# Algèbre Linéaire

**Exercice 1** Effectuez la division euclidienne de $X^3 + 2X^2 + 3$ par $X^2 - X - 1$.

**Exercice 2** La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Si oui, diagonalisez-la puis calculez sa puissance $n$-ième.

**Exercice 3** Montrez qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie $n$ est nilpotent si et seulement si son polynôme caractéristique est égal à $X^n$.

**Exercice 4** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, $f$ un endomorphisme de $E$, $\chi$ son polynôme caractéristique, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de $f$. Pour chaque $i$, on note $\alpha_i$ la multiplicité de $\lambda_i$ dans $\chi$ et on appelle *sous-espace caractéristique associé à la valeur propre* $\lambda_i$ le sous-espace $F_i = \ker((f - \lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i})$. On note enfin $f_i : F_i \to F_i$ la restriction de $f$ à $F_i$ et $\chi_i$ son polynôme caractéristique.

(1) Montrez que $F_i$ contient le sous-espace propre de $f$ associé à $\lambda_i$.

(2) Montrez que $f_i$ est diagonalisable si et seulement si c'est une homothétie.

(3) Montrez que $\chi = \chi_1 \dots \chi_r$.

(4) Montrez que pour tout $\beta \geq \alpha_i$, on a $F_i = \ker((f - \lambda_i \operatorname{Id})^{\beta})$.

*(1) Notons $E_i$ le sous-espace propre associé à $\lambda_i$. Si $x \in E_i$, c.à.d. $f(x) = \lambda_i x$, alors $(f - \lambda_i \operatorname{Id})(x) = 0$ donc $(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{\alpha_i}(x) = 0$ et $x \in F_i$.*

*(2) On peut noter que puisque $F_i$ est le noyau d'un polynôme en $f$, il est $f$-stable et cela a un sens de parler de la restriction $f_i : F_i \to F_i$. Par ailleurs, $f_i - \lambda_i$ est nilpotent, donc sa seule valeur propre est $0$. Comme $\operatorname{Sp}(f - \mu \operatorname{Id})$ est le translaté de $\operatorname{Sp}(f)$ par $\mu$, on en déduit que la seule valeur propre de $f_i$ est $\lambda_i$. Alors si $f_i$ est diagonalisable, il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale, avec $\lambda_i$ partout sur la diagonale. Ceci signifie que $f_i$ est une homothétie, notion qui ne dépend pas de la base. La réciproque est évidente.*

*(3) D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\ker(\chi(f)) = E$. Utilisant le lemme des noyaux, on en déduit que $E$ est somme directe des $F_i$. En prenant une base adaptée à cette décomposition en somme directe, c.a.d. la réunion de bases des $F_i$, on écrit la matrice de $f$ comme une matrice diagonale par blocs, ou les blocs sont les matrices des $f_i$. Comme le déterminant d'une matrice diagonale par blocs (en fait, triangulaire suffit) est le produit des déterminants des blocs diagonaux, on trouve $\chi = \chi_1 \dots \chi_r$.*

*(4) Notons $g = (f - \lambda_i \operatorname{Id})^{\beta}$. Pour $\beta \geq \alpha_i$, il est clair que $F_i \subset \ker(g)$. Réciproquement, soit $x \in \ker(g)$. Écrivons $x = x_1 + \dots + x_r$ avec $x_i \in F_i$. En appliquant $g$, on trouve $0 = g(x_1) + \dots + g(x_r)$. Comme $g(x_j) \in F_j$ pour tout $j$ et que les $F_j$ sont en somme directe, on trouve $g(x_j) = 0$ pour tout $j$. Fixons maintenant un $j \neq i$. Comme $\operatorname{Sp}(f_j - \lambda_i \operatorname{Id}) = \{\lambda_j - \lambda_i\}$,*

*alors $f_j - \lambda_i$ est inversible. En prenant la puissance $\beta$-ième, il s'ensuit que $g|_{F_j}$ est inversible, donc $g(x_j) = 0$ implique $x_j = 0$. Finalement $x = x_i \in F_i$.*

**Exercice 5** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice de coefficients $a_{i,j} = \delta_{|i-j|,1}$. Pour tout réel $\theta$, calculez $D_n = \det(A + 2\cos\theta\,\mathrm{Id}_n)$. Déduisez-en le spectre de $A$ ; est-elle diagonalisable ?

**Exercice 6** Soient $k$ un corps et $P = X^n + a_{n-1}X^{m-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme unitaire de degré $n$. Calculez le polynôme caractéristique de la matrice :

$$A_P = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

où les cases non remplies contiennent des 0.

**Exercice 7** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $k$ et $f$ un endomorphisme de $E$. Montrez, sans invoquer le théorème de Cayley-Hamilton, qu'il existe un polynôme $P \in k[X]$ non nul tel que $P(f) = 0$. Montrez que toutes les valeurs propres de $f$ sont racines de $P$.