Algèbre Linéaire

Exercice 1 Soit k un corps. Pour tout entier n, on note I_n la matrice identité de taille n.

(1) On appelle *commutant* d'une matrice carrée $M \in \mathrm{M}_n(k)$ l'ensemble des matrices N qui commutent avec M, c'est-à-dire telles que $MN = NM$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des éléments distincts de k et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des entiers au moins égaux à 1. Calculez le commutant de la matrice diagonale

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \mathrm{I}_{\alpha_r} \end{pmatrix}.$$

(*Commencez par regarder les cas $r = 1$ et $r = 2$.*)

(2) Soit $M \in \mathrm{M}_n(k)$ une matrice diagonalisable. Montrez que l'ensemble des matrices P qui diagonalisent M est un produit de groupes linéaires $\mathrm{GL}_{\alpha_1}(k) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{\alpha_r}(k)$.

Exercice 2 Soit $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n. On fixe deux polynômes P et Q de degrés respectifs p et q.

(1) On considère l'application $r : \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X] \to \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$ définie par $r(U, V) = UP + VQ$. Montrez que c'est une application linéaire, et qu'elle est bijective si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.

(2) Notons $P = a_0 X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p$ et $Q = b_0 X^q + b_1 X^{q-1} + \cdots + b_q$. On appelle *résultant de P et Q*, et l'on note $\mathrm{Res}(P, Q)$, le déterminant de la matrice carrée de taille $p + q$:

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ a_p & * & a_0 & b_q & * & b_0 \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_p & & & b_q \end{pmatrix}$$

où les q premières colonnes contiennent les a_i et les p dernières contiennent les b_i. En utilisant la question (1), montrez que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si $\mathrm{Res}(P, Q) \neq 0$.

(3) Application : donnez une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que le polynôme du second degré $aX^2 + bX + c$, avec $a \neq 0$, n'ait pas de racine double. Faites la même chose pour le polynôme de degré trois $X^3 + pX + q$.