Mardi 26 octobre 2010
Déterminants

Exercice 1 (1) Dans le groupe symétrique S_5, montrez que $(12345) = (23451) = \cdots = (51234)$.
(2) Calculez le produit de $\sigma = (135)$ et $\tau = (24)$ puis le produit de $\sigma' = (135)$ et $\tau' = (23)$.
(3) Dans S_7, calculez le produit $\sigma\tau\upsilon$ avec $\sigma = (137)(25)$, $\tau = (567)$ et $\upsilon = (471)(32)$.
(4) Calculez la signature de toutes les permutations qui apparaissent dans les questions précédentes.
(5) Soit σ une permutation quelconque. Montrez que $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1})$.

Exercice 2 Énumérez tous les éléments de S_2 et déduisez-en l'expression du déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Faites de même pour le groupe S_3 et la matrice générale de taille $(3, 3)$.

Exercice 3 Soient k un corps et a, b, c, d, u, v dans k. Résolvez par le pivot de Gauss le système linéaire d'inconnues x, y suivant :

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v. \end{cases}$$

Exercice 4 Soient k un corps et $a_1, \dots, a_n$ des éléments de k. On appelle *matrice de Vandermonde des* a_i la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ (a_1)^2 & (a_2)^2 & \dots & (a_n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_1)^{n-1} & (a_2)^{n-1} & \dots & (a_n)^{n-1} \end{pmatrix}$$

et *déterminant de Vandermonde des* a_i son déterminant noté $V(a_1, \dots, a_n)$ (Certains auteurs appellent matrice de Vandermonde la transposée de la matrice ci-dessus.) Démontrez par récurrence sur n que

$$V(a_1, \dots, a_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

(Indication : calculer $V(a_1, \dots, a_n)$ en retranchant à chaque colonne a_1 fois la précédente.)

Exercice 5 Soient $a, x_1, \dots, x_n$ des nombres réels. On souhaite calculer le déterminant Δ de la matrice $M = (m_{ij})$ de taille (n, n) telle que $m_{ij} = a$ si $i \neq j$ et $m_{ii} = x_i$. On introduit des réels b, x et la matrice $N = (n_{ij})$ telle que $n_{ij} = a + x$ si $i < j$, $n_{ij} = b + x$ si $i > j$ et $n_{ii} = x_i + x$. On note $D(x)$ son déterminant.

(1) Montrez qu'il existe deux réels A et B tels que $D(x) = Ax + B$.

(2) Calculez $D(-a)$, puis $D(-b)$, puis $D(0)$.

(3) En utilisant la continuité du déterminant, déduisez-en la valeur de Δ.