Mercredi 24 novembre 2010
Groupes, 2

Exercice 1 Soit G un groupe. Montrez que l'application $x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme si et seulement si G est abélien.

Exercice 2 Donnez un exemple de morphisme de groupes injectif mais non surjectif, puis un exemple de morphisme de groupes surjectif mais non injectif.

Exercice 3 On considère le sous-groupe G de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ engendré par les matrices

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrez que G est fini en faisant la liste de tous ses éléments. On notera $k = ij$.

(2) Donnez sa table de multiplication (ou *table de Cayley*), qui est le tableau à deux entrées qui donne la valeur du produit gh dans la ligne g et la colonne h.

(3) Donnez le centre Z de G et montrez que pour tout $x \in G$, on a $x^2 \in Z$.

(4) Faire la liste des sous-groupes de G. Lesquels sont distingués ?

Exercice 4 Soit k un corps. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathrm{GL}_n(k)$, indiquez sans justification lesquels sont des sous-groupes, et parmi ceux-ci lesquels sont distingués :

(1) l'ensemble des matrices de déterminant 1,

(2) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures,

(3) l'ensemble des matrices triangulaires inférieures,

(4) l'ensemble des matrices diagonales,

(5) l'ensemble des matrices de trace nulle,

(6) pour un entier m fixé, l'ensemble des matrices A telles que $A^m = 1$,

(7) pour $k = \mathbb{R}$, l'ensemble des matrices de déterminant > 0,

(8) l'ensemble des matrices qui possèdent un seul coefficient non nul par ligne et par colonne.

Exercice 5 Montrez que si X est un ensemble de cardinal au moins 3, alors le groupe S_X des bijections de X n'est pas abélien.

Exercice 6 Résolvez l'équation $\mathbb{D}_n \simeq S_n$ d'inconnue $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 7 On considère le sous-groupe G de S_8 engendré par les deux permutations $i = (1234)(5678)$ et $j = (1537)(2846)$. Montrez que G est fini en faisant la liste de tous ses éléments. Donnez sa table de multiplication.