Devoir à la maison

À rendre pour le 5 janvier

Dans tout le problème, on fixe un entier $n \geq 2$, un corps k, et un k-espace vectoriel E de dimension n. Le but du problème est de démontrer le résultat suivant :

Théorème. *Un endomorphisme de E est produit d'endomorphismes nilpotents si et seulement s'il n'est pas inversible.*

1 Un système de générateurs du groupe linéaire

Soit un entier $p \geq 2$. Si r et s sont dans $\{1, \ldots, p\}$ avec $r \neq s$, et si $\lambda \in k$, on note $T_{r,s}^{(p)}(\lambda)$ la matrice de $\mathrm{GL}_p(k)$ dont tous les coefficients diagonaux valent 1, le coefficient (r, s) vaut λ et les autres coefficients sont nuls. On note G_p le sous-groupe de $\mathrm{GL}_p(k)$ engendré par les matrices $T_{r,s}^{(p)}(\lambda)$. Enfin, si $\mu \in k^*$, $D_\mu^{(p)}$ désigne la matrice diagonale de coefficients diagonaux $(1, \ldots, 1, \mu)$. Lorsque la dimension est claire d'après le contexte, on notera $T_{r,s}(\lambda)$ au lieu de $T_{r,s}^{(p)}(\lambda)$ et D_μ au lieu de $D_\mu^{(p)}$.

1. Calculer $T_{r,s}(\lambda)T_{r,s}(\lambda')$. Quel est l'inverse de $T_{r,s}(\lambda)$?

2. Soit $M \in \mathrm{GL}_p(k)$. On suppose ici que $p \geq 2$.

a) Expliquer, en termes d'opérations sur les lignes et les colonnes, comment s'obtiennent à partir de M les matrices $T_{r,s}(\lambda)M$ et $MT_{r,s}(\lambda)$.

b) Montrer qu'on peut trouver A et B dans G_p telles que $M' = AMB$ vérifie $m'_{11} = 1$.

c) Montrer qu'on peut trouver C et D dans G_p telles que CMD soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \widetilde{M} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $\widetilde{M} \in \mathrm{GL}_{p-1}(k)$.

3. a) Si $p \geq 2$ et si $P \in G_{p-1}$, montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

est dans G_p.

b) Prouver par récurrence sur p que toute matrice M de $\mathrm{GL}_p(k)$ est de la forme $RD_\mu S$ où R et S sont dans G_p et μ dans k^*.

c) Prouver que $G_p = \mathrm{SL}_p(k)$, puis que toute matrice M de $\mathrm{GL}_p(k)$ est de la forme RD_μ où R est dans G_p et μ dans k^*.

2 Preuve du théorème

On note :

- $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E,
- $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de E,
- $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E non inversibles tels que $\mathrm{im}(u) \oplus \ker(u) = E$,
- $\mathcal{T}_n^+(k)$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(k)$) l'espace des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de $\mathrm{M}_n(k)$.

Soit $d \in \{1, \ldots, n-1\}$.

1. Si $g \in \mathcal{L}(E)$, établir l'équivalence entre :
   i) $g \in \mathcal{F}(E)$ et $\mathrm{rg}(g) = d$,
   ii) il existe une base $\mathcal{B}$ de E et P dans $\mathrm{GL}_d(k)$ telles que

$$Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que $\mathrm{GL}_d(k)$ est engendré par $\mathcal{T}_d^+(k) \cup \mathcal{T}_d^-(k)$.

3. Montrer, si $Q \in \mathrm{GL}_d(k)$, que $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un produit de matrices de $\mathcal{T}_n^+(k) \cup \mathcal{T}_n^-(k)$ ayant toutes leur dernière ligne et leur dernière colonne nulles.

4. Soit $M \in \mathcal{T}_n^+(k)$ ayant sa dernière colonne nulle. Montrer qu'il existe $N \in \mathrm{M}_n(k)$ nilpotente telle que $M = NJ_n$ où

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.* Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non inversible. Dans cette question, on montre qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ et $w \in \mathcal{F}(E)$ tels que $u = w \circ v$.

a) Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E obtenue en complétant une base $\{e_1, \ldots, e_s\}$ de $\ker(u)$. On définit un endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$ par les conditions $v(e_i) = 0$ si $1 \leq i \leq s$ et $v(e_i) = e_{i-1}$ si $i \geq s+1$. Montrer que v est nilpotent et $\ker(v) = \ker(u)$.

b) Soit T un supplémentaire commun à $\mathrm{im}(u)$ et $\mathrm{im}(v)$ (on admet qu'il en existe). Prouver qu'il existe un unique $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u = w \circ v$ et $w|_T = 0$. (*Raisonner par condition nécessaire.*)

c) Montrer que $w \in \mathcal{F}(E)$. (*Montrer que* $\dim \mathrm{im}(u) \leq \dim \mathrm{im}(v)$ *et* $\dim \ker(u) \leq \dim \ker(v)$, *puis que ces inégalités sont des égalités, et conclure.*)

6. En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer le théorème énoncé au début du devoir.