Mercredi 8 décembre 2010
Polynômes, 1

Lorsque rien n'est précisé, les polynômes sont à coefficients dans un corps k fixé quelconque.

Exercice 1 Effectuez la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

(1) $A = X^3 + 2X^2 + 3$ et $B = X^2 - X - 1$.

(2) $(k = \mathbb{Q})$ $A = -3X^6 + X^4 - 5X^2 + 1$ et $B = 3X^3 + X + 1$.

(3) $A = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ et $B = X^2 - 2X + 1$.

(4) $(k = \mathbb{R})$ $A = X^4 + 1$ et $B = X^2 - \sqrt{2}X + 1$.

Exercice 2 Déterminez les paramètres réels a et b tels que le polynôme $X^4+X^3+aX^2+bX+2$ soit divisible par $X^2 + 2$. Quelle factorisation obtient-on alors ?

Exercice 3 Soient a et b deux entiers naturels. Effectuez la division euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$.

Exercice 4 Soient A, B des polynômes et $n, k, l \geq 1$ des entiers.

(1) Montrez que A divise B si et seulement si A^n divise B^n.

(2) Une *puissance n-ième* dans $k[X]$ est un polynôme de la forme F^n, pour un certain polynôme F. Montrez que si A et B sont premiers entre eux et que AB est associé à une puissance n-ième, alors A et B sont associés à des puissances n-ièmes.

(3) Montrez que $\mathrm{pgcd}(A, B) = 1$ si et seulement si $\mathrm{pgcd}(A^k, B^l) = 1$.

(4) Montrez que $\mathrm{pgcd}(A^n, B^n) = \mathrm{pgcd}(A, B)^n$.

Exercice 5

(1) Le polynôme $X^3 - 5X^2 + 1$ est-il irréductible sur $\mathbb{Q}$? Et sur $\mathbb{R}$? Et sur $\mathbb{C}$?

(2) On considère un polynôme $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ à coefficients rationnels. Soit $x = p/q$ un rationnel mis sous forme irréductible. Montrez que si x est racine de P, alors p divise a_0 et q divise a_n.

(3) Montrez que $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

(4) Montrez que $X^6 + X^3 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.