# Feuille d'exercices 2

**Exercice 1 - Morphismes entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il n'existe aucune application $\mathbb{Z}$-linéaire non nulle de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Existe-t-il des applications $\mathbb{Z}$-linéaires non nulles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Q}$ ?

**Exercice 2 - $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre**
Soit $\{e_i\}_{i\in I}$ une famille d'éléments du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$. Montrez que si $\mathrm{card}(I) \leqslant 1$, cette famille n'est pas génératrice. Montrez que si $\mathrm{card}(I) \geqslant 2$, elle n'est pas libre. Déduisez-en que $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre.

**Exercice 3 - Modules sur un anneau intègre versus espaces vectoriels**
Soient $A$ un anneau commutatif intègre, et $K$ son corps des fractions (de sorte que $A$ est un sous-anneau de $K$, et que tout élément de $K$ est un quotient d'éléments de $A$).

(1) Soit $V$ un $K$-espace vectoriel. Montrez qu'une famille $(v_i)_{i\in I}$ d'éléments de $V$ est libre si et seulement si elle est $A$-libre (i.e. libre dans $V$ vu comme $A$-module).

(2) Avec les notations ci-dessus, montrez que toute famille $A$-génératrice dans $V$ est $K$-génératrice, mais que la réciproque est fausse.

(3) Montrez que $K$ est un $A$-module libre si et seulement si $A = K$.

(4) Montrez que $K$ est un $A$-module de type fini si et seulement si $A = K$.

(5) Soient $V$ et $W$ deux $K$-espaces vectoriels. Montrez que toute application $A$-linéaire de $V$ dans $W$ est $K$-linéaire.

**Exercice 4 - Modules libres versus sommes, produits, quotients, sous-modules**
(1) Soient $M$ un $A$-module et $N$ un sous-module de $M$. Montrez que si $N$ et $M/N$ sont libres, alors $M$ est libre. (*Indication : fabriquer une base de $M$ à partir d'une base de $N$ et d'une base de $M/N$.*)

(2) Montrez que toute somme directe de $A$-modules libres est libre, et que tout produit fini de $A$-modules libres est libre. (*Remarque : ce n'est pas vrai pour un produit infini, car on peut montrer que le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ n'est pas libre.*)

(3) Soit $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Montrez que les $A$-modules $2A$ et $3A$ ne sont pas libres, mais que $2A \oplus 3A$ est libre de rang 1.

**Exercice 5 - Modules par générateurs et relations**
(1) Montrez que tout $A$-module admet une partie génératrice. En déduire que tout $A$-module est isomorphe à un quotient d'un $A$-module libre.

(2) Soit $M$ un $A$-module. On appelle *présentation par générateurs et relations* de $M$ la donnée d'une famille de générateurs $\{x_i\}_{i\in I}$ de $M$ et d'une famille de générateurs $\{r_j\}_{j\in J}$ du noyau du morphisme $A^{(I)} \to M$, $e_i \mapsto x_i$. Pour $A = \mathbb{Z}[X]$, donnez une présentation par générateurs et relations du $A$-module $I = (2, X) \subset A$.

**Exercice 6 - Algèbres par générateurs et relations**

(1) Montrez que toute $A$-algèbre admet une partie génératrice. En déduire que toute $A$-algèbre est isomorphe à un quotient d'une $A$-algèbre de polynômes (en un nombre arbitraire de variables).

(2) Montrez que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe à une sous-$\mathbb{Z}$-algèbre d'une $\mathbb{Z}$-algèbre de polynômes.

(3) Soit $B$ une $A$-algèbre. On appelle *présentation par générateurs et relations* de $B$ la donnée d'une famille de générateurs $\{x_i\}_{i\in I}$ de $B$ et d'une famille de générateurs $\{y_j\}_{j\in J}$ du noyau du morphisme $A[X_i]_{i\in I} \to B$, $X_i \mapsto x_i$. Pour $A$ égale à un corps $k$, donnez une présentation par générateurs et relations de la $k$-algèbre des polynômes en une variable $X$ à coefficients dans $k$ sans terme de degré 1.

**Exercice 7 - Faits de base sur les modules de type fini**

On rappelle qu'un $A$-module $M$ est dit *de type fini* s'il admet une partie génératrice finie.

(1) Montrez qu'un $A$-module $M$ est de type fini si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M$ soit isomorphe à un quotient de $A^n$.

(2) Montrez que tout quotient d'un $A$-module de type fini est de type fini.

(3) Soit $M$ un $A$-module de type fini. Montrez que toute partie génératrice de $M$ contient une partie génératrice finie.

(4) Soit $A$ l'anneau $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Montrez que $M := A$ est un $A$-module de type fini et que le sous-ensemble $N := \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-$A$-module qui n'est pas de type fini.

(5) Soient $M$ un $A$-module et $N$ un sous-module de $M$. Montrez que si $N$ et $M/N$ sont de type fini, $M$ est de type fini.

**Exercice 8 - Générateurs des rationnels**

(1) Montrer que tout sous-$\mathbb{Z}$-module de type fini non nul de $\mathbb{Q}$ est libre de rang 1. En déduire que $\mathbb{Q}$ n'est pas de type fini.

(2) Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$ et $j \in I$. Montrer que la famille $(e_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ est encore génératrice.

**Exercice 9 - Théorèmes d'isomorphisme**

Soit $N$ un sous-module d'un $A$-module $M$ et $\pi : M \longrightarrow M/N$ la projection canonique.

(1) Montrer que $P \longmapsto \pi^{-1}(P)$ établit une bijection croissante entre les sous-modules de $M/N$ et les sous-modules de $M$ contenant $N$ et donner sa réciproque.

(2) Montrer que cette bijection transforme sommes et intersections en sommes et intersections.

(3) Montrer que, pour des sous-modules $N \subset L \subset M$, on a $(M/N)/(L/N) \simeq M/L$.

(4) Montrer que si $P$ est un sous-module de $M$, on a $N/(N \cap P) \simeq (N + P)/P$.