Feuille d'exercices 3

Exercice 1 - Un exemple de module libre : polynômes à valeurs entières
Soit M l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

(1) Montrez que M est un $\mathbb{Z}$-module.

(2) On pose $H_0 = 1$ et $H_n = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$ pour $n \geqslant 1$ entier. Montrez que $H_n \in M$.

(3) Montrez que $\{H_n\}_{n\geqslant 0}$ est une famille libre du $\mathbb{Z}$-module M.

(4) Montrez que $\{H_n\}_{n\geqslant 0}$ est une famille génératrice. Indication : montrer que pour tout $P \in M$ de degré n, il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ réels tels que $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k H_k$, puis que $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ pour tout k.

Exercice 2 - Modules de torsion qui (ne) sont (pas) de type fini
Soient A un anneau commutatif intègre et M un A-module. On dit que $x \in M$ est *de torsion* s'il existe $a \in A$, $a \neq 0$, tel que $ax = 0$. On note M_{tor} le sous-A-module des éléments de torsion de M. On dit que M est *de torsion* si $M = M_{\mathrm{tor}}$.

(1) Un exemple avec $A = \mathbb{Z}$: on note $M = S^1$ le cercle unité vu comme l'ensemble des nombres complexes de module 1, muni de la multiplication comme loi de groupe. Construisez un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} S^1$ puis identifiez M_{tor} de part et d'autre de l'isomorphisme.

(2) On suppose M de type fini et on pose $\mathrm{Ann}(M) = \{a \in A; aM = 0\}$. Montrez que M est de torsion si et seulement si $\mathrm{Ann}(M) \neq \{0\}$.

(3) Donnez un exemple d'un module de torsion qui n'est pas de type fini et pour lequel $\mathrm{Ann}(M) = \{0\}$.

(4) On suppose que $A = \mathbb{Z}$. Montrez que M est de torsion et de type fini si, et seulement si, M est fini. Même question lorsque $A = k[X]$, où k est un corps fini.

Exercice 3 - Un anneau non factoriel
Soient k un corps et $A = k[X, Y, Z, T]/(XY - ZT)$. On note x, y, z, t les images de X, Y, Z, T dans A.

(1) Montrez que le sous-anneau $R = k[z, t] \subset A$ est isomorphe à l'anneau de polynômes $k[Z, T]$.

(2) Montrez que tout élément de A possède une écriture unique $a = a_0 + xa_1(x) + ya_2(y)$ où $a_0 \in R$, $a_1 \in R[x]$ et $a_2 \in R[y]$.

(3) Montrez que A est intègre en construisant une injection de A dans $B = k(X)[Z, T]$.

(4) Montrez que z et t sont des irréductibles de A. Indiquez pourquoi x et y le sont aussi.

(5) Justifiez qu'aucun de ces quatre irréductibles n'est multiple d'un autre ; en particulier, ils sont non associés deux à deux.

(6) Montrez que A n'est pas factoriel.

(7) Montrez que xz et xy n'ont pas de pgcd.

(8) Montrez que x et z ont un pgcd mais n'ont pas de ppcm.

Exercice 4 - Principalité de $A[X]$
Soit A un anneau commutatif. Montrez que $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.

Exercice 5 - Formules pour pgcd et ppcm
Soit A un anneau factoriel et $a, b, \ldots$ des éléments de A.

(1) Montrez que $\mathrm{pgcd}(a, \mathrm{pgcd}(b, c)) = \mathrm{pgcd}(a, b, c)$.

(2) Montrez que $\mathrm{pgcd}(a^n, b^n) = \mathrm{pgcd}(a, b)^n$ pour tout entier $n \geq 1$.

(3) Montrez que $\mathrm{pgcd}(a, b)\mathrm{ppcm}(a, b) = ab$.

(4) Montrez que $\mathrm{pgcd}(a, \mathrm{ppcm}(b, c)) = \mathrm{ppcm}(\mathrm{pgcd}(a, b), \mathrm{pgcd}(a, c))$.

(5) Montrez que $\mathrm{ppcm}(a, \mathrm{pgcd}(b, c)) = \mathrm{pgcd}(\mathrm{ppcm}(a, b), \mathrm{ppcm}(a, c))$.

(6) Si $A = \mathbb{Z}$ montrez que $\mathrm{pgcd}(a, b) = \sum_{k|a, k|b} \varphi(k)$ où φ est la fonction indicatrice d'Euler.

(7) Si A est euclidien de stathme δ, montrez que pour toute division euclidienne $a = bq + r$ avec $\delta(r) < \delta(b)$ on a $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, r)$.

(8) Si $A = \mathbb{Z}$ montrez que $\mathrm{pgcd}(n^a - 1, n^b - 1) = n^{\mathrm{pgcd}(a,b)} - 1$.

(9) Si $A = k[X]$ où k est un corps, montrez que $\mathrm{pgcd}(X^a - 1, X^b - 1) = X^{\mathrm{pgcd}(a,b)} - 1$.