \text{ et } P(n) \text{ n'est pas vraie} \}$. Si A est non vide alors il a un plus petit élément m d'après la propriété de bon ordre. Cela veut dire que $P(m)$ n'est pas vraie (en particulier $m \geqslant n_0 + 1$ puisque $P(n_0)$ est vraie) et $P(m-1)$ n'est pas vraie. Or, ceci contredit le fait que P est héréditaire. Donc A est vide, c'est-à-dire, $P(n)$ est vraie pour tous les entiers $n \geqslant n_0$.

Prouvons maintenant que le principe de récurrence implique la propriété de bon ordre. Il suffit de montrer que si une partie $A \subset \mathbb{N}$ n'a pas de plus petit élément, alors elle est vide. On peut démontrer cela par récurrence : on va montrer pour tout $n \geqslant 0$, la propriété $P(n)$: « pour tout $i \leqslant n$, $i \notin A$ ». Pour $n = 0$ c'est vrai, car si $0 \in A$ c'est son plus petit élément de toute évidence. Supposons $P(n)$ vraie, alors il suffit de montrer que $n+1 \notin A$ pour avoir $P(n+1)$. Or cela est clair, car sinon $n+1$ serait le plus petit élément de A.