Mercredi 15 décembre 2010
Polynômes, 2

Lorsque rien n'est précisé, les polynômes sont à coefficients dans un corps k fixé quelconque.

Exercice 1 Soit $P \in k[X]$ un polynôme de degré 2, ayant deux racines a et b distinctes.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Faire la division euclidienne de P par X^n.

(2) Soit f un endomorphisme d'un k-espace vectoriel annulé par P. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimez f^n en fonction de f, a, b, n.

Exercice 2 Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des éléments du corps de base k, les x_i étant tous distincts. Donnez un polynôme P à coefficients dans k tel que $P(x_i) = y_i$ pour $1 \leq i \leq n$. (*Indication : pour chaque i, on pourra commencer par chercher un polynôme qui vaut* 1 *en x_i et* 0 *en x_j, $j \neq i$.*)

Exercice 3 Soit p un nombre premier.

(1) Montrez que le quotient de l'anneau $\mathbb{Z}$ par l'idéal $p\mathbb{Z}$ est un corps, noté k. Montrez que pour tout $x \in k$ non nul, on a $x^{p-1} = 1$.

(2) Donnez la décomposition en facteurs irréductibles dans $k[X]$ des polynômes $P = X^{p-1} - 1$ et $Q = X^p - X$.

(3) On considère l'anneau $A = \mathcal{F}(k, k)$ des fonctions de k dans k. L'application $k[X] \to A$ qui envoie un polynôme sur sa fonction associée est-elle injective ? surjective ?

(4) Utilisant le polynôme P, montrez que $(p-1)! \equiv -1 \mod p$ (théorème de Wilson).

Exercice 4 Le but de cet exercice est de montrer que si deux matrices A, B de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $M_n(\mathbb{C})$, alors elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

(1) Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Montrez qu'il existe deux matrices U, V de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $P = U + iV$, $UB = AU$, $VB = AV$.

(2) Soit la fonction de variable réelle $f(t) = \det(U + tV)$. Montrez qu'il existe un réel t_0 tel que $f(t_0) \neq 0$.

(3) Montrez que $Q = U + t_0V$ est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $B = Q^{-1}AQ$.

Exercice 5 Soient a et b deux entiers naturels. Calculez le pgcd de $X^a - 1$ par $X^b - 1$.