Jeudi 4 novembre 2010

Réduction des endomorphismes

Exercice 1 Soient k un corps et $P = X^n + a_{n-1}X^{m-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme unitaire de degré n. Calculez le polynôme caractéristique de la matrice :

$$A_P = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

où des 0 garnissent les cases non remplies.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k et $f \in L(E)$. Montrer que pour tout endomorphisme inversible $u \in \mathrm{GL}(E)$, on a $\mu_{ufu^{-1}} = \mu_f$ et $\chi_{ufu^{-1}} = \chi_f$.

Exercice 3 Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. On veut montrer que son polynôme minimal μ et son polynôme caractéristique χ ont les mêmes racines.

(1) Soit $\lambda \in k$ une racine de μ. Notons $\mu(X) = (X - \lambda)^\alpha \nu(X)$ avec $\nu(\lambda) \neq 0$, et $F = \ker(f - \lambda\,\mathrm{Id})^\alpha$. En utilisant le lemme des noyaux, montrez que $F \neq 0$. Montrez que la restriction de $f - \lambda\,\mathrm{Id}$ à F est nilpotente. Déduisez-en que λ est une racine de χ.

(2) Soit $\lambda \in k$ une racine de χ. En considérant la restriction de f au sous-espace $F = \ker(f - \lambda\,\mathrm{Id})$, montrez que λ est racine de μ.

Exercice 4 Soit k un corps et $(a, b, c, d, e) \in k^5$. Calculez le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 Soit θ un nombre réel fixé. Dans le plan euclidien $E = \mathbb{R}^2$ on considère la rotation de centre $O = (0, 0)$ et d'angle θ. Donner sa matrice dans la base canonique. Est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

Exercice 6 Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. On suppose que le polynôme caractéristique χ de f est scindé. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, la dimension de l'espace propre E_λ est égale à la multiplicité de λ comme racine de χ.

Exercice 7 Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie n. Quel est l'ensemble des entiers qui peuvent apparaître comme degré du polynôme minimal d'un endomorphisme de E ?

Exercice 8 Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k, et E^* son dual. On considère un endomorphisme $f : E \to E$ et son transposé $f^* : E^* \to E^*$. Montrez que si f est diaonalisable, alors f^* est diagonalisable. (*On pourra montrer que la base duale d'une base de diagonalisation pour f est une base de diagonalisation pour f^*.*)

Exercice 9 Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k, $f \in L(E)$, et λ une valeur propre de f. On note n la dimension de E, α la multiplicité de λ dans le polynôme minimal de f et β la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de f. En utilisant le lemme des noyaux, montrez que

$$\ker((f - \lambda \,\mathrm{Id})^\alpha) = \ker((f - \lambda \,\mathrm{Id})^\beta) = \ker((f - \lambda \,\mathrm{Id})^n).$$

On appelle ce noyau le *sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ.*

Exercice 10 Pour tout entier $d \geq 1$ et tout nombre complexe λ, on appelle *bloc de Jordan de taille d associé à λ* la matrice carrée de taille (d, d) définie par

$$J_d(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Le théorème de *réduction de Jordan* dit que toute matrice à coefficients complexes est semblable à une matrice diagonale par blocs $J_{d_i}(\lambda_i)$. La forme obtenue est appelée la *forme de Jordan* de la matrice. Pour une matrice diagonalisable, la forme de Jordan est composée simplement de blocs $J_1(\lambda_i) = (\lambda_i)$.

(1) Calculez le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de $J_d(\lambda)$.

(2) Soit A une matrice de taille (n, n) nilpotente d'indice n. Donnez la forme de Jordan de A.

(3) Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ l'espace des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\deg(P) \leq n$. Trouvez une base dans laquelle la matrice de l'opérateur de dérivation $D : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]$ est sous forme de Jordan.

(4) Donnez la forme de Jordan de la matrice de l'exercice 4.