Université Rennes 1, Année 2013-2014
Master 1 Math., Algèbre générale de base

Chapitre 1, indications de solution

Exercice 1.4.
• $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},i):\mathbb{Q}]=6$ car $X^2+1\in\mathbb{Q}[X]$ reste irréductible sur $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Autre solution : $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},i)$ est de degré ≤ 6, or il contient $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ de degré 3 et $\mathbb{Q}(i)$ de degré 2.
• $[\mathbb{Q}(\sqrt{3},i):\mathbb{Q}]=4$ car $X^2+1\in\mathbb{Q}[X]$ reste irréductible sur $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
• $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\xi)=\mathbb{Q}(\sqrt{3},i)$ car $\xi=(-1\pm i\sqrt{3})/2$. Donc $[\mathbb{Q}(\sqrt{3},\xi):\mathbb{Q}]=4$.

Exercice 1.6.
• On a $2=(\alpha-i)^2=\alpha^2-2i\alpha-1$ d'où $i\in\mathbb{Q}(\alpha)$, puis $\sqrt{2}=\alpha-i\in\mathbb{Q}(\alpha)$. Donc $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(i,\sqrt{2}):\mathbb{Q}]=4$. En élevant encore au carré on trouve $P=X^4-2X^2+9$.
• On a $\mathbb{Q}(\alpha)=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7},\sqrt{2})$ de degré 6 sur $\mathbb{Q}$, puis on calcule $P=(X^3+6X-7)^2-2(3X^2+2)^2$.
• On a $\mathbb{Q}(i+\xi)=\mathbb{Q}(i,\xi)=\mathbb{Q}(\sqrt{3},\xi)$ de degré 4, cf exo 1.4. Puis on calcule $P=(X^2+X)^2+(2X+1)^2$.

Exercice 1.7. Si $x=p/q\in\mathbb{Q}$ est racine de $P=X^3-3X+4$, avec $(p,q)=1$, alors $p\mid 4$ et $q\mid 1$, donc $x\in\{\pm1,\pm2\}$. On voit ainsi que P n'a pas de racine, donc il est irréductible. On cherche un couple de Bézout (U,V) tel que $U.(X^3-3X+4)+V.(X^2+X+1)=:r\in\mathbb{Q}^\times$ sous la forme $U=-X+a$ et $V=X^2+bX+c$. On trouve $a+b=-1$, $b+c=-4$ et $-3a+b+c=4$. Donc $a=-8/3$, $b=5/3$, $c=-17/3$ et $r=-49/3$. L'inverse cherché est $(-1/49).(3\alpha^2+5\alpha-17)$.

Exercice 1.8. La question est de savoir si $\mathbb{Q}(i)$ est inclus dans les 3 corps proposés. On voit facilement que $\mathbb{Q}(i)\not\subset\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$. Soit $\beta=\sqrt[4]{-2}$. Son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ est $X^4+2=(X-\beta)(X+\beta)(X-i\beta)(X+i\beta)$. Si on avait $\mathbb{Q}(i)\subset\mathbb{Q}(\beta)$ alors β serait de degré 2 sur $\mathbb{Q}(i)$, mais aucun produit de deux des facteurs de X^4+2 n'est à coefficients dans $\mathbb{Q}(i)$. Donc $\mathbb{Q}(i)\not\subset\mathbb{Q}(\beta)$. Enfin comme α est de degré 3 on ne peut avoir $\mathbb{Q}(i)\subset\mathbb{Q}(\alpha)$, pour des raisons de degré.

Exercice 1.9. α transcendant $\Rightarrow\{\alpha^i,i\in\mathbb{N}\}$ libre sur $k\Rightarrow\{\alpha^{2i},i\in\mathbb{N}\}$ libre sur $k\Rightarrow\alpha^2$ transcendant. Si $\alpha\in k(\alpha^2)$ alors il existe $P,Q\in k[X]$ non nuls tels que $\alpha Q(\alpha^2)=P(\alpha^2)$, donc le polynôme $F=XQ(X^2)-P(X^2)$ annule α. Or ce polynôme est non nul car $F=0$ implique $XQ(X^2)=P(X^2)$ implique $P=Q=0$ (le polynôme de gauche est impair alors que celui de droite est pair). On a obtenu un polynôme non nul qui annule α, c'est impossible puisque α est transcendant.

Exercice 1.12. Pour X^3-2 : corps de rupture $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, corps de décomposition $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},j)$ avec j racine primitive $3^{ème}$ de l'unité. Pour X^4+1 : corps de rupture $\mathbb{Q}((1+i)/\sqrt{2})$, corps de décomposition idem.

Exercice 1.15. α et β sont racines de X^2-sX+p.

Exercice 1.16. Évident, par exemple par récurrence sur le degré de l'extension.