Exercice 1 - Un anneau non factoriel
Soient k un corps et $A = k[X,Y,Z,T]/(XY - ZT)$. On note $B = k(X)[Z,T]$ l'anneau de polynômes en deux variables Z,T à coefficients dans le corps $k(X)$.

(1) On note x,y,z,t les images de X,Y,Z,T dans A. Montrez que la sous-k-algèbre $k[x,y,z]$ engendrée par x,y,z est isomorphe à l'anneau de polynômes $k[X,Y,Z]$. Même chose pour les autres sous-algèbres engendrées par trois éléments parmi $\{x,y,z,t\}$.

On part du morphisme de k-algèbres $g : k[X,Y,Z] \to k[x,y,z]$ qui envoie X sur x, Y sur y, Z sur z. Il est surjectif par définition. Son noyau est formé des $P = P(X,Y,Z)$ qui, vus dans $k[X,Y,Z,T]$ sont multiples de $XY - ZT$. Comme $\deg_T(P) \leqslant 0$, on voit que nécessairement $P = 0$. Donc g est un isomorphisme.

(2) Montrez que la famille $(X^c)_{c\in\mathbb{Z}}$ est libre dans le $k[Z,T]$-module $k(X)[Z,T]$.

Partant d'une combinaison linéaire $\sum_{c=-m}^{n} P_c X^c$ avec $m,n \geqslant 0$, en multipliant par X^m on se ramène à une combinaison linéaire de monômes X^i de degrés positifs ou nuls ; comme $(X^i)_{i\geqslant 0}$ est une famille libre de $k[X,Z,T]$, on obtient que tous les coefficients P_c sont nuls.

(3) Montrez que le morphisme de $k[X,Z,T]$-algèbres $f : k[X,Y,Z,T] \to B$ tel que $f(Y) = ZT/X$ induit un morphisme injectif $A \hookrightarrow B$. Déduisez-en que A est intègre.

Il est clair que $(XY - ZT) \subset \ker(f)$; on doit montrer l'égalité. Soit $P \in \ker(f)$ écrit sous la forme $P = \sum_{i,j\geqslant 0} a_{ij} X^i Y^j$ avec tous les $a_{ij} \in k[Z,T]$ nuls sauf un nombre fini. On a :

$$f(P) = \sum_{i,j\geqslant 0} a_{ij} Z^j T^j X^{i-j} = \sum_{c} \left(\sum_{i-j=c} a_{ij} Z^j T^j \right) X^c = 0.$$

Comme $(X^c)_{c\in\mathbb{Z}}$ est libre d'après (2), on déduit que la condition $P \in \ker(f)$ est équivalente à :

$$(\star) \qquad \textit{pour chaque } c, \textit{ on a } \textstyle\sum_{i-j=c} a_{ij} Z^j T^j = 0.$$

Lorsque $c = i - j \geqslant 0$, nous utiliserons cette condition telle quelle ; lorsque $d = j - i = c- > 0$, nous l'utiliserons plutôt sous la forme suivante, obtenue en divisant par $Z^d T^d$:

$$(\star\star) \qquad \textstyle\sum_{j-i=d} a_{ij} Z^i T^i = 0.$$

Revenons à l'expression originale $P = \sum_{i,j\geqslant 0} a_{ij} X^i Y^j$. En séparant l'ensemble d'indices i,j selon le signe de $i - j$, on a :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{c\geqslant 0} \sum_{i-j=c} a_{ij} X^i Y^j + \sum_{d>0} \sum_{j-i=d} a_{ij} X^i Y^j \\ &= \sum_{c\geqslant 0} \sum_{i-j=c} a_{ij} X^j Y^j X^c + \sum_{d>0} \sum_{j-i=d} a_{ij} X^i Y^i Y^d \\ &= \sum_{c\geqslant 0} \sum_{i-j=c} a_{ij} (X^j Y^j - Z^j T^j) X^c + \sum_{c<0} \sum_{j-i=d} a_{ij} (X^i Y^i - Z^i T^i) Y^d \ ; \end{aligned}$$

la dernière égalité est obtenue en utilisant $(\star)$ et $(\star\star)$. On voit que dans chaque terme, on peut mettre $(XY - ZT)$ en facteur, ce qui donne le résultat.

(3) Montrez que la préimage de $k(X)$ par f est égale à $k[x]$.

Soit $a \in A$ avec $a = \sum_{i,j\geqslant 0} a_{ij}x^iy^j$ avec $a_{ij} \in R$ (image dans A d'un polynôme $P \in k[X,Y,Z,T]$ comme ci-dessus). Si $f(a) \in k(X)$, on a $\sum_c \left(\sum_{i-j=c} a_{ij}Z^jT^j\right) X^c \in k(X)$. Ceci impose à chaque $\sum_{i-j=c} a_{ij}Z^jT^j$ d'être une constante de k, donc $a \in k[x]$.

(4) Montrez que z et t sont des irréductibles de A. Indiquez pourquoi x et y le sont aussi.

Supposons que $z = ab$ dans A. Prenant les images par f, on peut voir cette égalité dans B. On sait que z est irréductible dans B, donc on a (par exemple) $a \in B^\times = k(X)^\times$ et $b = a^{-1}z$. D'après le point précédent, on déduit que $a \in k[x]$, et de même que $b = zc$ avec $c \in k[x]$. Alors $ac = 1$ dans $k[X]$, donc $a, c \in k^\times$. Donc z est irréductible dans A. On montre de même que t est irréductible, ainsi que x, y en utilisant une injection $A \hookrightarrow k(Z)[X,Y]$.

(5) Justifiez qu'aucun de ces quatre irréductibles n'est multiple d'un autre ; en particulier, ils sont non associés deux à deux.

On a $A/(y) \simeq k[X,Z,T]/(ZT)$, $A/(z) \simeq k[X,Y,T]/(XY)$ et $A/(t) \simeq k[X,Y,Z]/(XY)$. Comme X n'est multiple ni de ZT dans $k[X,Z,T]$, ni de XY dans $k[X,Y,T]$, ni de XY dans $k[X,Y,Z]$, on voit que la classe de X dans aucun de ces anneaux n'est nulle. Donc x n'est pas multiple de y, z ou t. On raisonne de même pour montrer les autres assertions demandées.

(6) Montrez que A n'est pas factoriel.

L'élément xy possède deux décompositions distinctes (à l'ordre près et aux inversibles près) en facteurs irréductibles.

(7) Montrez que xz et xy n'ont pas de pgcd.

Si xz et xy ont un pgcd, alors z et y aussi et de plus $\mathrm{pgcd}(xz, xy) = x\mathrm{pgcd}(z, y)$, *cf lemme 4.2.12 du cours. Comme z et y sont des irréductibles distincts, on obtient* $\mathrm{pgcd}(xz, xy) = x$. *Comme $xy = zt$, on a de même* $\mathrm{pgcd}(xz, xy) = \mathrm{pgcd}(xz, tz) = z\mathrm{pgcd}(x, t) = z$. *C'est impossible.*

(8) Montrez que x et z ont un pgcd mais n'ont pas de ppcm.

Comme x et z sont des irréductibles distincts, ils ont un pgcd qui est $d = 1$. S'ils ont un ppcm m, celui-ci vérifie nécessairement $m = dm = xz$. Ceci est impossible, car $xy = zt$ est un multiple commun de x et z qui n'est pas divisible par xz.