# Déterminants

## Table des matières



## 1 Le volume des parallélépipèdes

**1.1 Déterminant de $n$ vecteurs.** Le déterminant de $n$ vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de l'espace $\mathbb{R}^n$ est la quantité qui formalise la notion de *volume du parallélépipède $P(x_1, \dots, x_n)$ engendré par les $x_i$*, que l'on peut définir précisément par

$$P(x_1, \dots, x_n) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \mathbb{R}^n,\, 0 \leqslant \lambda_i \leqslant n \right\}.$$

Cette fonction volume possède des propriétés remarquables, qui vont nous mener vers la définition mathématique précise, et que nous allons donc rappeler. Fixons un parallélépipède $P_0$ qui sert d'*unité de mesure*, c'est-à-dire que son volume est par définition égal à 1. Plaçons-nous en dimension $n = 2$ pour simplifier, auquel cas le volume est plutôt appelé l'*aire*, et faisons trois remarques au sujet de la fonction $(x, y) \mapsto \text{Aire}(P(x, y))$ définies sur les paires $(x, y)$ de vecteurs.

(a) *Parallélogramme étiré selon l'un des côtés* : si $x$ ou $y$ est multiplié par un scalaire $\lambda > 0$, alors l'aire est multipliée par $\lambda$.

(b) *Parallélogrammes concaténés* : si $x_1, x_2, y$ sont en « position favorable », on a $\text{Aire}(P(x_1+x_2, y)) = \text{Aire}(P(x_1, y)) + \text{Aire}(P(x_2, y))$, et on dipose d'une propriété identique lorsque $y = y_1 + y_2$. Ceci se voit en utilisant le fait que l'aire d'un parallélogramme ne dépend que des longueurs de la base et de la hauteur.

(c) *Parallélogramme aplati* : si $x$ et $y$ définissent la même droite, c'est-à-dire sont linéairement dépendants, alors l'aire s'annule.

Dans le point (b), on doit vraiment faire attention à la position relative des vecteurs, car il pourrait par exemple se produire que $x_1 + x_2 = 0$. Mais un moment de réflexion nous rappelle que nous connaissons bien ce phénomène, pour la mesure des longueurs en dimension $n = 1$, où la solution algébrique au problème est donnée par la notion de *mesure algébrique* d'un segment. La mesure algébrique est la longueur affublée d'un signe, ce qui en fait une quantité plus facile à ajouter et à retrancher. De même, le déterminant est le volume affublé d'un signe.

**1.2 Déterminant d'applications linéaires.** Nous étudierons aussi le déterminant d'une application linéaire $f$, qui formalise le *coefficient de dilatation des parallélépipèdes* par $f$, c'est-à-dire le rapport $\mathrm{vol}(f(P))/\mathrm{vol}(P)$ lorsque $\mathrm{vol}(P) \neq 0$. Notons que du point de vue physique, le volume $\mathrm{vol}(P)$ a une unité alors que le coefficient de dilatation n'en a pas. En algèbre linéaire, les deux quantités portent le même nom de *déterminant*, ce qui est un peu fâcheux, mais on doit faire avec.

**1.3 Formes multilinéaires alternées.** On fait maintenant un pas vers la définition du déterminant en transcrivant en langage mathématique les propriétés fondamentales (a)-(b)-(c) ci-dessus.

**1.4 Définition.** Soit $k$ un corps et $E$ un $k$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On appelle *forme $n$-linéaire alternée* toute fonction $v : E^n \to k$ telle que :

(1) $v$ est $n$-linéaire : pour tout indice $i$, lorsque les vecteurs $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ sont fixés, la fonction $x_i \mapsto v(x_1, \dots, x_n)$ est linéaire,

(2) $v$ est alternée : pour toute paire d'indices $i \neq j$, si $x_i = x_j$ on a $v(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Le point (1) est l'équivalent des propriétés (a) et (b), et le point (2) est l'équivalent de la propriété (c).

Si $v$ est une forme $n$-linéaire alternée, pour des indices $i \neq j$ on peut considérer la quantité $v(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n)$ qui est nulle, et la développer par $n$-linéarité pour trouver

$$v(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) + v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0.$$

Ceci montre que si on échange $x_i$ et $x_j$, la valeur de $v$ est multipliée par $-1$. On peut permuter les vecteurs $x_i$ de manière plus compliquée, par exemple en appliquant successivement des échanges d'indices $i \leftrightarrow j$, appelés *transpositions*. Pour une permutation $\sigma$ qui est composée de $k$ transpositions, on voit alors par récurrence que la valeur de $v$ est multipliée par $(-1)^k$. À ce stade, il est utile d'avoir en tête quelques notions sur les permutations, que nous étudierons plus en détail lorsque nous aborderons la théorie des groupes.

## 2 Quelques faits sur le groupe symétrique

Soit $n \geqslant 1$ un entier.

**2.1 Définition.** On appelle *groupe symétrique* $S_n$ le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, aussi appelées *permutations*. On appelle *transposition* une permutation qui échange deux chiffres distincts $i$ et $j$ et fixe tous les autres. La permutation identique est notée Id ou simplement 1.

**2.2 Écriture des permutations.** Une façon de représenter une permutation $\sigma$ est d'indiquer sur une ligne tous les entiers de 1 à $n$, et en-dessous de chaque entier son image par $\sigma$. Par exemple, la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ définie par $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 6$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 1$, $\sigma(5) = 5$, $\sigma(6) = 2$ peut être représentée ainsi :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} .$$

Une autre façon de représenter $\sigma$ est d'écrire sur une même ligne, les unes à la suite des autres, les images successives par $\sigma$. Lorsqu'on revient sur nos pieds, en un sens qui doit être évident sur l'exemple ci-dessous, on ferme la parenthèse, puis on ouvre une nouvelle parenthèse en commençant par le premier chiffre non encore évoqué. On trouve ainsi :

$$\sigma = (134)(26)(5),$$

où l'on peut lire en particulier que l'image de 3 est 4, celle de 4 est 1 (revenir au début du cycle). On voit aussi que l'image de 5 est lui-même ; on dit que 5 est un *point fixe* et en général on ne le représente pas. Ainsi, on note plutôt :

$$\sigma = (134)(26),$$

et chaque chiffre qui n'apparaît pas est par convention un point fixe. Cette dernière écriture est plus compacte, plus pratique, et c'est celle qui est utilisée le plus souvent.

**2.3 Composition des permutations.** Comme pour toutes les bijections d'un ensemble fixé, les permutations peuvent se composer ; on note $\sigma_2 \circ \sigma_1$ ou plus simplement $\sigma_2\sigma_1$ la permutation composée

$$\{1, \ldots, n\} \xrightarrow{\sigma_1} \{1, \ldots, n\} \xrightarrow{\sigma_2} \{1, \ldots, n\}.$$

À titre d'exercice, la lectrice peut vérifier les calculs suivants avec $\sigma_1 = (145)$ et $\sigma_2 = (134)(26)$ :

$$\sigma_2\sigma_1 = (134)(26)(145) = (26)(345) \qquad \text{et} \qquad \sigma_1\sigma_2 = (145)(134)(26) = (135)(26).$$

(Dans ce cours, on suit la règle inoxerable de l'alternance des sexes des lecteurs.) On voit en particulier que $\sigma_2\sigma_1 \neq \sigma_1\sigma_2$, car 1 est fixe pour la première mais pas pour la seconde.

**2.4 Théorème.** *Soit $n \geqslant 1$. Dans le groupe $S_n$, toute permutation peut s'écrire comme une composée d'au plus $n-1$ transpositions.*

La preuve du théorème repose sur un fait extrêmement important : pour chaque $i$ fixé, l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$ qui fixent $i$ est un sous-groupe, naturellement isomorphe au groupe des bijections de $\{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire à $S_{n-1}$.

**Preuve :** Montrons l'énoncé par récurrence sur $n$. Si $n = 1$, on a $S_1 = \{\mathrm{Id}\} \simeq \{1\}$ et il n'y a rien à démontrer. Supposons maintenant que dans $S_{n-1}$, toute permutation peut s'écrire comme une composée d'au plus $n-2$ transpositions. Soit $\sigma \in S_n$ et notons $i = \sigma(n)$. Si $i = n$, c'est-à-dire si $\sigma$ fixe $n$, alors elle s'identifie à une permutation de $\{1, \ldots, n-1\}$ et peut s'écrire comme une composée d'au plus $n-2$ transpositions, par l'hypothèse de récurrence. Si $i \neq n$, introduisons la transposition $\tau = (in)$. On voit immédiatement que la permutation $\sigma' := \tau\sigma$ fixe $n$, donc est composée d'au plus $n-2$ transpositions, par l'hypothèse de récurrence. Comme $\tau^2 = 1$, en multipliant à gauche par $\tau$ on trouve $\sigma = \tau\sigma'$ qui est donc composée d'au plus $n-1$ transpositions. $\square$

La manière d'écrire une permutation comme composée de transpositions n'est pas du tout unique ; par exemple on a $(134) = (13)(34)$ et $(134) = (24)(14)(23)(12)$ sont deux décompositions différentes. Cependant, il y a tout de même un invariant dans ces décompositions, qui est l'objet du théorème fondamental suivant :

**2.5 Théorème.** *Soit $\sigma \in S_n$ une permutation. Alors la parité du nombre $k$ de transpositions qui apparaissent dans les décompositions de $\sigma$ en produit de transpositions est invariante. De plus, l'application $\epsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ définie par $\epsilon(\sigma) = (-1)^k$ est un morphisme surjectif de groupes.*

Le morphisme $\epsilon$ est appelé la *signature*. Par exemple, la signature d'une transposition vaut $-1$. Ce théorème sera démontré dans le cours de théorie des groupes...

## 3 Déterminant d'une famille de vecteurs

... mais nous allons l'utiliser dès à présent. Après la définition 1.4, nous avons vu que pour toute forme $n$-linéaire alternée $v$ sur un espace vectoriel $E$ de dimension $n$, si on permute des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ successivement avec $k$ transpositions, la valeur $v(x_1, \ldots, x_n)$ devient $(-1)^k v(x_1, \ldots, x_n)$. Compte tenu du fait que toute permutation est composée de $k \leqslant n-1$ transpositions (th. 2.4) et que $(-1)^k$ est la signature (th. 2.5), on obtient $v(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) v(x_1, \ldots, x_n)$.

**3.1 Théorème.** *Soient $k$ un corps et $E$ un $k$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Alors, l'ensemble* $\mathrm{FLA}_n(E)$ *des formes $n$-linéaires alternées sur $E$ est un $k$-espace vectoriel de dimension* 1.

**Preuve :** Il est très facile de vérifier que si $v, w$ sont deux formes $n$-linéaires alternées sur $E$, toute combinaison linéaire $\lambda v + \mu w$ en est encore une. Ainsi l'ensemble $\mathrm{FLA}_n(E)$ est un espace vectoriel, et il reste à calculer sa dimension. Fixons une base ordonnée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E$. Soit $v \in \mathrm{FLA}_n(E)$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ un uplet de vecteurs. On écrit $x_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} e_j$ pour certains scalaires $\lambda_{i,j}$. On a alors :

$$v(x_1, \ldots, x_n) = v\left(\sum_{j_1=1}^n \lambda_{1,j_1} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^n \lambda_{n,j_n} e_{j_n}\right) = \sum_{j_1, \ldots, j_n} \lambda_{1,j_1} \ldots \lambda_{n,j_n} v(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n})$$

par multilinéarité. Dans la somme, si deux indices $j_s$ et $j_t$ sont égaux, on a $v(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = 0$ puisque $v$ est alternée. Il s'ensuit que n'apparaissent que les multiindices $(j_1, \ldots, j_n)$ tels que l'application $\sigma$ telle que $\sigma(i) = j_i$ est une bijection de $\{1, \ldots, n\}$. On peut donc réécrire la somme en utilisant les permutations comme indices, et on obtient :

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_{1,\sigma(1)} \ldots \lambda_{n,\sigma(n)} v(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \lambda_{1,\sigma(1)} \ldots \lambda_{n,\sigma(n)} v(e_1, \ldots, e_n).$$

Notons $w$ la fonction définie par $w(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \lambda_{1,\sigma(1)} \ldots \lambda_{n,\sigma(n)}$, pour tout uplet de vecteurs $x_i = \sum_j \lambda_{i,j} e_j$. On peut montrer que $w$ est une forme $n$-linéaire alternée et nous l'admettrons (ce n'est pas très difficile). Cette forme est non nulle, car $w(e_1, \ldots, e_n) = 1$. On a montré que pour toute forme $n$-linéaire alternée $v$, on a $v = \alpha w$ où $\alpha$ est la constante $v(e_1, \ldots, e_n)$. Il s'ensuit que l'espace $\mathrm{FLA}_n(E)$ est de dimension 1 et que $w$ en est une base. □

**3.2 Définition.** Soient $k$ un corps et $E$ un $k$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Pour toute base ordonnée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$, on note $\det_{\mathcal{B}}$ l'unique forme $n$-linéaire alternée de $E$ telle que $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$ et on l'appelle le *déterminant dans la base* $\mathcal{B}$.

**3.3 Remarque.** Notons $e_1^*, \ldots, e_n^*$ la base duale de la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors, le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ est la fonction $w$ qui apparaît dans la preuve du théorème 3.1 et que l'on peut définir par $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) e_{\sigma(1)}^*(x_1) \ldots e_{\sigma(n)}^*(x_n)$.

**3.4 Proposition (Changement de base dans le déterminant).** *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases ordonnées de $E$. Alors, on a la formule :*

$$\det_{\mathcal{C}} = \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}.$$

*En particulier, on a* $\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = 1$.

**Preuve :** Comme l'espace $\mathrm{FLA}_n(E)$ est de dimension 1 engendré par $\det_{\mathcal{B}}$, il existe un scalaire $\lambda \in k$ tel que $\det_{\mathcal{C}} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. En évaluant cette égalité de fonctions sur $(e_1, \ldots, e_n) = \mathcal{B}$, compte tenu du fait que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$, on trouve $\lambda = \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ d'où $\det_{\mathcal{C}} = \det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$. En évaluant cette égalité sur $\mathcal{C}$, on trouve la dernière formule annoncée. □

**3.5 Proposition.** *Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de $E$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont liés,*

(2) *il existe une base ordonnée $\mathcal{B}$ telle que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$,*

(3) *pour toute base ordonnée $\mathcal{B}$, on a $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$.*

**Preuve :** L'équivalence entre (2) et (3) est une conséquence immédiate de la formule de changement de base de la proposition 3.4. Maintenant, soit $\mathcal{B}$ une base ordonnée. Si les $x_i$ sont liés, il existe une combinaison linéaire $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ avec l'un des $\lambda_i$ non nul. On peut supposer que c'est $\lambda_1$. Comme $\det_{\mathcal{B}}$ est $n$-linéaire et alternée, on a

$$0 = \det_{\mathcal{B}}(0, x_2, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1 \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

On en déduit que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$, ce qui montre que (1) implique (3). Si les $x_i$ sont libres, ils constituent une base ordonnée $\mathcal{B}$ et dans cette base on a $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 1$. Ceci montre que (1) implique (2). $\square$

## 4 Déterminant d'un endomorphisme

Nous passons à la définition du déterminant d'un endomorphisme.

**4.1 Proposition.** *Soit $f : E \to E$ une application linéaire. Alors il existe un unique scalaire $\det(f) \in k$ tel que pour toute base ordonnée $\mathcal{B}$ et tout uplet $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a :*

$$\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

**Preuve :** Fixons une base ordonnée $\mathcal{B}$. Une vérification rapide montre que la fonction $\varphi : E^n \to k$ définie par $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est une forme $n$-linéaire alternée. D'après le théorème 3.1, il s'ensuit qu'il existe un unique scalaire $\delta_{\mathcal{B}} \in k$ tel que $\varphi = \delta_{\mathcal{B}} \det_{\mathcal{B}}$, et en évaluant cette égalité de fonctions sur $\mathcal{B}$ on trouve $\delta_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$. Finalement

$$\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \delta_{\mathcal{B}} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n). \tag{1}$$

Mais étant données deux bases ordonnées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a :

$$\delta_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}')) \overset{\substack{\boxed{\text{d'après 3.4}} \\ \downarrow}}{=} \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}')) \overset{\substack{\boxed{\text{d'après (1)}} \\ \downarrow}}{=} \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\, \delta_{\mathcal{B}} \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \overset{\substack{\boxed{\text{d'après 3.4}} \\ \downarrow}}{=} \delta_{\mathcal{B}}$$

ce qui montre que $\delta_{\mathcal{B}}$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$. On pose $\det(f) := \delta_{\mathcal{B}}$. $\square$

**4.2 Définition.** On appelle *déterminant de $f$* le scalaire $\det(f)$ de la proposition précédente.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. En nous rappelant nos propos introductifs de 1, la formule

$$\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

doit être lue ainsi : si l'on fixe un parallélépipède de référence $P_0 = P(e_1, \dots, e_n)$, tout parallélépipède $P = P(x_1, \dots, x_n)$ voit son volume multiplié par le coefficient de dilatation $\det(f)$ lorsqu'on lui applique $f$.

**4.3 Proposition.** *Soient $f, g : E \to E$ deux applications linéaires. Alors* $\det(fg) = \det(f)\det(g)$.

**Preuve :** Soient $\mathcal{B}$ une base ordonnée et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Par définition de $\det(fg)$, on a :

$$\det_{\mathcal{B}}((fg)(x_1), \ldots, (fg)(x_n)) = \det(fg)\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Par ailleurs, par définition de $\det(f)$ puis de $\det(g)$ :

$$\det_{\mathcal{B}}((fg)(x_1), \ldots, (fg)(x_n)) = \det(f)\det_{\mathcal{B}}(g(x_1), \ldots, g(x_n)) = \det(f)\ \det(g)\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Par la propriété d'unicité dans la proposition 4.1, on en déduit que $\det(fg) = \det(f)\det(g)$. $\square$

**4.4 Corollaire.** *Soit $f : E \to E$ une application linéaire. Alors, $f \in \mathrm{GL}(E)$ si et seulement si* $\det(f) \in k^\times$.

**Preuve :** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base ordonnée de $E$. Si $f \notin \mathrm{GL}(E)$, elle n'est pas injective donc les vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ sont liés. Utilisant la propriété fondamentale de la proposition 4.1 et la proposition 3.5, on trouve

$$\det(f) = \det(f)\det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = 0.$$

Réciproquement si $f \in \mathrm{GL}(E)$, il existe $g : E \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. D'après la proposition précédente on a $\det(f)\det(g) = \det(f \circ g) = \det(\mathrm{Id}_E) = 1$ donc $\det(f) \neq 0$. $\square$

**4.5 Corollaire.** *Le déterminant induit un morphisme de groupes* $\det : \mathrm{GL}(E) \to k^\times$.

**Preuve :** Ceci provient des deux précédents résultats. $\square$

# 5 Déterminant d'une matrice

On note $\mathrm{M}_{n,m}(k)$, resp. $\mathrm{M}_n(k)$, l'ensemble des matrices de taille $(n, m)$, resp. de taille $(n, n)$, à coefficients dans $k$.

**5.1 Définition.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(k)$. On définit le *déterminant de $A$* noté $\det(A)$ comme le déterminant de l'endomorphisme de $k^n$ défini par $A$, ou encore, comme le déterminant de la famille des vecteurs colonnes de $A$ dans la base canonique de $k^n$.

**5.2 Proposition.** *Soit $A$ une matrice de taille $(n, n)$ à coefficients dans $k$ et ${}^tA$ sa transposée. On a alors* $\det({}^tA) = \det(A)$.

**Preuve :** Le coefficient d'indice $(i, j)$ de la matrice ${}^tA$ est $a'_{ij} = a_{ji}$. Comme l'application $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de $S_n$ et que $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1})$, on peut réordonner la sommation dans l'expression du déterminant selon cette bijection. On trouve

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma^{-1}(1)} \ldots a_{n,\sigma^{-1}(n)}.$$

Pour une permutation $\sigma$ fixée, en posant $j = \sigma^{-1}(i)$ on obtient $\prod_i a_{i,\sigma^{-1}(i)} = \prod_j a_{\sigma(j),j}$ et finalement

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)\, a'_{1,\sigma(1)} \ldots a'_{n,\sigma(n)} = \det({}^tA).$$

$\square$

**5.3 Remarques.** (1) Si $A = (a_{ij})$, on a donc les formules :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Le fait que la somme porte sur les *permutations* montre que le déterminant est une somme de monômes de la forme $a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$, dans lesquels chaque indice entre 1 et $n$ apparaît une fois et une seule comme indice de ligne et comme indice de colonne dans un $a_{ij}$. Dit autrement, pour former un monôme qui apparaît dans $\det(A)$, il faut multiplier $n$ coefficients de $A$ en en prenant un seul dans chaque ligne et dans chaque colonne.

(2) On voit que $\det(A)$ est une fonction polynomiale des coefficients de $A$. Précisément, choisissons une paire d'indices $(i, j)$. On voit que si dans l'expression du déterminant on fixe toutes les variables sauf $a_{ij}$, alors la fonction $a_{ij} \mapsto \det(A)$ est polynomiale. En particulier, si $k = \mathbb{R}$, cette fonction est continue et même de classe $C^\infty$.

**5.4 Proposition.** *Soit $A$ une matrice de taille $(n, n)$ à coefficients dans $k$. Alors, on ne change pas le déterminant de $A$ en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes, ou en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes. En particulier, s'il existe une combinaison linéaire non nulle entre les lignes de $A$ ou entre ses colonnes, alors $\det(A) = 0$. Par ailleurs, le déterminant est multiplié par $\lambda$ si on multiplie une ligne, ou une colonne, par $\lambda$.*

**Preuve :** Ces propriétés sont des reformulations du fait que le déterminant est multilinéaire et alterné. $\square$

Maintenant, pour tout indice $(i, j)$ nous notons $A_{ij}$ la matrice obtenue en effaçant la $i$-ième ligne et la $j$-ième colonne de $A$. On définit :

(i) $m_{ij} := \det(A_{ij})$ : le *mineur* relatif au coefficient $a_{ij}$,

(ii) $\widetilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ : le *cofacteur* relatif au coefficient $a_{ij}$,

(iii) $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})$ la *comatrice*, ou *matrice des cofacteurs*, de $A$.

**5.5 Proposition (Développement selon une ligne ou une colonne).** *Pour toute matrice carrée $A$ de taille $(n, n)$ à coefficients dans $k$, on a :*

(1) *Formule de la comatrice :*

$$A\,{}^t\widetilde{A} = {}^t\widetilde{A}\,A = \det(A)\,\mathrm{Id}_n\,.$$

(2) *Développement du déterminant par rapport à la i-ième ligne :*

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} \det(A_{ik}).$$

(2) *Développement du déterminant par rapport à la i-ième colonne :*

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}(-1)^{i+k} \det(A_{ki}).$$

**Preuve :** Pour la formule (2), nous nous contenterons de renvoyer à un ouvrage d'algèbre linéaire, par exemple *Mathématiques L1* de J.-P. Marco et L. Lazzarini, Éd. Pearson. La formule (3) s'en déduit par transposition. Passons à la formule (1). La formule de développement par rapport à une ligne nous dit exactement que les coefficients d'indice $(i, i)$ des matrices $A\,{}^t\widetilde{A}$ et $\det(A)\,\mathrm{Id}_n$ sont égaux. Par ailleurs, pour un indice $j \neq i$, considérons la matrice $A'$ obtenue en remplaçant la $j$-ième ligne de $A$ par sa $i$-ième. Ainsi sur la $j$-ième ligne les coefficients de $A'$ sont les $a'_{jk} = a_{ik}$ et ses cofacteurs sont les $\widetilde{a}'_{jk} = \widetilde{a}_{jk}$. Ainsi la formule de développement du déterminant par rapport à la $j$-ième ligne donne

$$\det(A') = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k} \det(A_{jk}).$$

Or $A'$ possède donc deux lignes égales donc son déterminant est nul. On obtient ainsi l'égalité des coefficients d'indice $(i,j)$ des matrices $A\,{}^t\widetilde{A}$ et $\det(A)\,\mathrm{Id}_n$. Ceci prouve que $A\,{}^t\widetilde{A} = \det(A)\,\mathrm{Id}_n$.

De même, la formule de développement du déterminant par rapport à une ligne implique l'égalité ${}^t\widetilde{A}\,A = \det(A)\,\mathrm{Id}_n$. $\square$

Nous terminons ces rappels de cours avec le calcul du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

**5.6 Proposition.** *Soit $A \in \mathrm{M}_n(k)$ une matrice triangulaire par blocs :*

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right)$$

*avec $A_{11} \in \mathrm{M}_m(k)$, $A_{22} \in \mathrm{M}_{n-m}(k)$, $A_{12} \in \mathrm{M}_{m,n-m}(k)$. Alors on a* $\det(A) = \det(A_{11})\det(A_{22})$.

**Preuve :** Par hypothèse, si $i \geqslant m+1$ et $j \leqslant m$ on a $a_{ij} = 0$. Donc si $a_{\sigma(s),s} \neq 0$ pour un certain indice $s \in \{1,\dots,n\}$ et pour une certaine permutation $\sigma \in S_n$, alors $\sigma(s) \leqslant m$ ou $s \geqslant m+1$. Dit autrement, pour une telle paire $(s,\sigma)$ on a : $s \leqslant m \Rightarrow \sigma(s) \leqslant m$. Ceci signifie que seules les permutations $\sigma$ qui stabilisent l'ensemble $\{1,\dots,m\}$ donnent éventuellement lieu à un terme non nul dans le développement $\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}$. Si $\sigma$ stabilise l'ensemble $\{1,\dots,m\}$, elle stabilise aussi l'ensemble $\{m+1,\dots,n\}$ donc elle est déterminée par des deux restrictions $\sigma_1 = \sigma|_{\{1,\dots,m\}}$ et $\sigma_2 = \sigma|_{\{m+1,\dots,n\}}$. Si on concatène deux décompositions de $\sigma_1$ et $\sigma_2$ en produits de transpositions, on obtient une décomposition de $\sigma$ en produit de transpositions, ce qui montre que $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma_1)\epsilon(\sigma_2)$. Finalement

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{(\sigma_1,\sigma_2)} \epsilon(\sigma_1)\epsilon(\sigma_2)\,(a_{\sigma_1(1),1}\cdots a_{\sigma_1(m),m})(a_{\sigma_2(m+1),m+1}\cdots a_{\sigma_2(n),n}) \\
&= \sum_{(\sigma_1,\sigma_2)} \epsilon(\sigma_1)\,(a_{\sigma_1(1),1}\cdots a_{\sigma_1(m),m})\,\epsilon(\sigma_2)\,(a_{\sigma_2(m+1),m+1}\cdots a_{\sigma_2(n),n}) \\
&= \left(\sum_{\sigma_1} \epsilon(\sigma_1)\,a_{\sigma_1(1),1}\cdots a_{\sigma_1(m),m}\right)\left(\sum_{\sigma_2} \epsilon(\sigma_2)\,a_{\sigma_2(m+1),m+1}\cdots a_{\sigma_2(n),n}\right) \\
&= \det(A_{11})\det(A_{22}).
\end{aligned}$$

$\square$