Université Rennes 1, 2014-2015 **Contrôle 2** Master 1 Math., ALGB

Aucun document n'est autorisé. Toute affirmation doit être justifiée.

Soit A un anneau commutatif. Pour tout polynôme $P \in A[X]$, on note P' son polynôme dérivé. On considère l'application $f : A[X] \to A[X]$ définie par $f(P) = (X^2 + X + 3)P'(0) - XP$.

(1) Montrez que f est un morphisme de A-modules.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $A_n[X] = \{P \in A[X],\ \deg(P) \leqslant n\}$.

(2) Montrez que $A_n[X]$ est un A-module libre de type fini. Quel est son rang ?

(3) Pour $n = 1$, montrez que $A_n[X]$ est stable par f. Pour $n \neq 1$, est-ce encore le cas ?

On note $g : A_1[X] \to A_1[X]$ la restriction de f à $A_1[X]$.

(4) Pour quels anneaux A le morphisme g est-il injectif ? surjectif ? bijectif ?

(5) Pour quels anneaux A le module $L = \mathrm{im}(g)$ est-il libre ?

Université Rennes 1, 2014-2015 **Contrôle 2** Master 1 Math., ALGB

Aucun document n'est autorisé. Toute affirmation doit être justifiée.

Soit A un anneau commutatif. Pour tout polynôme $P \in A[X]$, on note P' son polynôme dérivé. On considère l'application $f : A[X] \to A[X]$ définie par $f(P) = (X^2 + X + 3)P'(0) - XP$.

(1) Montrez que f est un morphisme de A-modules.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $A_n[X] = \{P \in A[X],\ \deg(P) \leqslant n\}$.

(2) Montrez que $A_n[X]$ est un A-module libre de type fini. Quel est son rang ?

(3) Pour $n = 1$, montrez que $A_n[X]$ est stable par f. Pour $n \neq 1$, est-ce encore le cas ?

On note $g : A_1[X] \to A_1[X]$ la restriction de f à $A_1[X]$.

(4) Pour quels anneaux A le morphisme g est-il injectif ? surjectif ? bijectif ?

(5) Pour quels anneaux A le module $L = \mathrm{im}(g)$ est-il libre ?