Mercredi 7 septembre 2011

Notions de théorie des ensembles

Exercice 1 Écrire la négation de l'énoncé : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$.

Exercice 2 Le lemme du buveur. Montrer que dans un bar, il existe toujours une personne telle que si cette personne boit, tous les clients du bar boivent.

Exercice 3 Soit E un ensemble, et A et B deux sous-ensembles de E. Montrer qu'on a les égalités suivantes:

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$.

Exercice 4 Soit E un ensemble, et A, B et C trois sous-ensembles de E tels que

$$A \cup B = A \cap C, \quad B \cup C = B \cap A, \quad C \cup A = C \cap B.$$

Montrer que $A = B = C$.

Exercice 5 Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction. Montrer que l'assertion $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ n'est pas toujours vraie.

Exercice 6 Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

1. Montrer que f est injective si et seulement si pour tout sous-ensemble A de E, on a $A = f^{-1}(f(A))$;
2. Montrer que f est surjective si et seulement si pour tout sous-ensemble B de F, on a $B = f(f^{-1}(B))$;

Exercice 7 Soit E un ensemble, et A et B deux sous-ensembles de E. Montrer qu'on a les égalités suivantes:

1. $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$;
2. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.

Exercice 8 Soit E un ensemble. Déterminer les ensembles $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{P}(E)} A$ et $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{P}(E)} A$.

Exercice 9 Montrer que pour tout ensemble E, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est en bijection avec l'ensemble $\{0,1\}^E$. En déduire que si E est fini, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$, et que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a le même cardinal que $\mathbb{R}$.

Exercice 10 Soit E un ensemble et A, B des parties. On considère la fonction indicatrice d'une partie A comme une fonction $\mathbb{1}_A : E \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est l'anneau à deux éléments, contenant un élément neutre pour l'addition noté 0 et un neutre pour la multiplication noté 1. Si A et B sont deux parties d'un ensemble E, on note $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ l'ensemble des $x \in X$ qui sont dans A, ou dans B, mais pas dans les deux, appelé la *différence symétrique de A et B*. Montrer que $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Exercice 11 Soit E un ensemble. Montrer que la relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$. Cet ordre est-il total?

Exercice 12 Montrer que la relation définie par $zRz' \iff |z| = |z'|$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$, et déterminer l'espace quotient.

Exercice 13 On considère sur $\mathbb{R}$ la relation binaire définie par :

$$xRy \iff xe^y = ye^x.$$

Montrer que R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$, et déterminer le nombre d'éléments dans la classe d'équivalence d'un réel x quelconque.

Exercice 14 Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal n. Montrer que l'ensemble des bijections de E dans F est de cardinal $n!$.

Exercice 15 Trouver une propriété héréditaire sur $\mathbb{N}$, mais vérifiée par aucun élément de $\mathbb{N}$.

Exercice 16 Montrer que tout partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Exercice 17 Montrer que $(\mathbb{Q}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné.

Exercice 18 On appelle *préordre* une relation binaire réflexive et transitive. Soit X un ensemble et $\leq$ un préordre sur X. Montrez que la relation R définie par « xRy si et seulement si ($x \leq y$ et $y \leq x$) » est une relation d'équivalence. Montrez que la relation $\leq$ induit une relation d'ordre sur l'ensemble quotient X/R.