Algèbre Linéaire

Exercice 1 On considère le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\{\overrightarrow{\imath} = e_1, \overrightarrow{\jmath} = e_2\}$.

(1) Pour tout nombre réel θ, donnez la matrice de la rotation d'angle θ dans la base canonique.
(2) Pour tout nombre réel a, donnez la matrice de la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = ax$ dans la base canonique. Donnez ensuite une base dans laquelle la matrice de cette réflexion est plus simple.
(3) La grande aiguille est sur 1h, elle dirige une droite D_1. La petite aiguille est sur 11h, elle dirige une droite D_2. Donnez la matrice de la projection sur D_1 parallèlement à D_2.

Exercice 2 Trouvez le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Calculez le rang de la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 4 \\ -1 & 4 & \lambda \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Le cas échéant, donnez une relation de dépendance linéaire entre les lignes.

Exercice 4 Soient k un corps, $A \in M_{3,2}(k)$, $B \in M_{2,2}(k)$, $C \in M_{2,3}(k)$ telles que

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouvez x.

Exercice 5 Soit K un corps et $M \in M_n(K)$. Montrez que M est de rang 1 si et seulement s'il existe une matrice colonne C et une matrice ligne L telles que $M = CL$.

Exercice 6 Soit A une matrice carrée de taille n, à coefficients dans un corps K, de rang 1. Montrez que A est une matrice de projection si et seulement si $\mathrm{tr}(A) = 1$.

Exercice 7 Soient K un corps de caractéristique nulle, $E = K_n[X]$ le K-espace vectoriel des polynômes de degré au plus n, $\mathcal{F} = \{f_0, \dots, f_n\}$ une famille de formes linéaires sur E. Dans les deux cas suivants, montrez que $\mathcal{F}$ est une base de E^* et donnez la base duale :

(1) $f_i(P) = P(x_i)$, où $x_0, \dots, x_n$ sont des scalaires distincts.
(2) $f_i(P) = P^{(i)}(0)$.

Exercice 8 Soient K un corps de caractéristique nulle et $E = K_n[X]$ le K-espace vectoriel des polynômes de degré au plus n. On considère les formes linéaires $f_i : P \mapsto P'(i)$. Montrez que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est liée.

Exercice 9 Soit $E = M_n(k)$ l'espace des matrices carrées de taille n. Montrez que toute forme linéaire sur E est de la forme $f_A : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$ pour une matrice $A \in E$. (Indication : utilisez l'application $A \mapsto f_A$.)