Algèbre Linéaire

Exercice 1 Soient k un corps, E un espace vectoriel de dimension finie sur k. Soit f un endomorphisme linéaire de E et μ son polynôme minimal. Soient $F_1, \dots, F_r$ les sous-espaces caractéristiques de f, f_i la restriction de f à F_i et μ_i son polynôme minimal. On suppose que μ est scindé.

(1) Montrez que μ_i est scindé, pour tout i.

(2) Montrez que μ_i et μ_j sont premiers entre eux si $i \neq j$.

(3) Montrez que $\mu = \mu_1 \dots \mu_r$.

Exercice 2 Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k et $f : E \to E$ un endomorphisme. On note χ_f et μ_f les polynômes caractéristique et minimal de f.

(1) Montrez que pour tout $u \in \mathrm{GL}(E)$, on a $\mu_{ufu^{-1}} = \mu_f$ et $\chi_{ufu^{-1}} = \chi_f$.

(2) Soient $\alpha \in k$ et $g = f - \alpha\,\mathrm{Id}$. Montrez que $\chi_g(X) = \chi_f(X + \alpha)$ et $\mu_g(X) = \mu_f(X + \alpha)$.

Exercice 3 Soient a, b, c, d des éléments d'un corps k et $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(k)$.

(1) Calculez les polynômes caractéristique χ_M et minimal μ_M de M.

(2) Dites à quelles conditions sur a, b, c, d cette matrice est nilpotente ; diagonalisable ; trigonalisable ; une matrice de projecteur.

(3) On suppose que $k = \mathbb{R}$ et on munit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}_2[X] \simeq \mathbb{R}^3$ de leurs topologies usuelles. Montrez que la fonction $\chi : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[X]$ est continue et que la fonction $\mu : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[X]$ ne l'est pas.

Exercice 4 Soit k un corps et $(a, b, c, d, e) \in k^5$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculez son polynôme caractéristique et son polynôme minimal. Donnez ses sous-espaces caractéristiques et la diagonalisation par blocs associée. Dites quand elle est diagonalisable.

Exercice 5 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + \mathrm{Id}$. Montrer que $\det(A) > 0$.