Université Rennes 1, Année 2013-2014
Master 1 Math., Algèbre générale de base

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 - Produit direct, somme directe et quotient
Soit A un anneau commutatif. Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille de A-modules et pour chaque i, soit N_i un sous-A-module de M_i.

(1) Notons M, resp. N le produit direct des M_i, resp. des N_i. Construisez un isomorphisme $M/N \to \prod_{i\in I} M_i/N_i$.

(1) Notons M, resp. N la somme directe des M_i, resp. des N_i. Construisez un isomorphisme $\bigoplus_{i\in I} M_i/N_i \to M/N$.

Exercice 2 - Modules de torsion de type fini
Soient A un anneau commutatif intègre, et M un A-module. On dit que $x \in M$ est *de torsion* s'il existe $a \in A$, $a \neq 0$, tel que $ax = 0$. On dit que M est *de torsion* si tous ses éléments sont de torsion.

(1) On suppose M de type fini et on pose $\mathrm{Ann}(M) = \{a \in A; aM = 0\}$. Montrez que M est de torsion si et seulement si $\mathrm{Ann}(M) \neq \{0\}$.

(2) Donnez un exemple d'un module de torsion qui n'est pas de type fini et pour lequel $\mathrm{Ann}(M) = \{0\}$.

(3) On suppose que $A = \mathbb{Z}$. Montrez que M est de torsion et de type fini si, et seulement si, M est fini.

Exercice 3 - Formules pour pgcd et ppcm
Soit A un anneau factoriel et $a, b, \ldots$ des éléments de A.

(1) Montrez que $\mathrm{pgcd}(a, \mathrm{pgcd}(b, c)) = \mathrm{pgcd}(a, b, c)$.

(2) Montrez que $\mathrm{pgcd}(a^n, b^n) = \mathrm{pgcd}(a, b)^n$ pour tout entier $n \geq 1$.

(3) Montrez que $\mathrm{pgcd}(a, b)\mathrm{ppcm}(a, b) = ab$.

(4) Montrez que $\mathrm{pgcd}(a, \mathrm{ppcm}(b, c)) = \mathrm{ppcm}(\mathrm{pgcd}(a, b), \mathrm{pgcd}(a, c))$.

(5) Montrez que $\mathrm{ppcm}(a, \mathrm{pgcd}(b, c)) = \mathrm{pgcd}(\mathrm{ppcm}(a, b), \mathrm{ppcm}(a, c))$.

(6) Si $A = \mathbb{Z}$ montrez que $\operatorname{pgcd}(a,b) = \sum_{k|a,k|b} \varphi(k)$ où φ est la fonction indicatrice d'Euler.

(7) Si A est euclidien de stathme δ, montrez que pour toute division euclidienne $a = bq + r$ avec $\delta(r) < \delta(b)$ on a $\operatorname{pgcd}(a,b) = \operatorname{pgcd}(b,r)$.

(8) Si $A = \mathbb{Z}$ montrez que $\operatorname{pgcd}(n^a - 1, n^b - 1) = n^{\operatorname{pgcd}(a,b)} - 1$.

(9) Si $A = k[X]$ où k est un corps, montrez que $\operatorname{pgcd}(X^a - 1, X^b - 1) = X^{\operatorname{pgcd}(a,b)} - 1$.

Exercice 4 - Parties génératrices minimales

Pour tout entier $n \geq 1$, trouver une partie génératrice minimale de cardinal n du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$.