

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 - Produit direct, somme directe et quotient

Soit A un anneau commutatif. Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A -modules et pour chaque i , soit N_i un sous- A -module de M_i .

(1) Notons M , resp. N le produit direct des M_i , resp. des N_i . Construisez un isomorphisme $M/N \rightarrow \prod_{i \in I} M_i/N_i$.

(1) Notons M , resp. N la somme directe des M_i , resp. des N_i . Construisez un isomorphisme $\bigoplus_{i \in I} M_i/N_i \rightarrow M/N$.

Exercice 2 - Modules de torsion de type fini

Soient A un anneau commutatif intègre, et M un A -module. On dit que $x \in M$ est *de torsion* s'il existe $a \in A$, $a \neq 0$, tel que $ax = 0$. On dit que M est *de torsion* si tous ses éléments sont de torsion.

(1) On suppose M de type fini et on pose $\text{Ann}(M) = \{a \in A; aM = 0\}$. Montrez que M est de torsion si et seulement si $\text{Ann}(M) \neq \{0\}$.

(2) Donnez un exemple d'un module de torsion qui n'est pas de type fini et pour lequel $\text{Ann}(M) = \{0\}$.

(3) On suppose que $A = \mathbb{Z}$. Montrez que M est de torsion et de type fini si, et seulement si, M est fini.

Exercice 3 - Formules pour pgcd et ppcm

Soit A un anneau factoriel et $a, b, \dots$ des éléments de A .

(1) Montrez que $\text{pgcd}(a, \text{pgcd}(b, c)) = \text{pgcd}(a, b, c)$.

(2) Montrez que $\text{pgcd}(a^n, b^n) = \text{pgcd}(a, b)^n$ pour tout entier $n \geq 1$.

(3) Montrez que $\text{pgcd}(a, b)\text{ppcm}(a, b) = ab$.

(4) Montrez que $\text{pgcd}(a, \text{ppcm}(b, c)) = \text{ppcm}(\text{pgcd}(a, b), \text{pgcd}(a, c))$.

(5) Montrez que $\text{ppcm}(a, \text{pgcd}(b, c)) = \text{pgcd}(\text{ppcm}(a, b), \text{ppcm}(a, c))$.

(6) Si $A = \mathbb{Z}$ montrez que $\text{pgcd}(a, b) = \sum_{k|a, k|b} \varphi(k)$ où φ est la fonction indicatrice d'Euler.

(7) Si A est euclidien de stathme δ , montrez que pour toute division euclidienne $a = bq + r$ avec $\delta(r) < \delta(b)$ on a $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$.

(8) Si $A = \mathbb{Z}$ montrez que $\text{pgcd}(n^a - 1, n^b - 1) = n^{\text{pgcd}(a, b)} - 1$.

(9) Si $A = k[X]$ où k est un corps, montrez que $\text{pgcd}(X^a - 1, X^b - 1) = X^{\text{pgcd}(a, b)} - 1$.

Exercice 4 - Parties génératrices minimales

Pour tout entier $n \geq 1$, trouver une partie génératrice minimale de cardinal n du $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}$.