(1) Dans un espace vectoriel, donnez la définition d'une famille libre ; d'une famille génératrice ; du rang d'une famille de vecteurs.

0,5 pt
0,5 pt
1 pt

Soit $\{e_i\}_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Cette famille est dite libre lorsque pour toute partie $\{i_1,\ldots,i_n\}\subset I$ et tous scalaires $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ on a : $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k}=0$ implique $\lambda_1,\ldots,\lambda_n=0$. Cette famille est dite génératrice lorsque pour tout vecteur $x\in E$ il existe une partie $\{i_1,\ldots,i_n\}\subset I$ et des scalaires $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tels que $x=\sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k}$. Le rang de cette famille est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre. N.B. Les personnes qui ont supposé que la famille était une famille finie $\{e_1,\ldots,e_n\}$ n'ont pas été pénalisées.

(2) Soit H l'hyperplan d'équation $3x+5y+7z=0$ dans $\mathbb{R}^3$.
a) Trouvez une application linéaire $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dont H est le noyau.
b) Trouvez une application linéaire $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ dont H est l'image.

1 pt

a) L'énoncé nous donne l'hyperplan H comme noyau de la forme linéaire $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ telle que $f(x,y,z)=3x+5y+7z$, donc il contient la réponse à cette première question.

1 pt

b) Un vecteur (x,y,z) est dans H si et seulement si $z=-(3/7)x-(5/7)y$. Ceci montre que H est l'image de l'application linéaire $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ définie par $g(x,y)=(x,y,-(3/7)x-(5/7)y)$.

(3) Soit $0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$ une subdivision de $[0;1]$ et F l'ensemble des applications continues $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque intervalle $[x_i;x_{i+1}]$ est affine. Montrez que F est un espace vectoriel réel de dimension finie et donnez-en une base.

2 pts

Il suffit de montrer que F est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. D'abord, F contient la fonction nulle. Ensuite, soient f,g deux fonctions dans F et λ,μ deux nombres réels. Alors la fonction $\lambda f+\mu g$ est continue comme somme des fonctions continues λf et μg. De plus, sur chaque intervalle $[x_i;x_{i+1}]$ les fonctions f et g sont affines, donc $\lambda f+\mu g$ est affine. Ceci montre que $\lambda f+\mu g\in F$. Ceci conclut.

2 pts

Montrons maintenant que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n+1$. Considérons l'application $u:F\to\mathbb{R}^{n+1}$ qui envoie f sur le uplet $(f(x_0),f(x_1),\ldots,f(x_n))$. C'est une application linéaire. De plus, sur chaque intervalle $[x_i;x_{i+1}]$, une fonction $f\in F$ est affine et est donc déterminée par ses valeurs en x_i et x_{i+1}. Ceci montre que u est bijective.

2 pts

Donnons enfin une base explicite de F. L'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ est muni de sa base canonique $\{e_0,\ldots,e_n\}$ où e_i est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf la i-ième qui vaut 1. Pour avoir une base de F, il suffit de prendre les préimages des e_i par u. Or par définition de u, la fonction $\epsilon_i=u^{-1}(e_i)$ est celle qui vaut 0 en tous les x_j avec $j\neq i$ et qui vaut 1 en x_i. Si $i\in\{1,\ldots,n-1\}$ c'est la fonction qui est nulle hors de $[x_{i-1};x_{i+1}]$ et qui fait une « dent » de hauteur 1 en x_i. Si $i=0$ ou $i=n$, c'est une fonction qui fait une « demi-dent » en l'une des deux extrémités de $[0;1]$. Il résulte de ce qui précède que $\{\epsilon_0,\ldots,\epsilon_n\}$ est une base de F. De plus, l'écriture d'une fonction $f\in F$ sur cette base est $f=f(x_0)\epsilon_0+\cdots+f(x_n)\epsilon_n$, en effet, le membre de gauche et le membre de droite de cette égalité sont des fonctions de F qui valent $f(x_i)$ en chaque x_i donc elles sont égales.