Devoir à la maison

À rendre pour le 25 octobre

Les copies faites à plusieurs ne seront pas acceptées.

On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, un entier $n \geqslant 2$, et une application linéaire $\sigma : E \to E$ telle que $\sigma^n = \mathrm{Id}$. On note ζ la racine primitive n-ième de l'unité $\exp(2i\pi/n)$.

1. Soient i, j deux entiers compris entre 0 et $n-1$. Calculez la valeur de la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \zeta^{ik}\zeta^{-jk}$.

Si $i \neq j$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \zeta^{ik}\zeta^{-jk} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (\zeta^{i-j})^k = \frac{(\zeta^{i-j})^n-1}{\zeta^{i-j}-1} = 0$. Si $i = j$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \zeta^{ik}\zeta^{-jk} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 1 = n$. En résumé, la somme de l'énoncé vaut $n\delta_{i,j}$.

2. On note A la matrice carrée de taille n dont le coefficient $a_{i,j}$ est égal à ζ^{-ij}, pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$ et $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Montrez que A est inversible en calculant son inverse.

En préliminaire, notons qu'indicer les matrices par les entiers de 1 à n ou les entiers de 0 à $n-1$ ne change rien. Passons à la question proprement dite. Notons B la matrice dont le coefficient $b_{i,j}$ est égal à $\frac{1}{n}\zeta^{ij}$. Le coefficient d'indice (i,j) du produit BA est $(1/n)\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{ik}\zeta^{-kj}$. D'après le résultat de la question 1, on a donc $BA = \mathrm{Id}$. Ainsi A est inversible d'inverse B.

3. Proposez une autre manière de montrer que A est inversible en utilisant un calcul de déterminant classique.

Étant donnés n nombres complexes $x_1, \dots, x_n$, on sait que la matrice de Vandermonde dont le coefficient d'indice (i,j) est $(x_i)^j$ a pour déterminant $\prod_{j>i}(x_j - x_i)$. En appliquant ce fait aux nombres complexes tous distincts $1, \zeta^{-1}, \zeta^{-2}, \dots, \zeta^{-(n-1)}$, on voit que la matrice A est un cas particulier de matrice de Vandermonde et que son déterminant est le produit des $\zeta^{-j} - \zeta^{-i}$ pour $j > i$, qui est non nul, ce qui montre qu'elle est inversible.

Commentaire : l'expression du déterminant de Vandermonde ne peut pas être exigée de vous au concours du Capes, mais ici elle était supposée connue puisqu'elle a été traitée en cours. Ceci étant dit, il est toujours bon d'avoir une idée sur cette expression et/ou de savoir la retrouver.

4. Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on note $p_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \zeta^{-ik}\sigma^i$. Justifiez que c'est une application linéaire de E dans E.

C'est une combinaison linéaire d'applications linéaires de E dans E.

5. Soit E_k le sous-espace propre de σ relatif à la valeur propre ζ^k. Montrez que l'image de p_k est incluse dans E_k.

Pour tout vecteur $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
\sigma(p_k(x)) &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-ik}\sigma^{i+1} \quad \textit{par linéarité de } \sigma, \\
&= \zeta^k \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \zeta^{-jk}\sigma^{j} \quad \textit{en posant } j = i+1, \\
&= \zeta^k \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \zeta^{-jk}\sigma^{j} \quad \textit{compte tenu du fait que } \sigma^n = \mathrm{Id}_E, \\
&= \zeta^k p_k(x).
\end{aligned}$$

Ceci signifie bien que $p_k(x) \in E_k$.

6. Soient k, l deux entiers compris entre 0 et $n-1$. Calculez $p_k \circ p_l$.

Soit $x \in E$. Comme $p_l(x) \in E_l$ d'après la question précédente, on a $\sigma(p_l(x)) = \zeta^l p_l(x)$, et par récurrence $\sigma^i(p_l(x)) = \zeta^{il} p_l(x)$ pour tout $i \geqslant 1$. On en déduit que

$$(p_k \circ p_l)(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-ik}\zeta^{il} p_l(x) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-ik}\zeta^{il}\right) p_l(x).$$

D'après la question 1, ceci vaut 0 si $k \neq l$ et $p_l(x)$ si $k = l$. En conclusion $p_k \circ p_l = 0$ si $k \neq l$ et $(p_k)^2 = p_k$.

7. Montrez que $p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-1} = \mathrm{Id}$. Déduisez-en que E est somme directe des sous-espaces propres E_k, puis que p_k est le projecteur sur E_k associé à la décomposition de E en sous-espaces propres.

Pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
p_0(x) + p_1(x) + \cdots + p_{n-1}(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-ik}\sigma^i(x) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^{-ik}\right)\sigma^i(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{i,0}\sigma^i(x) \quad \textit{d'après la question 1 avec } j = 0 \\
&= \sigma_0(x) = x.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-1} = \mathrm{Id}$. *On sait que les* E_k *sont en somme directe, comme toute famille de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes. De plus, par ce qui précède, si* $x \in E$ *on a* $x = p_0(x) + p_1(x) + \cdots + p_{n-1}(x) \in E_0 \oplus E_1 \oplus \ldots E_{n-1}$. *Ceci montre que la somme directe des* E_k *est égale à* E. *Enfin, le fait que* p_k *est le projecteur sur* E_k *associé à la décomposition de* E *en sous-espaces propres est exactement ce que dit l'écriture* $x = p_0(x) + p_1(x) + \cdots + p_{n-1}(x)$.

8. Pour chaque k, on choisit des vecteurs $e_{k,i}$ formant une base de E_k, avec $i \in \{1, \ldots, \dim(E_k)\}$. La famille $\mathcal{B} = \{e_{k,i}\}$ avec k et i variables forme une base de E. Rappelez la définition de l'application duale $\sigma^* : E^* \to E^*$, de la base duale $\mathcal{B}^* = \{e_{k,i}^*\}$, et montrez que $e_{k,i}^*$ est un vecteur propre pour σ^* relatif à la valeur propre ζ^k.

L'application duale σ^* *est définie par* $\sigma^*(\varphi) = \varphi \circ \sigma$, *pour toute forme* $\varphi \in E^*$. *La base duale* $\mathcal{B}^* = \{e_{k,i}^*\}$ *de* $\mathcal{B} = \{e_{k,i}\}$ *est l'unique base de* E^* *telle que* $e_{k,i}^*(e_{l,j}) = 1$ *si* $(k,i) = (l,j)$, *et* $e_{k,i}^*(e_{l,j}) = 0$ *sinon. Nous devons ensuite vérifier qu'on a l'égalité* $\sigma^*(e_{k,i}^*) = \zeta^k e_{k,i}^*$ *entre formes linéaires sur* E. *Soit* $x \in E$ *un vecteur ; on peut l'écrire sur la base* $\mathcal{B}$ *sous la forme* $x = \sum \lambda_{l,j} e_{l,j}$ *avec* $\lambda_{l,j} \in \mathbb{C}$. *On trouve :*

$$\begin{aligned}
\sigma^*(e_{k,i}^*)(x) &= e_{k,i}^*(\sigma(x)) \quad \textit{par définition de } \sigma^*, \\
&= e_{k,i}^*\left(\sum \lambda_{l,j}\sigma(e_{l,j})\right) \\
&= e_{k,i}^*\left(\sum \lambda_{l,j}\zeta^l e_{l,j}\right) \quad \textit{car } e_{l,j} \textit{ est vecteur propre pour } \sigma \textit{ associé à } \zeta^l, \\
&= \lambda_{k,i}\zeta^k \quad \textit{par définition de } e_{k,i}^*, \\
&= \zeta^k e_{k,i}^*(x) \quad \textit{par définition de } e_{k,i}^* \textit{ encore.}
\end{aligned}$$

Ceci démontre l'égalité annoncée.

9. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :
   a) $\dim_{\mathbb{C}}(E) = n$ et le polynôme minimal de σ est $X^n - 1$,
   b) les espaces propres E_k sont des droites.

b) $\Rightarrow$ *a). Si les* E_k *sont des droites, comme leur somme directe est* E, *on a* $\dim_{\mathbb{C}}(E) = \sum \dim_{\mathbb{C}}(E_k) = n$. *De plus, comme* $E_k \neq 0$, *chaque puissance* ζ^k *est valeur propre, donc* $X - \zeta^k$ *divise le polynôme minimal* μ_σ *de* σ. *Comme pour* k *variable ces polynômes sont premiers entre eux, alors leur produit, qui est* $X^n - 1$, *divise* μ_σ. *Mais par ailleurs* μ_σ *divise* $X^n - 1$ *puisque* $\sigma^n = \mathrm{Id}$. *Finalement* $\mu_\sigma = X^n - 1$.
a) $\Rightarrow$ *b). Montrons d'abord que* $E_k \neq 0$. *En effet, si* $E_k = 0$ *alors le projecteur* p_k *sur* E_k *est nul, ce qui fournit* $\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-ik}\sigma^i = 0$. *Dans ce cas, le polynôme* $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-ik} X^i$ *est un polynôme de degré* $n-1$ *qui annule* σ. *Ceci est contradictoire avec l'hypothèse que le polynôme minimal de* σ *est* $X^n - 1$, *donc* $E_k \neq 0$. *Il en découle que* $\dim(E_k) \geqslant 1$. *Comme la somme de ces* n *sous-espaces, c'est-à-dire* E, *est de dimension* n, *alors ces sous-espaces sont en fait de dimension* 1, *i.e. des droites.*

10. On considère maintenant l'exemple où E est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polyômes à coefficients complexes de degré $\leqslant n-1$, et où σ est l'endomorphisme qui envoie un polynôme $P(X)$ sur le polynôme $P(\zeta X)$. Vérifiez que $\sigma^n = \mathrm{Id}$, que le polynôme minimal de σ est $X^n - 1$, et trouvez une base de vecteurs propres pour σ.

Pour tout $i \geqslant 1$, l'endomorphisme σ^i envoie $P(X)$ sur $P(\zeta^i X)$, ce qui pour $i = n$ montre que $\sigma^n = \mathrm{Id}$. On peut maintenant observer que pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, le polynôme $e_k = X^k$ est un vecteur propre pour ζ^k puisque $\sigma(e_k) = (\zeta X)^k = \zeta^k X^k = \zeta^k e_k$. Comme ces polynômes sont en nombre n, ils forment une base de vecteurs propres. Ceci montre que l'espace propre E_k est réduit à la droite engendrée par e_k. D'après l'implication b) $\Rightarrow$ a) de la question 9, le polynôme minimal de σ est $X^n - 1$.