Feuille d'exercices 1

Groupes

Exercice 1 - Ordre d'un élément dans un groupe
Soit G un groupe et $g \in G$. On appelle *ordre de g dans G* le plus petit des entiers $n \geq 1$ tels que $g^n = 1$, s'il en existe un, et $+\infty$ sinon.

1. Quel est l'ordre de -1 dans $(\mathbb{Q}, +)$? Et dans $(\mathbb{Q}^*, \times)$?

2. L'élément $g \in G$ étant fixé, montrez que l'application $\mathbb{Z} \to G$, $m \mapsto g^m$ est un morphisme de groupes. Donnez les liens entre son noyau, son image et l'ordre de g.

3. Soient $k, n \geq 1$ deux entiers. Calculez l'ordre de la classe $\overline{k}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (on pourra commencer par le cas où k et n sont premiers entre eux).

Exercice 2 - Morphismes de groupes monogènes
1. Déterminer le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2. Pour $m, n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ et $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Exercice 3 - Automorphismes intérieurs
Soit G un groupe. Pour tout $g \in G$, on note $c_g : G \to G$ l'application $x \mapsto gxg^{-1}$.

1. Montrez que c_g est un automorphisme du groupe G.

2. Montrez que $c : G \to \mathrm{Aut}(G)$ est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?

3. Montrez que l'image de c est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$. Le morphisme c est-il toujours surjectif ?

Exercice 4 - Groupes sans automorphisme
Soit G un groupe dont le seul automorphisme est l'identité.

1. Montrez que G est commutatif.

2. Montrez que G peut être muni canoniquement d'une structure d'espace vectoriel sur le corps à 2 éléments $\mathbb{F}_2$.

3. Montrez que $G \simeq \{1\}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 5 - Groupes d'ordre premier
À isomorphisme près, combien y a-t-il de groupes d'ordre un nombre premier p ?

Anneaux

Exercice 6 - Quotients successifs

1. Soient A un anneau et I, J des idéaux bilatères de A tels que $I \subset J$. On note J/I l'idéal image de J dans l'anneau quotient A/I. Montrez que les anneaux $(A/I)/(J/I)$ et A/J sont isomorphes.

2. Soient A un anneau et x, y deux éléments de A. Montrez qu'il existe des isomorphismes entre : l'anneau quotient $A/(x,y)$; l'anneau quotient de $A/(x)$ par l'idéal engendré par $\overline{y}$; l'anneau quotient de $A/(y)$ par l'idéal engendré par $\overline{x}$.

3. Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C}; a, b \in \mathbb{Z}\}$ l'anneau des *entiers de Gauss*. Soit p un nombre premier. Montrez que l'idéal (p) est premier dans $\mathbb{Z}[i]$ ssi -1 n'est pas un carré modulo p. (*Indication : donnez une présentation de* $\mathbb{Z}[i]$ *comme quotient d'un anneau de polynômes à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *puis utilisez la question 2.*)

Exercice 7 - Image d'un idéal

Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux commutatifs.

1. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes : (i) l'image de tout idéal de A est un idéal de B ; (ii) f est surjectif.

2. Lorsque f est surjectif, on note I son noyau (donc f induit un isomorphisme $A/I \simeq B$). Montrez que les applications $J \mapsto f(J)$ et $K \mapsto f^{-1}(K)$ sont des bijections réciproques entre l'ensemble des idéaux J de A contenant I et l'ensemble des idéaux K de B.

3. Montrez que l'image réciproque d'un idéal premier de B est un idéal premier de A. Dans le cas surjectif, montrez que les bijections de la question 2 induisent des bijections entre les idéaux premiers de A contenant I et les idéaux premiers de B.

4. Dans le cas surjectif, montrez que l'image réciproque d'un idéal maximal de B est un idéal maximal de A (et donner un contre-exemple lorsque f n'est pas surjectif) puis montrez que les bijections de la question 2 induisent des bijections entre les idéaux maximaux de A contenant I et les idéaux maximaux de B.

Exercice 8 - Morphisme de Frobenius

Soient p un nombre premier et A un anneau commutatif de caractéristique p.

1. Montrez que $px = 0$ pour tout $x \in A$.

2. Montrez que dans A, les coefficients binomiaux $\binom{p}{i}$ sont nuls pour $0 < i < p$.

3. Montrez que l'application $F : A \longrightarrow A, x \longmapsto x^p$ est un endomorphisme d'anneaux. Que vaut-il dans le cas où $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

4. Montrez que F est injectif (resp. bijectif) si K est un corps (resp. un corps fini).