Aucun document n'est autorisé. Toute affirmation doit être justifiée.

(1) Montrez que f est un morphisme de A-modules.

(1 point) *Pour $P, Q \in A[X]$ on a $f(P+Q) = (X^2+X+3)(P'(0)+Q'(0))-X(P+Q) = f(P)+F(Q)$, et pour $a \in A$ on a $f(aP) = (X^2+X+3)(aP)'(0) - X(aP) = af(P)$. Ceci montre que f est un morphisme de A-modules.*

(2) Montrez que $A_n[X]$ est un A-module libre de type fini. Quel est son rang ?

(2 points) *Tout polynôme de degré $\leqslant n$ s'écrit de manière unique comme A-combinaison linéaire de $\{1, X, \dots, X^n\}$. Cette partie est donc une base de $A_n[X]$ qui est donc un A-module libre de type fini, de rang $n+1$.*

(3) Pour $n = 1$, montrez que $A_n[X]$ est stable par f. Pour $n \neq 1$, est-ce encore le cas ?

(3 points) *Pour un polynôme $P = aX + b$ (avec $a, b \in A$) de degré $\leqslant 1$, on a $f(P) = (X^2+X+3)a - X(aX+b) = (a-b)X + 3a \in A_1[X]$. Donc le module $A_1[X]$ est stable par f. Le module $A_0[X]$ n'est pas stable par f car $f(1) = -X$ n'appartient pas à $A_0[X]$. Enfin, pour $n \geqslant 2$, le module $A_n[X]$ n'est pas stable par f, car $f(X^n) = -X^{n+1}$ n'appartient pas à $A_n[X]$. Finalement $A_n[X]$ est stable si et seulement si $n = 1$.*

(4) Pour quels anneaux A le morphisme g est-il injectif ? surjectif ? bijectif ?

(3 points) *On a $g(aX+b) = f(aX+b) = (a-b)X + 3a$. On en déduit que $\ker(g) = \{P = a(X+1), a \in A, 3a = 0\}$, donc g est injectif ssi $3a = 0 \Rightarrow a = 0$, pour tout $a \in A$, c'est-à-dire 3 est non diviseur de 0. De plus $im(g) = XA \oplus 3A$, donc g est surjectif ssi $3A = A$, c'est-à-dire 3 est inversible dans A. On retrouve le fait général que, pour les endomorphismes des modules libres de type fini, surjectif implique injectif. En particulier g est bijectif ssi 3 est inversible. On pouvait aussi trouver ces résultats en écrivant que la matrice de g dans la base $\{1, X\}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Son déterminant est 3. D'après le cours g est injectif ssi 3 est non diviseur de 0, et g est surjectif ssi bijectif ssi 3 inversible.*

(5) Pour quels anneaux A le module $L = \mathrm{im}(g)$ est-il libre ?

(2 points) *On a $L = XA \oplus 3A$. Si 3 est non diviseur de 0 dans A, alors le morphisme $u : A \oplus A \to L$ tel que $u(P, Q) = XP + 3Q$ est un isomorphisme donc L est libre de rang 2. Si $3 = 0$ dans A i.e. si A est de caractéristique 3, alors $L = XA$ et le morphisme $u : A \to L$ tel que $u(P) = XP$ est un isomorphisme donc L est libre de rang 1.*

(2 points) *Il reste le cas où 3 est non nul et diviseur de 0. Ceci signifie que $3 \neq 0$ et il existe $b \neq 0$ dans A tel que $3b = 0$. Supposons que L est libre pour arriver à une contradiction. Comme L est engendré comme A-module par X et 3, il est de rang fini $r \leqslant 2$. Montrons que L ne peut pas être engendré par un élément. Sinon, soit $G = uX + 3v \in L$, pour $u, v \in A$, qui engendre L. Comme X et 3 sont dans L, il existe $a_1, a_2 \in A$ tels que $X = a_1 G$ et $3 = a_2 G$. La première condition implique que $a_1 \in A^\times$ et $3v = 0$. La seconde condition implique que $a_2 u = 3 = 0$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $3 \neq 0$. Donc $r > 1$ et finalement $r = 2$. Alors le morphisme $u : A \oplus A \to L$ introduit plus haut est un morphisme surjectif entre deux modules libres de rang 2, donc il est bijectif, ce qui est impossible puisque $u(0, b) = 3b = 0$ alors que $(0, b) \neq (0, 0)$. On conclut que dans ce cas L n'est pas libre. En résumé L est libre ssi A est tel que : soit 3 est non diviseur de 0, soit $3 = 0$.*